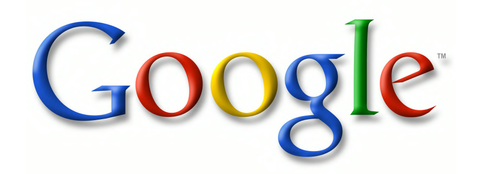
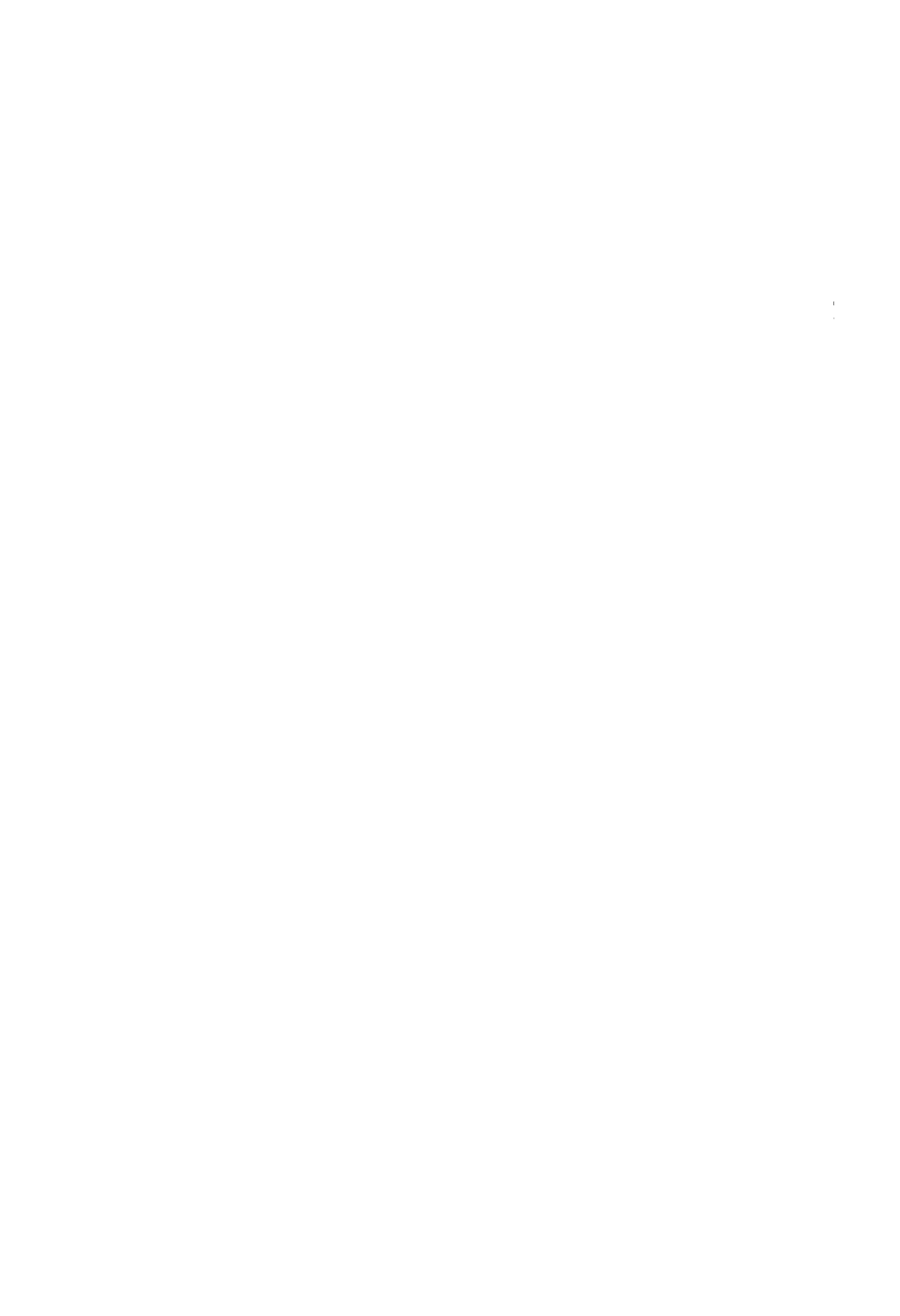



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO
ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
ICHABOD TUCKER,
OF SALEM, MASS.
(Class of 1791.)
1 Mar. 1893 —
10 Mar. 1894.





Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1893.

Nro. 1—21.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1893.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Gesellschaft übersandten Werke betrachten zu wollen.

Register

über

ler Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

eorg - Augusts - Universität

aus dem Jahre 1893.

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1893.

Nro. 1—21.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1893.





Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1893.

Nro. 1—21.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1893.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Gesellschaft übersandten Werke betrachten zu wollen.

Register

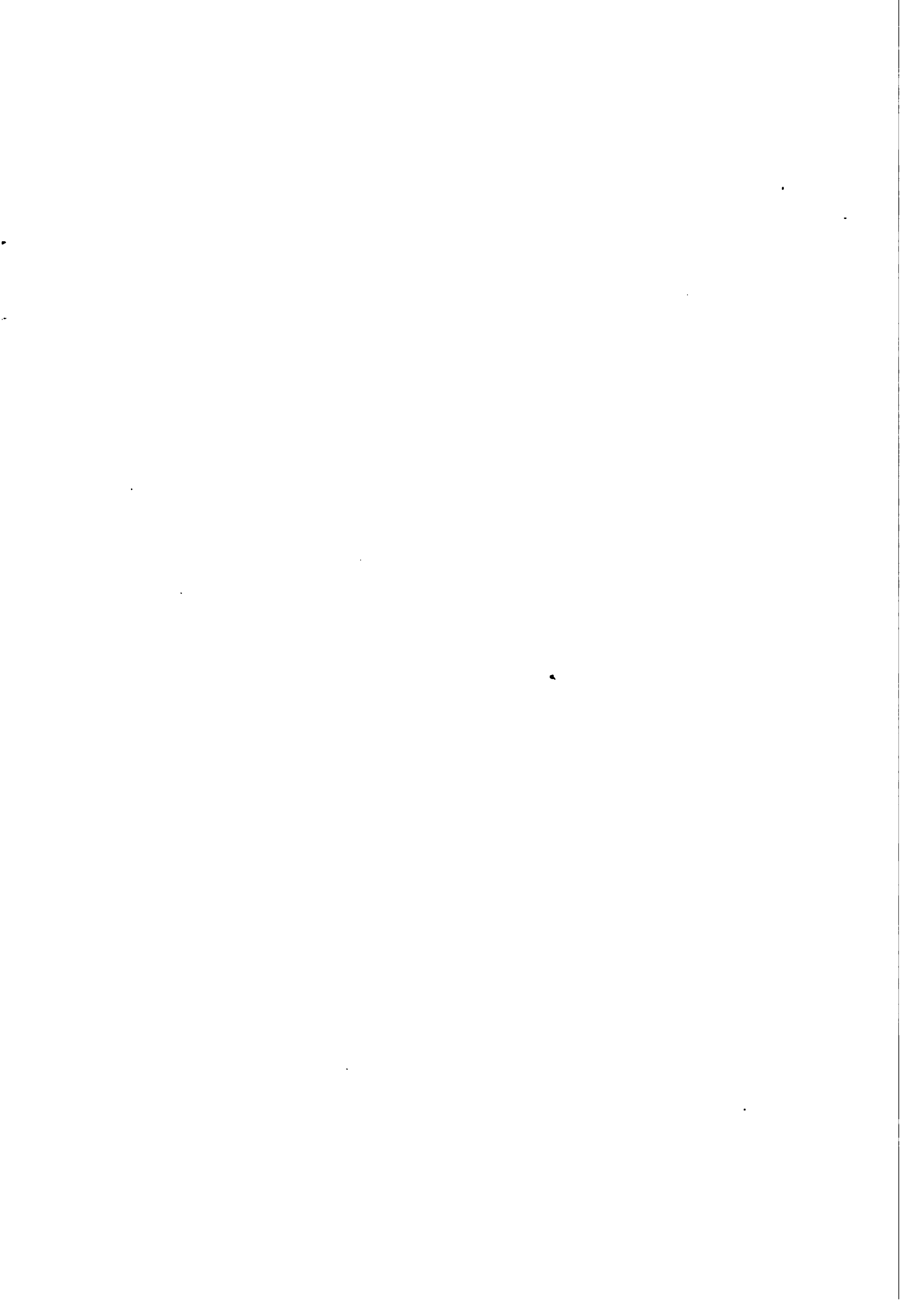
über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1893.





Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

18. Januar. | № 1. | 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 14. Januar.

Peter, „Beiträge zur Kenntniss der Hieracienflora Osteuropas".

Riecke, „Thermodynamik des Turmalins und mechanische Theorie der Muskelcontraction".

Voigt legt 1. einen Aufsatz des Herrn Privatdocenten Dr. Drude vor: „Beziehung der Elektricitätsconstanten zum optischen Brechungsexponenten".
2. „Einige Beobachtungen über die Drillungsfähigkeit von Steinsalzprismen".
3. „Beobachtungen über die Zerreissungsfestigkeit von Bergkrystall".

Klein legt 1. einen Aufsatz des Herrn Prof. Hilbert in Königsberg in Ostpr. vor: „über die Transcendenz der Zahlen e und π".
2. Eine eigene Notiz „über die Composition der binären quadratischen Formen".

Weber legt „eine Mittheilung zur Invarianten-Theorie" vor.

Kielhorn, Mittheilung „über eine Inschrift des Dichters Gangâdhara".

Meyer, „Die in der Göttinger Bibliothek erhaltene Geschichte des Inkareiches von Pedro Sarmiento de Gamboa".

Die in der Goettinger Bibliothek erhaltene Geschichte des Inkareiches von Pedro Sarmiento de Gamboa.

Von

Wilhelm Meyer (aus Speyer).

In der jetzigen Zeit, wo die ganze gebildete Welt das Gedächtniß des bedeutendsten Ereignisses der neueren Geschichte, der Entdeckung Amerika's, festlich erneuert, ist es für ein Mitglied der gelehrten Kreise Göttingens doppelt erfreulich, deren Theilnahme auch durch die folgende Gabe ausdrücken zu können. Der Fund, von dem hier Mittheilung gegeben wird, ist veranlaßt durch die von dem Königlichen Staatsministerium angeordnete Beschrei-

bung der Handschriften in den Provinzen Preußens, welche mit der Beschreibung des reichhaltigen, aber wenig gekannten Handschriftenschatzes in Göttingen eröffnet wird.

Die hier zu besprechende Schrift ist werthvoll wegen des Landes und des Volkes, das sie betrifft, sowie wegen des Mannes, der sie verfaßt hat. Denn das Volk, welches im alten Inkareich lebte, hatte unter allen Völkern Amerika's unstreitig den höchsten Grad von Gesittung und Bildung erreicht, Sarmiento de Gamboa aber gehörte zu den tüchtigsten unter jenen Männern, welche im 16. Jahrhundert Spanien's Namen in ferne Welttheile trugen und groß machten.

I

Die Quellen der alten Geschichte Peru's. Als die Spanier seit 1531 von den Sandwüsten der Küste aus mehr und mehr in das heutige Peru eindrangen, staunten sie über das, was sie sahen. Zwischen hohen, zum Theil mit ewigem Schnee bedeckten Bergketten fanden sie in fruchtbaren, wohlbebauten und vielfach mit allem Reize der Natur geschmückten Thälern und an großen Binnenseen ein schönes und wohlgesittetes Volk, arbeitsam und sehr geschickt in den Gewerben und Künsten des Friedens, in Ackerbau, Weberei und Verarbeitung von Holz, Stein und Metall, doch nicht minder zugethan der Liebe und dem Liede, wozu besonders bei den zahlreichen und prächtigen Festen auch das Dritte, ein bierartiges Getränk (chicha), sich gesellte.

Allmählich erkannten die Spanier mit Bewunderung, wie wohlgeordnet auch das Staatsgebilde gewesen war, das die ersten Eroberer zwischen 1535—1548 mit roher Hand zerstört hatten. Der Alleinherrscher, der Inka, mit seiner wohlgegliederten Beamtenschaar leitete nicht nur das Heer, überwachte die Reichsstraßen mit den Vorrathshäusern und der Reichspost, die Festungen, die großartigen Tempel und die sonstigen Staatsbauten, sondern er griff auch überall stark in das Privatleben der Einzelnen ein: die vielsprachigen Stämme wurden (was manchem europäischen Staate nicht geglückt ist) durch eine Reichssprache, die sogenannte Quichuasprache, verbunden; die Vornehmen und die hohen Beamten wurden vielfach an den Hof gezogen und ihm verpflichtet; die Ackerbauenden, die Webenden, die Bergwerksleute, die im Felde Stehenden arbeiteten zunächst für das Staatsganze und wurden vom Staate mit dem versorgt, was sie selbst nicht erzeugten und doch brauchten. Daß in den grausamen Kriegen der Spanier bis 1548 das Land nicht gänzlich verödete und die Bevölkerung nicht

völlig durch Hunger und Seuchen aufgerieben wurde, das vermochte ein genauer Kenner der Verhältnisse und der Ereignisse sich nur daraus zu erklären, daß eben jedes Glied dieses Staatskörpers gewohnt war, die Noth des andern Gliedes als die seine anzusehen und ihm rasch mit aller Kraft zu helfen.

Manche der ersten spanischen Eroberer trieb nur der Eifer, ihre Religion auszubreiten; die meisten suchten nur das Eldorado mit einem Ueberfluß von Gold, Silber und edlem Gestein. Doch bald fanden sich in Peru auch Männer ein, welche die gewaltige Thatkraft, die Spanien damals in der ganzen Welt groß machte, vereinten mit edler Begeisterung für die neuerwachten Wissenschaften und welche das Große und Merkwürdige, was sie staunend sahen, auch darzustellen versuchten. Schon die mächtigen Bauten bezeugten diesen Männern, daß die peruanische Kultur das Ergebniß einer langen geschichtlichen Entwicklung sei. Doch bei deren Erforschung stießen sie auf eine besondere Schwierigkeit.

Die Peruaner hatten die Buchstabenschrift nicht gekannt. Sie hatten freilich die viel besprochenen Quipu, Stränge und Stricke von Wolle, mit deren verschiedenartigen Knoten und Farben sie nicht nur Zahlen, sondern auch verschiedene Dinge zu bezeichnen verstanden. Mit diesen Quipu wurde nicht nur das Rechnungswesen des Staates, die Statistik der Bevölkerung und besonders das ausgebildete Steuerwesen, sondern auch die Rechnungsgeschäfte des Einzelnen in Ordnung gehalten und zwar, wie Cieza de Leon versichert, in musterhafter Ordnung. Einige Stellen scheinen anzudeuten, daß mit den Quipu auch Begriffe ausgedrückt werden konnten (vgl. Markham in Winsor's History of America I 243 [1]). Doch für die Landesgeschichte scheinen sie wenig benutzt worden zu sein. Nicht einmal ein chronologisches Gerippe derselben findet sich mit ihrer Hilfe aufgebaut, und selbst so we-

1) Eine der wichtigsten Stellen ist die Angabe des Blas Valera (bei Garcilasso de la Vega, Buch V cap. 11, S. 32 der englischen Uebersetzung Markham's in der Hakluyt Society): They wrote the laws down distinctly by means of knots and threads of different colours .. Thus the laws that were established by their first kings, six hundred years ago, are now as well preserved in the memories of the people as if they had just been promulgated afresh. Cieza de Leon gebraucht ähnliche Ausdrücke. In den Berichten über die frühere Geschichte des Landes ist von einer solchen Sicherheit der Namen, Zahlen, Thatsachen oder gar der Begriffe nichts zu finden. Wenn also das, was von den Quipu berichtet wird, wirklich Alles richtig ist und sogar ein Lied mittelst eines Quipu erhalten werden konnte, dann kannten die Leute, welche das fertig brachten, eben nur die letzte und vollkommenste Entwicklung dieser Kunst; für die früheren Zeiten dürfen wir eine solche Vollkommenheit der Knotenkunst durchaus nicht annehmen.

nig sagende Stellen, wie 'ellos vieron una tabla y quipos donde estaban sentadas las edades y años que tubieron Pachacuti Ynga y Topa Ynga Yupangui su hijo, y Guanacapal, hijo del dicho Topa Ynga; y por la dicha tabla y quipos vieron que bibiò Pachacuti Ynga Yupangui cien annos *etc.*' (die Aussage von 2 Zeugen unter Hunderten, welche 1571 in Cuzco verhört wurden; vgl. Coleccion d. documentos ined. rel. al descubrim. 21 S. 212), sind äußerst selten zu finden.

Aber das Volk des alten Peru war besorgt für die Fortdauer nach diesem Leben, also auch für das Gedächtniß der Vergangenheit. Bei Cieza de Leon ist es in der Beschreibung der einzelnen Stämme eine ständige Rubrik, anzugeben, wie die Todten bestattet und ihr Andenken geehrt wurde; wiederholt bemerkt er, diese Leute hätten für bequeme Wohnungen während ihres Lebens weniger eifrig gesorgt, als für ihre Grabstätten und das Leben nach dem Tode; die Fürsten nahmen ihren ganzen Hausschatz an Gold und Silber mit ins Grab, und ihre liebsten Frauen und viele makellose Jungfrauen ließen sich an dem Grabe tödten und das nicht ungern, da sie ja wußten, daß sie so mit jenen als Gattinnen oder als Dienerinnen in der andern Welt weiter leben würden. Ein so denkendes Volk war natürlich fleißig darin, das Andenken der Todten zu erhalten. Sie thaten das nur mündlich, und dem besten Schilderer des alten Peru, dem Cieza de Leon, verdanken wir eine ebenso lebendige als wichtige Schilderung der Art und Weise, wie dies geschah (Buch II Kap. 11 und 12).

Im Reiche lebten 3 oder 4 alte Männer, welche die vorfallenden Hauptereignisse in Liedern darstellten. Diese durften sie nur dem betreffenden Könige vortragen; nach seinem Tode trugen sie dieselben dem Nachfolger vor, welcher sie von den bestellten Recitatoren auswendig lernen und bei besondern Gelegenheiten vortragen ließ. Cieza schildert als davon getrennten Gebrauch (welcher aber vielleicht eng zu dem ersten gehört), daß nach dem Tode eines Königs geeignete Männer beriethen, ob der König zu den guten zu zählen sei. Wenn ja, so ließen sie sich vom Archivdirektor, dem Quipu-camayu, die nöthigen Zahlenangaben liefern und die Meister der Sprache mußten diesen Stoff zu Liedern verarbeiten, in denen die Thaten des Verstorbenen dargestellt wurden. Von den bestellten Recitatoren wurden diese dann auswendig gelernt und vorgetragen, aber dies durfte unter schwerer Strafe nur bei besondern Gelegenheiten geschehen. Insbesondere bei einigen Feierlichkeiten traten die Mumien der guten Könige mit ihrem Hausschatze mit Frau und Dienerschaft öffentlich auf, und die be-

stellten Recitatoren trugen die Lieder über ihre Thaten vor. Daß diese historischen Lieder etwas ganz Gewöhnliches waren, zeigen manche gelegentliche Bemerkungen. So schildert Cieza (I cap. 54), wie ein Stamm die Kerntruppen des Inka durch Verrath vernichtet hatte; nach blutiger Rache, fährt er fort, befahl der Inka Lieder abzufassen, in welchen das Schicksal der Gemordeten geschildert wurde und welche bei besondern Trauerfeierlichkeiten vorgetragen werden sollten. Wir Neueren mühen uns eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie Ereignisse in den ältesten Zeiten in Liedern dargestellt wurden und wie sich so Geschichte in Sage verwandelte, und wir sammeln sorgfältig einzelne Anhaltspunkte, um in den epischen Volksdichtungen, wie im Homer, im Nibelungenlied, in den serbischen Volksliedern u. s. w. den dargestellten Stoff von der Darstellung einigermaßen scheiden zu können: ich weiß keine Schilderung, welche diesen Prozeß so deutlich beleuchtet, als der lebendige und ungeschminkte Bericht des Cieza de Leon.

Hinter den historischen Liedern der alten Peruaner brauchen wir keine wirklichen Dichtungen zu suchen. Verse lernen sich eben leichter auswendig als Prosa, und, wie viele Reimchroniken, so können diese historischen Lieder werthvolle Nachrichten gegeben haben. Allein sie durften nicht sehr oft vorgetragen werden und nicht Viele wußten sie auswendig. Deßhalb verbreiteten sich unter dem Volk selbst viele und unklare und sich widersprechende Erzählungen nach denselben. Cieza wird nicht müde zu wiederholen, daß er aus vielen ihm mitgetheilten Berichten mit großer Vorsicht auslese, daß er insbesondere die Erzählungen des Volkes selbst ganz bei Seite lasse und nur das beachte, was ihm Leute von Rang und Würde berichteten.

Wir sind jetzt der altperuanischen Geschichte gegenüber in einer sonderbaren Lage. Die Hilfsmittel oder die Methoden, mit welchen wir sonst die Geschichte eines Volkes zu erforschen pflegen, versagen hier. Von dem Inkareiche wußten nur die Eingeborenen Etwas. Diese Quelle ist längst versiegt. Wir können nur das ausnutzen, was spanische Schriftsteller jener Zeiten nach den Berichten der Eingeborenen aufgeschrieben haben. Diesen Berichten dürfen wir ziemlich viel trauen in dem, was die Zustände beim Untergang des Inkareiches betrifft, also in dem, was sie über die religiösen Ansichten und Einrichtungen, über die Ordnung des ganzen Staatswesens und über die Sitten und Gebräuche der Einzelnen angeben. Ganz anders sind die Nachrichten zu betrachten, welche diese Spanier über die frühere Ge-

schichte uns vermitteln. Schon die starken Widersprüche der verschiedenen Berichte zwingen zur Kritik. Da kommt es zunächst auf die Person des berichtenden Spaniers an. Wenn z. B. Montesinos, wie unsere alten Chronisten, sozusagen von Noah's Arche an jeden König zu nennen weiß oder wenn Balboa seine Helden lange Reden halten läßt, so wird man auch gegen ihre sonstigen Angaben mißtrauisch. Ist diese zweite Frage erledigt, dann kommt die erste, die schwierigere, wie weit den Eingeborenen zu trauen war, welche den einzelnen Spaniern jene Geschichten erzählten.

Früher hat man sich die Gewährsmänner meistens nicht genauer angesehen. Das hübsch geschriebene, große und zusammenfassende Werk des (sehr eiteln) Garcilasso de la Vega, der zum Glück zwischen seinen Nachrichten die werthvollen Bruchstücke des ernsten Blas Valera eingeschoben hat, diente den Meisten als bequeme Quelle ihrer Kenntnisse. Doch schon Will. Prescott hat für seine Darstellung des Inkareiches sich handschriftlicher Hilfsmittel bedient und in neuerer Zeit sind durch die Bemühungen von Clements Markham (hauptsächlich durch Uebersetzungen in den Schriften der Hakluyt Society), insbesondere aber durch des trefflichen Kenners, Marcos Jiménez de la Espada, Forschungen im Archiv des indischen Amtes in Sevilla und in den spanischen Bibliotheken eine größere Zahl von handschriftlichen Schilderungen der Geschichte oder der religiösen und staatlichen Zustände des Inkareiches veröffentlicht worden. Es bleibt die nächste und wichtigste Aufgabe, die noch vorhandenen Originalschriften und Berichte jener Zeit ans Licht zu ziehen. Aber mit dem Wachsen des Stoffes muß auch die Kritik der einzelnen Schriftsteller und der von ihnen vermittelten Nachrichten wachsen. Einen beträchtlichen Fortschritt auf diesem Wege bezeichnet die Uebersicht über die seltenen oder verschollenen Werke dieses Inhalts, welche Jiménez de la Espada 1879 gegeben hat (als Einleitung zu Tres Relaciones de Antiguedades Peruanas. Publícalas el Ministerio de Fomento, Madrid 1879); dann die Uebersicht über die ganze bis jetzt bekannte Literatur von Clements R. Markham in Winsor's History of America I, 1889, S. 259—275 (vgl. II, 1886, S. 573—578).

An der Spitze der Quellenwerke steht, der Zeit und dem Inhalte nach, das groß angelegte Werk des Pedro de Cieza de Leon. Als 15jähriger Jüngling kam er 1533 nach Westindien und auf seinen Kriegszügen und Reisen sammelte er seit 1541 für sein Werk. Mit den Truppen des Königs, welche die spanischen

Rebellen niederwarfen und dem verwüsteten Lande und den mißhandelten Eingeborenen endlich einige Ruhe brachten, zog er 1547 in Peru ein. Er liebte und achtete die Eingeborenen und sammelte bis 1550 mit größtem Eifer und Erfolg eine Fülle von Nachrichten, welche er in ebenso bescheidener als gewissenhafter Art mittheilt. Diese Nachrichten sind besonders werthvoll, da die Spanier kaum 15 Jahre im Land waren und die Einwohner noch unbefangen und aus lebendiger Anschauung erzählten, anderseits Cieza wegen des noch frischen Hasses gegen die Rebellen frei reden durfte. Das Land Peru darf sich Glück wünschen, daß ein solcher Mann seine Vorgeschichte dargestellt hat [1]).

Eine ganz besondere Thätigkeit für die Klarlegung der alten Geschichte und der Einrichtungen des Inkareiches herrschte in Peru um 1571. Francisco de Toledo, welcher 1569 als erster Vicekönig in Peru eingezogen war, sah als seine Hauptaufgabe an, daß die Regierung des Königs von Spanien als die einzig rechtmäßige anerkannt und daß die Verwaltung des herabgekommenenen Landes mit möglichster Anschmiegung an die trefflichen Einrichtungen des Inkareiches geordnet werde. Er erfand deßhalb eine neue Art von Geschichtsforschung. Auf seiner großen Inspectionsreise 1570—1572 wurden an verschiedenen Orten die bedeutendsten und ältesten Eingebornen über eine Reihe von Gegenständen befragt; ihre eidlichen Aussagen wurden mit Hilfe eines vereidigten Dolmetschers von einem Notar zu Protokoll genommen. Theile von diesen Protokollen (Informaciones) sind gedruckt worden 1874 im 21. Band der Coleccion de documentos ineditos relativos al descubrimiento etc. S. 131—220 und 1882 in Coleccion de libros Españoles raros XVI 185—259. Francisco de Toledo zog daraus zunächst den Schluß, daß die Inka nur Eroberer und grausame Herrscher gewesen seien, einen Schluß, den er sehr nothwendig brauchte, um die empörende Hinrichtung des schuldlosen letzten Inka im Ende 1571 zu beschönigen; weiterhin ließ er besonders die frühere Verwaltung des Landes und die auf den Einwohnern damals

1) Der I. Theil ist öfter herausgegeben und zuletzt von Markham (in der Hakluyt Society 1864) in englischer Uebersetzung. Den II. Theil hat Prescott als Handschrift viel benutzt, jedoch die Widmung 'para (für) Juan Sarmiento' mißverstanden als 'verfaßt von J. S.'; der Sarmiento, auf den Prescott sich oft beruft, hat also nichts zu schaffen mit dem hier zu besprechenden, sondern ist der lang gesuchte 2. Theil von Cieza; derselbe wurde im spanischen Text von M. Jiménez de la Espada (Biblioteca Hispano-ultramarina, vol. V, 1880: Segunda Parte de la Crónica del Perú) und in englischer Uebersetzung von Markham (in der Hakluyt Society no. 68) 1883 veröffentlicht.

ruhenden Lasten feststellen. Er regte eine Reihe von Geistlichen und Verwaltungsbeamten an, ähnliche Stoffe aus Peru's Vorzeit zu untersuchen und darzustellen[1]). Ja er führte auf seiner Reise einen eigenen Cosmografo general destos reynos del Peru mit sich, nur zu dem Zwecke, daß dieser die Verhältnisse des Landes und dessen Vorgeschichte erforsche und darstelle. Dieser Mann, Pedro Sarmiento de Gamboa, welchen der Vicekönig selbst genannt hat 'el hombre más habil desta materia, que habia hallado', soll hier näher betrachtet werden.

II

Pedro Sarmiento de Gamboa verdient von Deutschen besonders beachtet zu werden. Denn ihm ist die Entdeckung der Salomoinseln zu danken. Bis jetzt meinte man, Alvaro de Mendaña sei 1567 ausgefahren, um Entdeckungen in der Südsee zu machen; dabei habe er die Salomoinseln gefunden. Doch Mendaña war, wie sein großer Bericht (unten no. 2) deutlich zeigt, unkundig sowohl in der Praxis wie in der Theorie der Schifffahrt: er wußte weder ein Schiff zu commandiren oder zu steuern, noch verstand er Etwas von der Berechnung der Fahrten oder der Gestirne, geschweige daß er mit noch höheren Kenntnissen die Existenz unbekannter Inseln oder Festländer erforscht hätte; was er über solche Dinge sagt, das hat sein Steuermann Gallego ihm vorgesagt. Für seine viel späteren Reisen mag er solcher Dinge kundig geworden sein: damals war er nur Cousin des Gouverneurs. Merkwürdig ist auch, wie sowohl Mendaña als Gallego völlig schweigen über die Veranlassung der ganzen Unternehmung. 'Auf Befehl S. Majestät sind wir ausgefahren, um in der Südsee Entdeckungen zu machen', das ist Alles, was die Beiden darüber angeben.

Sie hatten guten Grund zu schweigen. Denn auf jenen beiden Schiffen in der Südsee spielte wieder eine Scene jenes Kampfes, den Talent und Neid ewig gegen einander führen. Pedro Sarmiento de Gamboa hatte, wie er in seinen beiden Berichten auseinandersetzt, insbesondere gestützt auf seine mathematischen Kenntnisse und Forschungen[2]), 1567 dem Gouverneur von Peru

1) Der gut unterrichtete Blas Valera erwähnt (bei Garcilasso de la Vega Buch V cap. 12, S. 37 in Markham's Uebersetzung) 'the authentic records which the Viceroy, D. F. d. T., ordered his officers and secretaries to write, after having fully informed themselves by examining the Indians of each province'.

2) Seefahrten in dieser Richtung scheint Sarmiento vorher nicht gemacht zu haben. Freilich Clements Markham (bei Winsor, History of America, I p. 268)

den Plan für eine Entdeckungsreise in der Südsee vorgelegt und im Namen des Königs den Auftrag dazu erhalten; dann aber, um nachhaltiger Unterstützung von Seite des Gouverneurs sicher zu sein, selbst den Wunsch ausgesprochen, daß der Neffe des Statthalters, Alvaro de Mendaña, den Oberbefehl über die Unternehmung bekomme, unter der Bedingung, daß Sarmiento den Kurs bestimme und daß dieser ohne seine Einwilligung nicht geändert werden dürfe. Doch Mendaña und der Obersteuermann Gallego, welche sich auf dem einen Schiff befanden, suchten bald dem Sarmiento, der das andere Schiff befehligte, den Ruhm der Entdeckungen wegzunehmen, indem sie den Kurs nach eigenem Gutdünken richteten; nur in der Noth kam Mendaña um Rath zu Sarmiento.

Dieser Streit zog sich durch die ganze Fahrt. Mendaña und Gallego schweigen davon; sie berichten nur von einigen Fällen, wo Sarmiento landete, um die Eingebornen zu züchtigen. Dagegen Sarmiento spricht offen von der Treulosigkeit des Mendaña und des Gallego, und nimmt sowohl in den beiden erwähnten Schriften den Ruhm der Entdeckungen für sich in Anspruch, wie er im Jahre 1572 in der nachher zu erwähnenden Geschichte schreibt 'las yslas del arcipielago del nombre de Jesus, vulgarmente llamadas de Salamon, aunque no lo son, de que yo di noticia y por mi persona las descubri el a. 1567, aunque fue por general Alvaro de Mendaña'. Gegenüber dem verlegenen Schweigen des Mendaña und des Gallego erwecken die ins Einzelne gehenden Erklärungen des Sarmiento durchaus Vertrauen. Es ist zu erwarten, daß bald die genannten Berichte zu einem Gesammtbild dieser denkwürdigen Fahrt vereinigt werden. Die Reichhaltigkeit des Stoffes wird gestatten eine deutlichere und richtigere Geschichte der Fahrt zu schaffen als es Guppy möglich war. Dabei wird die Prüfung der Einzelheiten, insbesondere der Kursrichtungen, zeigen, in wie weit Sarmiento's einzelne Angaben richtig sind. Jedenfalls hat

---

glaubt zu finden, daß 'owing to have found out from the records of the Incas that Tupac Inca Yupanqui discovered two Islands in the South Sea, called Ahuachumpi and Ninachumbi, Sarmiento sailed on an expedition to discover them at some time previous to 1564. . . Sarmiento seems to have discovered islands which he believed to be those of the Inca'. Das muß ein Irrthum sein. Denn 1572 schreibt Sarmiento von den Inseln Avachumbi und Niñachumbi, die Topa Ynga entdeckt habe, estas son las yslas, que yo el año de sesenta y siete a treynta de Novembre (am 19 Nov. 1567 fuhren die 2 Schiffe ab) descubri en el mar del Sur duzientas y tantas leguas de Lima al poniente de Lima, yendo al gran descubrimento de que yo di noticia al gobernador e licenciado Castro, y no las quiso tomar Alvaro de Mendaña general de la armada.

nicht Alvaro de Mendaña oder sein Obersteuermann Gallego den Gedanken zu dieser Entdeckungsfahrt gefaßt, sondern Pedro Sarmiento. Er wollte, wie es scheint, mehr südwärts fahren und da den 'vierten Theil der Welt' suchen. Der Neid seiner Genossen hat vielleicht eine große Entdeckung verhindert. Um so mehr gebührt dem Sarmiento der Ruhm des kleineren, wirklichen Ergebnisses der von ihm allein angeregten Fahrt, d. h. der Entdeckung der Salomoinseln [1]).

1) Die Berichte über diese denkwürdige Entdeckungsfahrt sind nicht gekannt oder nicht geprüft worden. Zuerst hat Figueroa den Auszug aus dem Schiffjournal des Piloten Gallego unvollständig veröffentlicht. Mit diesem schlechten Hilfsmittel arbeiteten die Geographen bis in die neueste Zeit. Guppy (The Salomons Islands, London 1887) fand dazu den vollständigen Bericht des Gallego. Er hat denselben möglichst verwerthet; doch ließ er sich zu manchem Irrthum verleiten; so sind z. B. die Schiffe nicht 1566—1568 auf der Fahrt gewesen, wie Guppy (S. 272) meint, sondern sie verließen sicher Callao am 19 Nov. 1567 und kehrten am 11 Sept. 1569 nach Lima zurück. Allein schon 1866 waren zwei wichtige Berichte über dieselbe Reise gedruckt worden (nachher no. 5 und 2), und Don Justo Zaragoza hatte 1876 den Auszug aus Gallego's Journal vollständig und 1880 den kleineren Bericht des Mendana zum Druck gebracht. Es liegen also jetzt folgende Darstellungen dieser Fahrt vor:

1. Der kürzere Bericht des Alvaro de Mendaña an den König: gedr. 1880 in Biblioteca Hispano-ultramarina Bd. 4 = Bd. II der Viajes de Quirós von Don Justo Zaragoza S. 15—49. Bis S. 29 läuft dieser Bericht neben dem folgenden; aber S. 29—49 sind eine werthvolle Ergänzung jenes unvollständigen Berichtes.

2. Der ausführliche Bericht des Mendaña an den König: gedr. 1866 in Coleccion de Documentos ineditos, relativos al descubrimiento etc., Bd. V S. 221—286. Die Handschrift ist leider unvollständig und geht nur bis zum 7 Mai 1568 (= S. 29 von no. 1 und S. 213 von no. 3 bei Guppy). Alvaro berichtet hier alle möglichen Kleinigkeiten; dagegen erklärt er selbst (S. 222): porque Hernan Gallego, piloto mayor, dará á V. S. relacion muy particular de los rumbos y altura por donde navegamos, cómo habíamos subido arando la mar, y de todo lo que toca á la navegacion (no. 3), no lo digo aquí.

3. Der vollständige Bericht des Obersteuermanns Hernan Gallego, von ihm für die Veröffentlichung hergerichtet; es gibt mehrere Abschriften; nach der ziemlich fehlerhaften Londoner (Brit. Museum 17623) hat Guppy, The Salomons-Islands, London 1887 S. 194—245 eine Uebersetzung veröffentlicht.

4. Auszug aus Gallego's Bericht, nach Zaragoza verfaßt von dem Dichter Luis de Belmonte Bermudez: unvollständig gedr. von Cristóbal Suarez de Figueroa (Madrid 1613) in Hechos de D. García Hurtado de Mendoza; in dieser Gestalt lange Zeit die einzige Quelle, aus welcher man die Kenntnisse über die Entdeckung der Salomoinseln schöpfte, und deßhalb z. B. übersetzt von James Burney, A chronological history of the discoveries in the Southsea I 1803 S. 277—286; vollständig jetzt gedruckt in Biblioteca Hispano-ultramarina I = Viajes de Quirós . . por D. Justo Zaragoza I 1876 S. 1—22.

5. (Auszug aus Sarmiento's Bericht an den König): 1866 gedr. in

In Peru 1569 angekommen, klagte Pedro Sarmiento beim Statthalter und wollte nach Spanien fahren, um vor dem König seine Sache zu führen. Doch der neue Vicekönig von Peru Francisco de Toledo nahm ihn in seine Dienste. Sarmiento begleitete denselben auf der großen Inspectionsreise 1570—1572 durch das ganze Land. Hierbei hatte er besonders Land und Volk zu untersuchen; nebenbei arbeitete er an der Geschichte Perus, welche im März 1572 zu einem Abschluß kam. Er blieb jedenfalls auch nachher in der Nähe des Vicekönigs und genoß dessen Gunst. Denn 1579, als Drake an der spanischen Westküste Amerika's Schrecken verbreitete, wurde Sarmiento auserlesen, um die Magalhāesstraße zu besetzen und Drake abzufangen. Drake ließ sich nicht fangen, allein Sarmiento durchfuhr als der Erste die Magalhāesstraße von Westen nach Osten. Diese in der Geschichte der Geographie denkwürdige Fahrt, welche Sarmiento in einem umfangreichen, im September 1580 vollendeten Berichte an den König schilderte (1728 gedruckt unter dem Titel Viage al Estrecho de Magellanes), fand auch damals hohe Anerkennung. Sarmiento war auf der Höhe seines Glückes.

Jedenfalls nach seinen Vorschlägen wurde er im Herbste 1581 als Gobernador y Capitan general del estrecho de la Madre de Dios antes nombrado de Magallanes mit 24 Schiffen und etwa 3000 Menschen ausgesendet; er sollte in der Straße 2 Sperrforts anlegen, dieselben besetzen und die Umgegend besiedeln. Doch Streitigkeiten mit Diego Flores de Valdés, dem Befehlshaber der Schiffe, und schwere Stürme bewirkten, daß er nur mit einem geringen Theile der Schiffe und Menschen an seinem Ziele anlangte. Hier arbeitete er redlich, um seinen Auftrag auszuführen. Doch das Glück hatte ihn verlassen. Auf der Heimfahrt wurde er sogar am 11 August 1586 bei den Azoren von Engländern gefangen. Als Sarmiento sah, ein Entrinnen sei unmöglich, echó á la mar muchos papeles de secretos de navegaciones y descubrimientos, advertimientos, noticias, relaciones, procesos y probanzas,

Coleccion de Documentos ined., rel. al descubrimiento V S. 210—221. Dies ist sicher ein Auszug aus jenem, noch nicht wieder aufgefundenen, Berichte des Sarmiento, der in dem folgenden Stücke bezeichnet wird als 'relacion grande (inviada) á V. M., aunque non sé si ha llegado á lograrse'. Ruge (Geschichte des Zeitalters der Entdeckungen, 1881, S. 494) hat besonders diesen Bericht benutzt.

6. Sarmiento's Denkschrift an den König, aus Cuzco 4 März 1572: leider nur zum Theil gedruckt (von M. Jiménez de la Espada) in Tres Relaciones de Antiguedades Peruanas, publícalas el Ministerio de Fomento, 1879 S. XXIII—XXVI. Hier finden sich mehrfach dieselben Wendungen wie in dem vorigen Stücke.

tocantes á la jornada del Estrecho, especialmente un libro grande de descripciones en pintura y arte de Geographia, de las sierras de nuevo descubiertas y reconocidas, y derroteros por escripto (der reiche Apparat eines gelehrten Seefahrers jener Zeit!) . . Solamente se salvaron algunas que venian en cifra, que no podian entender. Nach England geführt, erlangte Sarmiento Ende Oktober seine Freiheit. Doch das Unglück prüfte ihn noch härter. Auf der Heimreise wurde er in Südfrankreich im Dezember 1586 von den Hugenotten gefangen genommen, und erst nach 13 Monaten harten Gefängnisses wurde er endlich ausgelöst. In der Heimath hat er dann einen ausführlichen Bericht ausgearbeitet, den er selbst im Escurial am 15 Sept. 1589 unterschrieben hat[1]). Wenige Jahre später ist er, fast unbeachtet, gestorben.

Sarmiento war kein Abenteurer, den innere Unruhe oder Geldgier in der Welt umhertrieb. Er war wissenschaftlich gebildet und sein bewegtes Leben hatte nur das Ziel, zu forschen und zu entdecken. Mit Recht ist über ihn gesagt worden, von den vielen Spaniern, welche im 16. Jahrhundert fremde Erdtheile durchforschten, sei er der gelehrteste gewesen. Das wird noch klarer werden, wenn wir jenes Werk betrachten, das ganz andere Anforderungen stellte als die bisher berührten Reiseberichte, nemlich die oben genannte Geschichte des Inkareiches.

III

Sarmiento's Geschichte des Inkareiches in Peru.

An demselben 1. März, an welchem der Vicekönig Francisco de Toledo in Cuzco die (S. 7) erwähnte Relacion sumaria ausfertigte, mit welcher er die Berichte über die Zeugenverhöre von 1570—1572 an den König abgehen ließ, unterzeichnete er auch einen Bericht, mit dem er 4 Gemälde an den König sandte (gedr. von Jiménez de la Espada zum größten Theile in Tres Relaciones S. xix—xxii; daraus ein Stück in Informaciones S. 257/9). Beigegeben war ein Notariatsinstrument, wonach am 14 Januar 1572 etwa 37 genannte Peruaner und am 17 Januar 5 gelehrte Spanier die Richtigkeit dieser 4 Gemälde eidlich bekräftigt haben (gedr. von Jiménez d. l. Esp., Informaciones S. 244—257). Diese Ge-

1) Dieser Bericht von 1589 ist 1866 gedruckt in Coleccion de documentos ined., rel. al descubrimiento V 286—419. Ein kurzer Auszug aus diesem Bericht und ein ausführlicher aus dem Bericht von 1580 ist schon zu finden in Argensola's Conquista de las islas Malucas etc. 1609; vgl. den Index unter 'Pedro' und unter 'Sarmiento'.

mälde 'estan fechos para enviar á S. M., de la decedencia é orígen de los Ingas, y de cómo tiránicamente sujetaron á los naturales destos reinos'. Die Eingeborenen erkannten als wahrheitsgetreu an 'todo lo que estaba escripto y pintado en los dichos cuatro paños, así de los bultos de los Ingas, como de las medallas de sus mujeres é ayllos, é la historia de las cenefas de lo que sucedió en tiempo de cada uno de los Ingas, y la fábula y notables que van puestos en el primer paño, quellos dicen de Tambotoco, y las fábulas de las creaciones del Viracocha que van en la cenefa del primer paño por fundamento y principio de la Historia'. Dagegen enthielten sie sich eines Urtheiles über 'lo ques declaracion y prevencion para inteligencia de la Historia y los rumpos y vientos para la demarcacion de los sitios de los pueblos, ques puesto por el capitan Pedro Sarmiento'. Sarmiento hatte also den geographischen Theil dieser Gemälde entworfen und mit Worten erklärt. Daß er, der Cosmografo general destos reynos, auch die geschichtlichen Angaben in Worte gefaßt hatte, ergibt der Zusammenhang der Thatsachen.

In dem erwähnten Notariatsinstrument wird bezeugt, der geschichtliche Text der Gemälde sei 'conforme á la Historia general, que de los dichos Ingas el capitan Pedro Sarmiento ha fecho por las memorias, informaciones y relaciones destos dichos testigos y otros muchos indios principales. Sarmiento beruft sich in dem Bericht an den König (Cuzco 4 März 1572, bei Jiménez Tres Relaciones S. xxiv) auf dieses sein Werk mit den Worten 'como en la Historia de los Ingas del Perú verá V. M.', und weiterhin (S. xxvi) erklärt er, auf der großen Inspectionsreise habe er 1570—1572 den Vicekönig begleitet 'dando trazas en las reducciones de los indios conforme al antiguo y moderno sitio, sacando la descripcion particular de todo y haciendo la Historia de los Yngas é prosiguiendo por otras cosas tocantes á dicha visita'. In dem Berichte vom 15 Sept. 1589 über seine Schicksale von 1581—1588 erzählt Sarmiento einen Streit mit Diego Flores (Coleccion d. doc. rel. al descubr. V 302); Flores erklärte, er kenne kein Recht, auf das hin der König von Spanien den Titel eines Königs von Indien führe; Sarmiento brachte viele Gründe vor 'y otras muchas más que yo averigué cuando hice la probanza en el Pirú de las behetrias antiguas de aquellas partes y tiranía de los Incas dellas, de que invié á V. M. historia antigua por escripto y pintura por mano del virey D. Francisco de Toledo . . año 1572'.

Jiménez, welcher die Nachrichten über diese Bilder und über

Sarmiento's Geschichte des Inkareiches mit besonderer Sorgfalt zusammengestellt hat (Tres Relaciones S. XXII—XXVIII), erklärt selbst, daß wie die Bilder so auch das Geschichtswerk bis jetzt nicht wieder aufgefunden seien und *als für immer verloren angesehen werden müßten.*

Die Freunde dieser Wissenszweige werden mit Freude vernehmen, daß das besprochene Werk nicht verloren ist. Sarmiento's Geschichte der Inka von Peru liegt in der Göttinger Bibliothek, und zwar nicht in einem Auszuge oder in einer oft unsichern Abschrift, sondern in dem Originale.

Der Einband von rother Seide, 3 blattgroße Wappen, unter der Vorrede die offenbar eigenhändige Unterschrift: el capitā p sarmi' degāboa, am Schlusse unter der Beglaubigungsurkunde die eigenhändigen Unterschriften El doctor Loarte und Alvaro Ruiz Denabamuel zeigten mir, als ich die Handschrift zuerst in die Hand bekam, daß ich ein Original vor mir hatte. Wahrscheinlich ist es das an den König Philipp geschickte Exemplar [1]). Als 1785 die berühmte Bibliothek Abraham Gronov's versteigert werden sollte, wurde auch diese Handschrift ausgeboten (vgl. Bibliothecae Gronov. pars reliqua 1785 S. 7 no. 60) und von dem umsichtigen Vorstand der Göttinger Bibliothek ersteigert; hier ist jetzt diese Handschrift als Histor. 809 eingereiht. Die Handschrift besteht aus 8 Blättern Einleitung und 138 Blättern Text; die Blätter sind 29½ cm hoch, 20 cm breit und mit je 28 Zeilen ziemlich eng beschrieben. Das Ganze ist von einem Schreiber rein geschrieben, allein durchcorrigirt und hie und da mit Zusätzen versehen, welche jedesmal der Notar Navamuel beglaubigt hat.

Bl. I^{a} ist gefüllt mit dem Wappen von Castilien und Leon, Bl. III^{b} mit dem spanischen Königswappen; beide Wappen stehen zwischen Säulen und sind umgeben von allegorischen Darstellungen des Mare Atlanticum und des Mare eoum und dem (auf Bl. I mit Gold geschriebenen) Distichon: Barbarici fasces contremunt (so) stegma Philippi, Cui Tagus et Ganges servit et antipodes.

Bl. IV—VIII enthalten die Cuzco 4 März 1572 datirte und von Sarmiento eigenhändig unterzeichnete Vorrede an den König Philipp, worin besonders der Vicekönig Francisco de Toledo ge-

1) Der Einband ist jetzt erneuert worden. Dabei fand sich unter der rothen Seide ein anderer Einband von gepreßtem grünem Leder und darin 4 Blätter eines Commentars zum Decretum Gratiani 14/15. Jahrh. (jetzt Cod. Jurid. 160^{b}) nebst vielen Stücken eines Druckes ähnlichen Inhalts; demnach ging die Handschrift Sarmientos im Umschlag nach Spanien und wurde erst da für den König gebunden.

lobt und der Anspruch Philipps auf den Titel eines Königs von Peru begründet wird.

Bl. II[a] enthält zwischen Ornamentrand in Zierschrift den Titel: Segunda parte de la hisstoria general llamada yndica, la qual por mandado del ex[mo] S. don Fran[co] de Toledo virrey gobernador y cap[t] general de los reynos del Piru y mayordomo de la casa real de Castilla compuso el cap[t] P[o] Sarmiento de Gamboa. Der Titel 'parte segunda' wird klar durch den Anfang der Geschichte selbst, die 'Division de la historia' auf Bl. 1: Esta general historia que por mandado del . . Fran[co] de Toledo . . yo tome a mi cargo, sera divisa en tres partes. La primera sera historia natural destas tierras, por que sera particular description dellas, que contendra maravellosos hechos de naturaleza, y otras cossas de mucho provecho y gusto. La qual quedo acabando para que tras esta se embie a V. mag. Puesto que debiera yr antes, la segunda y tercera ynformaran de los pobladores destos reynos, de las hazañas dellos, en esta manera: En la segunda parte que es la presente se escribiran los antiquissimos y primeros pobladores desta tierra yn genere (Bl. 1—11[a]), y descendiendo a particularidades escribire la terrible y envegecida tirania de los yngas Capacs destos reynos hasta el fin y muerte de Guascar ultimo de los yngas (Bl. 11[b]—131). La tercera y ultima parte sera de los tiempos de los Hespañoles y sus notables hechos en los descubrimientos y poblaciones deste reyno y otros contingentes a el, por las edades de capitanes, governadores y virreyes, que en ellos an sido hasta el año presente de 1572. Demnach hatte Sarmiento ein großes Werk geplant, das ebenso eingetheilt sein sollte, wie das Werk des Cieza de Leon; 1572 hatte er nur den 2. Theil vollendet, und, da weder er noch Andere des 1. oder des 3. Theiles gedenken, so scheinen diese niemals abgefaßt worden zu sein.

Der einleitende Theil (Bl. 1—11) gibt besonders Discription de la isla Atlantica antigua, anknüpfend an die damals viel erörterten Stellen des Plato. Der Haupttheil beginnt Bl. 11 mit dem Abschnitt 'Fabula del origen destos barbaros yndios del Piru segun sus opiniones ciegas' und schließt mit dem Abschnitt (Bl. 130[b]—131[a]) 'Computacion sumaria del tiempo que duraron estos yngas del Piru'.

Blatt 132[a] ist gefüllt mit einem Wappen (wohl des Francisco de Toledo) und 2 Distichen, die beginnen 'Maxima Toledi proregis gloria crevit'. Bl. 133—138 enthalten mit anderer Schrift und unter dem Titel 'Fee de la provanca y verificacion desta historia' eine Notariatsurkunde, daß 'el cap. Pedro Sarmiento cosmografo general destos reynos del Piru' am 29 Februar 1572 den Vice-

könig gebeten habe, die Wahrheit der Angaben in seiner Historia bezeugen zu lassen, und daß dann 42 Zeugen, deren Namen, Herkunft und Alter angegeben sind, die Richtigkeit der Angaben bestätigt hätten. Diese Urkunde ist eigenhändig unterzeichnet von El doctor Loarte (vgl. Coleccion d. doc. rel. al desubr. V 486) und von dem Notar Alvaro Ruiz Denavamuel, welcher viele der oben genannten Aktenstücke von 1571/2 ausgefertigt hat.

Der Wortlaut dieses Geschichtswerkes wird von Professor R. Pietschmann veröffentlicht werden; ich gehe also hier nicht darauf ein. Nur das will ich berühren, was Sarmiento über den oben besprochenen, für jeden Geschichtsforscher interessanten Punkt, über seine Quellen der altperuanischen Geschichte, selbst vorbringt. Natürlich mußte auch er, wie alle Berichterstatter, aus der einzigen Geschichtsquelle, den Erzählungen der Eingebornen, schöpfen. Er erhielt dieselben allerdings in besonderer Form; er war ja gewiß bei den oben (S. 7) erwähnten 1570/2 abgehaltenen amtlichen Verhören auserlesener und beeidigter Eingeborenen zugegen gewesen und die notariel aufgenommenen Aussagen derselben lagen ihm vor. Doch hat er für die ihm gewordene Aufgabe natürlich auch sonstige Erkundigungen bei den Eingebornen eingezogen.

Dem Einwurf, daß die Berichte der Eingeborenen doch überhaupt sehr unzuverlässig seien, antwortet Sarmiento (Bl. 19/20) zunächst: Para suplír la falta de letras tenian estos barbaros una curiosidad muy buena y cierta, y era que unos a otros padres a hijos se yban refiriendo las cosas antiguas pasadas hasta sus tiempos ripitiendoselas muchas vezes como quien lee lection en catedra haziendo les repetir las tales lectiones historiales a los oyentes, hasta que se les quedasen en la memoria fixas, y asi cadauno a sus decendientes yba comunicando sus annales por esta horden dicha (.) para conservar sus historias y hazañas y antiguedades y los numeros de las gentes pueblos y provincias dias meses y annos batallas muertes destruyciones fortalezas y cinches y finalmente las cossas mas notables que consisten en numero y cuerpo notavan las y agora las notan en unos cordeles aque llaman quipo, que es lo mesmo que dezir racional o contador (.) en el qual quipo dan ciertos nudos como ellos saben por los quales y por las diferencias de las colores distinguen y anotan cada cosa como con letras (.) es cosa de admiracion ver las menudencias que conservan en aquestos cordelejos de los quales ay maestros como entre nos otros del escrevir. Diese Angaben stimmen ziemlich mit dem überein, was die besten der übrigen spanischen Quellen

berichten: doch ist bemerkenswerth, daß nach Sarmiento mit dem Quipu Zahlen und sinnlich wahrnehmbare Dinge, nicht Begriffe aufgezeichnet werden konnten.

Neu dagegen und eigenartig ist, was Sarmiento berichtet, indem er weiter fährt: y de mas desto avia y aun agora ay particulares historiadores destas naciones que era oficio que se eredava de padre a hijo(.) Allego se a esto la grandisima diligencia del Pachacuti Ynga Yupangui noveno ynga, el qual hizo llamamiento general de todos los viejos historiadores de todas las (Bl. 20 b) provincias que el subjeto y aun de otras muchas mas de todos estos reynos y tubo los en la ciudad del Cuzco mucho tiempo exsaminandolos sobre las antiguedades origen y cosas notables de sus pasados destos reynos(.) y despues que tubo bien averiguado todo lo mas notable de las antiguedades de sus historias, hizo lo todo p i n t a r por su horden en t a b l o n e s g r a n d e s y deputo en las casas del sol una gran sala adonde las tales tablas, que guarnesadas de oro estavan, estubiesen como nuestras librerias y constituyo doctores que supiesen entenderlas y declararlas y no podian entrar donde estas tablas estavan sino el ynga o los historiadores sin expresa licencia del ynga(.) y desta manera se vino averiguar todo lo de sus pasados y aquedar tan manual a toda suerte de gentes que el dia de oy los yndios menudos y los mayores generalmente lo saben, aunque en algunas cosas tengan varias opiniones por particulares yntereses. Ebenso bestätigen in dem Notariatsinstrument (Bl. 137) die Eingebornen, que Pachacuti Ynga Yupangui noveno ynga avia averiguado la ystoria de los otros Yngas que avian sido antes del y pintado la en unos tablones, dedonde tam bien lo avian aprendido los dichos sus padres y pasados'.

Für diese merkwürdige Angabe finde ich nur éinen andern Zeugen. Cristoval de M o l i n a hat zwischen 1570 und 1584 einen werthvollen Bericht über die Sagen und religiösen Gebräuche der Inka verfaßt, welcher in der Sammlung der Hakluyt Society 1873 von Markham übersetzt worden ist (An account of the fables and rites of the Yncas). Er sagt (S. 4): these people had no knowledge of writing. But in a house of the Sun called Poguen Cancha, which is near Cuzco, they had the life of each one of the Yncas, with the lands they conquered, painted with figures on certain boards, and also their origin. Among these paintings the following fable was represented', und nun wird eine ziemlich umständliche Sage erzählt. Dies Zeugniß des Molina ist nicht aus Sarmiento abgeschrieben.

Es liegt kein Grund vor zu bezweifeln, daß in den letzten Jahrhunderten des Inkareiches eine solche Sammlung von Bildern zur peruanischen Geschichte wirklich vorhanden gewesen ist. Die Erzählungen über eine solche Sammlung haben gewiß den Gedanken geweckt, die oben erwähnten im Jahre 1572 an König Philipp geschickten 4 Tafeln mit erläuterndem Texte anzufertigen. Von diesen selbst oder von Wandteppichen, die nach ihnen gefertigt sind, hat sich bis jetzt keine Spur gefunden, und in wie weit das Titelblatt von Herrera's 5. Decade oder die sonst vorkommenden Bilder der Inka auf jene 4 Tafeln zurückgehen, ist noch eine dunkle Sache (vgl. Winsor's History I 228 267/8). Die sachkundigen Erklärer jener historischen Bilder, welche aber ihre Kenntnisse ziemlich geheim halten mußten, passen zu Anderem, was uns berichtet ist. Diejenigen, welche die Königslieder auswendig wußten, durften nach Cieza's Bericht diese Lieder auch nur bei besonderen Festlichkeiten vortragen; sonst verfielen sie hoher Strafe. Demnach brauchen wir an der Hauptsache dessen, was Sarmiento über diese andere Quelle für die Geschichte des Inkareiches berichtet, nicht zu zweifeln.

Ein hochbegabtes Volk hat in herrlicher Natur ein mächtiges wohlgeordnetes Reich geschaffen und eine wechselvolle Geschichte durchlebt: allein all das liegt für uns so zu sagen in den Wolken: wir wissen davon nur das, was die Eingeborenen den Spaniern erzählt haben und was wiederum von diesen Etliche aufgeschrieben haben. Greifbare Beweise von der wirklichen Existenz jener schönen und großen Vergangenheit geben die mächtigen Baudenkmale und Straßen und all die Tausende von Gegenständen des täglichen Gebrauches, welche aus der Erde gegraben sind und jetzt auf das Beste veröffentlicht werden. Allein diese Dinge sind nicht mehr werth als etwa die Kleider im Verhältniß zum Menschen selbst; sie erhalten erst Gehalt und Werth, wenn wir von dem geistigen Schaffen und der Geschichte jener Zeiten einige Vorstellung haben. Deßhalb ist es so erfreulich, daß in Sarmiento's Schrift ein neuer Zeuge für jene dunkeln Zeiten gewonnen ist. Um so eher wird die Hauptaufgabe in Angriff genommen werden können, die Berichte aller spanischen Zeugen zusammenzustellen, kritisch zu sichten und zu versuchen, ob in den Erzählungen der Peruaner noch Sage und Geschichte einigermaßen geschieden und so die Vergangenheit jenes liebenswürdigsten amerikanischen Volkes in helleres Licht gestellt werden kann.

Thermodynamik des Turmalins und mechanische Theorie der Muskelkontraktion.

Von

Eduard Riecke.

Wenn ich in dem dritten Theile der folgenden Mittheilung die Principien der Mechanik und Thermodynamik auf ein Problem in Anwendung bringe, dessen Untersuchung eine Aufgabe der physiologischen Forschung bildet, so wird es nothwendig sein, diesem Unternehmen ein paar Worte zur Erklärung und Entschuldigung voranzuschicken.

Die Untersuchungen über die elektrischen Eigenschaften der Krystalle, insbesondere des Turmalins, mit welchen ich mich längere Zeit hindurch beschäftigt hatte, haben für mich durch die gemeinsam mit Voigt ausgeführte Bestimmung der piëzoelektrischen Konstanten des Quarzes und Turmalines [1]) und durch meine Abhandlung über die Molekulartheorie der elektrischen Erscheinungen [2]) einen gewissen Abschluß gewonnen. In der Zwischenzeit hatte nun G. E. Müller eine Theorie der Muskelkontraktion [3]) veröffentlicht, welcher die Annahme einer pyroelektrischen Erregbarkeit von krystallinischen Elementen der Muskelsubstanz zu Grunde lag. In dieser Beziehung zu meinen eigenen Studien lag für mich der Reiz einer Prüfung der Müller'schen Theorie. Dabei haben sich Resultate ergeben, welche für die Beurtheilung der experimentellen Thatsachen der Muskelphysiologie vielleicht nicht ohne Werth sind. Ueber das Ziel der Untersuchung, soweit sie sich auf das Verhalten des gereizten Muskels bezieht, schicke ich noch eine Bemerkung voraus. Gegen die Annahme Müllers von einer pyroelektrischen Erregbarkeit der Muskelelemente lassen sich Einwände erheben, welche ich vorerst nicht zu beseitigen vermag. Es wird daher besser sein, von der Frage nach dem Ursprung der kontrahirenden Kräfte ganz abzusehen und sich zu beschränken auf die Frage nach den Bewegungs- und Wärmeerscheinungen des Muskels bei gegebenen Kräften. Zu ihrer Lösung würden die Principien der Mechanik und Thermodynamik hin-

1) Riecke u. Voigt, Die piëzoelektrischen Constanten des Quarzes und Turmalins. Annal. d. Phys. 1892. Bd. XLV. p. 523.

2) Riecke, Molekulartheorie der piëzoelektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen. Goettinger Abhandlungen. Bd. 38. 1892.

3) G. E. Müller, Theorie der Muskelkontraktion. Th. I. Leipzig 1891.

reichen, wenn die chemische Natur der Muskelsubstanz eine unveränderliche wäre. Da dies nicht der Fall ist, so bleibt eine physikalische Theorie der Muskelkontraktion von vornherein unvollständig, selbst wenn die auf dem rein physikalischen Gebiete liegenden Schwierigkeiten sich besiegen lassen; immerhin schien es der Mühe werth, nachzusehen, wie weit die Anwendung physikalischer Gesetze führt, und der Erfolg hat die Erwartungen in manchem Punkte übertroffen.

Der erste Abschnitt der Arbeit ist einigen allgemeinen Betrachtungen über thermodynamische Systeme gewidmet; der zweite erläutert sie an dem Beispiel des Turmalins und giebt eine vollständige Uebersicht über seine thermodynamischen Eigenschaften mit numerischer Angabe der Konstanten. Im dritten vergleichen wir die elektrischen Erscheinungen des Turmalins mit dem Verhalten des gereizten Muskels, stellen ein System thermodynamischer Gleichungen auf, welches der verallgemeinerten Theorie Müllers entspricht, und prüfen die aus ihm fließenden Folgerungen an den Thatsachen der Beobachtung.

I. Ueber thermodynamische Systeme im Allgemeinen.

Nehmen wir den einfachsten Fall eines Körpers der dem allseitig gleichen Druck der umgebenden Luft unterworfen ist, so können wir seinen Zustand in jedem Augenblick durch Angabe seiner Temperatur Θ und seines Volumens v bestimmen; ebenso ist aber auch der Druck p eine den Zustand charakterisirende Größe und wir pflegen daher Volumen, Druck, Temperatur als Zustandsgrößen des Körpers zu bezeichnen. Wir schreiben außerdem jedem Körper eine bestimmte Energie E zu, welche als eine Funktion der Zustandsgrößen zu betrachten ist. Die Energie wächst durch Wärmezufuhr, sie nimmt ab, wenn der Körper dem äußeren Druck entgegen eine Arbeit leistet, so daß

$$1) \qquad dE = A\,dQ - p\,dv.$$

Dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie zu Folge ist die während eines sehr kleinen Zeitraumes zugeführte Wärme $dQ = \Theta dU$, wo Θ die absolute Temperatur und dU den Zuwachs der Entropie, einer neu einzuführenden Eigenschaft des Körpers, bezeichnet. Ist die Energie als Funktion der Zustandsgrößen gegeben, so gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial U} = A\,\Theta \text{ und } \frac{\partial E}{\partial v} = -p.$$

Man erhält also 2 Gleichungen zwischen den vier Größen v, p, Θ, U und daraus folgt, daß zwei davon zur Bestimmung des Zustandes vollkommen ausreichend sind. Eine in vielen Fällen bequemere Form der Gleichungen ergiebt sich, wenn man an Stelle der gesammten Energie die freie Energie einführt.

$$F = E - A\Theta U. \tag{2}$$

Die Abnahme der freien Energie ist bei konstanter Temperatur gleich der von dem Körper geleisteten Arbeit; allgemein wird:

$$dF = -A\,U d\Theta - p\,dv$$

$$AU = -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial v}. \tag{3}$$

Gehen wir über zu der Betrachtung eines elastischen Körpers von prismatischer Form, welcher irgend welchen äußeren Kräften unterworfen ist, so wird auch hier der Zustand einerseits abhängig sein von der Temperatur, andererseits von den räumlichen Verhältnissen; in dem vorhergehenden Beispiele waren diese characterisirt durch die Angabe einer einzigen Größe, des Volumens. In dem Falle eines irgend wie deformirten Prismas sind sie durch 6 Größen bestimmt, die Verlängerungen der 3 Kanten, die Verschiebungen der 3 Winkel. Jeder dieser 6 Verschiebungsgrößen entspricht ein besonderer Druck, so daß die bei einer partiellen Verschiebung geleistete Arbeit gleich dem Produkt aus Verschiebung und zugehörigem Drucke ist. Bezeichnet man die Verschiebungsgrößen und Drucke in der üblichen Weise, so hat man für den Zuwachs der Energie:

$$dE = A\Theta dU - X_x dx_x - Y_y dy_y - Z_z dz_z - Y_z dy_z - Z_x dz_x - X_y dx_y$$

für den Zuwachs der freien Energie:

$$dF = -AU d\Theta - X_x dx_x - Y_y dy_y - Z_z dz_z - Y_z dy_z - Z_x dz_x - Y_y dx_y \tag{4}$$

Hieraus folgt:

$$AU = -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \quad X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \quad Y_y = -\frac{\partial F}{\partial y_y}, \quad Z_z = -\frac{\partial F}{\partial z_z}, \tag{5}$$
$$Y_z = -\frac{\partial F}{\partial y_z}, \quad Z_x = -\frac{\partial F}{\partial z_x}, \quad X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}.$$

Wir erhalten 7 Gleichungen zwischen den 14 Zustands-Größen Θ, U, $X_x \ldots X_y$, $x_x \ldots x_y$; der Zustand des Körpers ist somit durch 7 von ihnen vollständig bestimmt.

An die Gleichungen 3 und 5 knüpft sich noch eine wichtige Bemerkung. Da die freie Energie eine Funktion aller der Größen

ist, welche zur Bestimmung des Zustandes nothwendig sind, so gilt gleiches von ihren Differentialquotienten. In den Gleichungen 3 ist somit die Entropie ebenso eine Funktion der Temperatur wie des Volumens, der Druck ebenso abhängig von dem Volumen wie von der Temperatur. In den Gleichungen 5 sind die Drucke Funktionen der Verschiebungen und der Temperatur; gleiches gilt von der Entropie; da ferner die Wärmemenge, welche dem Körper während einer sehr kleinen Zustandsänderung zugeführt wird, gleich dem mit der absoluten Temperatur multiplicirten Zuwachs der Entropie ist, so wird sie gleichfalls ebenso von der Temperaturerhöhung wie von den Verschiebungen abhängen.

In den beiden vorhergehenden Beispielen können wir den Zustand des Körpers bestimmen durch zwei wesentlich verschiedene Klassen von Zustandsgrößen, Temperatur einerseits, Verschiebungen andererseits. Ein komplicirteres System wird gebildet von einer Platte, welche aus einem Turmalin senkrecht zu der Axe herausgeschnitten ist. Bei ihr bestehen außer den elastischen Verschiebungen noch elektrische Polarisationen in den kleinsten Teilchen des Krystalles; diese sind bestimmt durch ihre Richtung und Größe und haben daher den Charakter einer Richtungsgröße oder eines Vektors; sie sind gegeben durch die Projektionen des Vektors auf 3 zu einander senkrechte Koordinatenaxen, die Komponenten des elektrischen Momentes, α, β, γ. Den elektrischen Verschiebungen lassen wir elektrische Kräfte A, B, Γ entsprechen, so daß das Produkt aus einem Momente und dem Zuwachs der entsprechenden Kraft gleich der bei der Verschiebung geleisteten Arbeit wird. Dann ergiebt sich für den Zuwachs der freien Energie:

$$6)\quad dF = -AUd\Theta - X_x dx_x - \cdots - X_y dx_y - \alpha dA - \beta dB - \gamma d\Gamma.$$

Hieraus folgen die 10 Gleichungen

$$AU = -\frac{\partial F}{\partial \Theta},\quad X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \cdots X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y},$$

$$\alpha = -\frac{\partial F}{\partial A},\quad \beta = -\frac{\partial F}{\partial B},\quad \gamma - \frac{\partial F}{\partial \Gamma}.$$

Entropie und Wärmezufuhr, elastische Drucke, elektrische Momente sind daher nicht blos von den ihnen eigentlich adäquaten Veränderungen, von Temperatur, elastischer Deformation, elektrischer Kraft abhängig; vielmehr ist jede dieser Größen zugleich abhängig von allen übrigen Veränderlichen. Der Turmalin unterscheidet sich von den früher besprochenen Systemen dadurch, daß bei ihm drei verschiedene Erscheinungen miteinander verbunden

erscheinen, Wirkungen der Wärme, elastische und elektrische Vorgänge. Die Temperaturerhöhung des Turmalins hängt nicht allein von Wärmezufuhr und elastischer Deformation, sondern auch von den elektrischen Kräften ab. Ebenso die elastischen Drucke nicht allein von den elastischen Deformationen und der Temperatur, sondern auch von den elektrischen Kräften. Endlich die elektrischen Momente von den elektrischen Kräften, den elastischen Verschiebungen und von der Temperatur.

In vielen Fällen kann man die freie Energie eines thermodynamischen Systems in eine Reihe entwickeln, welche nach den Potenzen der Zustandsgrößen fortschreitet. Unter dieser Voraussetzung werde der Zustand ähnlich wie bei dem Turmalin bestimmt durch die Temperatur, durch die Verschiebungen $p_1, p_2 \ldots p_\iota$, welche bei einer ersten Klasse von Erscheinungen auftreten, die Kräfte $Q_1, Q_2 \ldots Q_k$, auf welchen eine zweite Erscheinungsklasse beruht; es sei dann der Zuwachs der freien Energie:

$$dF = -AUd\Theta - \sum_\iota P_\iota dp_\iota - \sum_k q_k dQ_k, \tag{7}$$

somit

$$AU = -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \qquad P_\iota = -\frac{\partial F}{\partial p_\iota}, \qquad q_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}$$

Wir setzen:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots \tag{8}$$

wo F_1, $F_2 \ldots$ homogene Funktionen erster, zweiter ... Ordnung der Veränderlichen Θ, p_ι und Q_k sind und erhalten dementsprechend:

$$\begin{aligned} AU &= -\frac{\partial F_1}{\partial \Theta} - \frac{\partial F_2}{\partial \Theta} - \frac{\partial F_3}{\partial \Theta} \cdots \\ P_\iota &= -\frac{\partial F_1}{\partial p_\iota} - \frac{\partial F_2}{\partial p_\iota} - \frac{\partial F_3}{\partial p_\iota} \cdots \\ q_k &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} - \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} - \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \cdots . \end{aligned} \tag{9}$$

Den Differentialquotienten von F_1 würden gewisse ein für allemal konstante Werthe von U, P_ι und q_k entsprechen; da die Beobachtungen nur über die Veränderungen dieser Größen Aufschluß geben, so können wir jene Konstanten gleich Null setzen, und unsere Reihe sogleich mit dem Gliede zweiter Ordnung F_2 beginnen. Die Differentialquotienten von F_2 aber sind homogene lineare Funktionen von Θ, p_ι und Q_k, welche sämmtliche Variabeln enthalten, sobald die Funktion F_2 sämmtliche Quadrate und doppelte Produkte der Variabeln enthält. Vereinfachungen der Gleichungen treten ein, sobald das eine oder andere jener Glieder fehlt.

Wenn wir gegen F_2 die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen können, so sind die U, P_i und q_k additive Eigenschaften des Systems. Beispielsweise erhalten wir den Druck P_i durch Addition der Drucke, welche den Aenderungen von Θ, p_i und Q_k einzeln genommen entsprechen.

Das dritte Glied der Reihe, F_3, giebt Veranlassung zur Entstehung von Theilen der Größen U, P_i und q_k, welche durch homogene Funktionen zweiter Ordnung der Θ, p_i und Q_k dargestellt sind. Diese neuen Glieder können neben den von F_2 herrührenden die Rolle kleiner Korrektionen spielen; man kann ihnen dann Rechnung tragen, indem man die in F_2 auftretenden Koëfficienten selbst wieder mit den Zustandsgrößen sich ändern läßt. Im Allgemeinen sind die neuen Glieder als neue selbständige Wirkungen zu betrachten, deren Eigenthümlichkeit darin liegt, daß sie von den Kombinationen der Veränderlichen Θ, p_i und Q_k zu zweigliedrigen Produkten abhängen.

Den doppelten Produkten entsprechen dabei Wirkungen, welche an das gleichzeitige Bestehen zweier verschiedener Bedingungen gebunden sind; beispielsweise elektrische Verschiebungen, die nur auftreten, wenn gleichzeitig elektrische Kräfte und elastische Deformationen oder elastische Deformationen zusammen mit einer Aenderung der Temperatur vorhanden sind. Es leuchtet ein, daß die von F_3 abhängenden Eigenschaften des Systems keine additiven sind.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergiebt sich, daß für die Beurtheilung eines thermodynamischen Systems zwei wesentlich verschiedene Dinge maaßgebend sein können. Einmal die Zahl der verschiedenartigen physikalischen Erscheinungen, welche bei dem System mit einander in Wechselwirkung treten; sodann die in der Reihenentwickelung der freien Energie auftretenden Glieder und insbesondere die Ordnung bis zu der sie zu verfolgen sind.

II. Thermodynamische Eigenschaften des Turmalins.

In der Reihenentwickelung der freien Energie führen wir an Stelle der absoluten Temperatur den Ueberschuß ϑ über eine bestimmte Normaltemperatur Θ ein; das gewöhnliche elastische Potential bezeichnen wir durch $2f$; bezogen auf die Hauptaxen des Turmalins ist:

$$\begin{aligned} 2f = {} & c_{11} x_x^2 + 2c_{12} x_x y_y + 2c_{13} x_x z_z + 2c_{14} x_x y_z \\ 13) \quad & + c_{11} y_y^2 + 2c_{13} y_y z_z - 2c_{14} y_y y_z + c_{33} z_z^2 \\ & + c_{44} y_z^2 + c_{44} z_x^2 + 2c_{14} z_x x_y + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} x_y^2. \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned} 2F = {} & 2f - r_1 A^2 - r_1 B^2 - r_3 \Gamma^2 - \frac{A \varepsilon c \vartheta^2}{\Theta} \\ 14) \quad & -2A\{\varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y\} - 2B\{\varepsilon_{15} y_z - \varepsilon_{22}(x_x - y_y)\} \\ & -2\Gamma\{\varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z\} - 2\vartheta(q_1 x_x + q_1 y_y + q_3 z_z) \\ & -2\vartheta(e_1 A + e_1 B + e_3 \Gamma). \end{aligned}$$

Dann ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{\partial f}{\partial x_x} - \varepsilon_{22} B + \varepsilon_{31} \Gamma + q_1 \vartheta \\ Y_y &= -\frac{\partial f}{\partial y_y} + \varepsilon_{22} B + \varepsilon_{31} \Gamma + q_1 \vartheta \\ 15) \quad Z_z &= -\frac{\partial f}{\partial z_z} \qquad\qquad + \varepsilon_{33} \Gamma + q_3 \vartheta \\ Y_z &= -\frac{\partial f}{\partial y_z} + \varepsilon_{15} B, \qquad Z_x = -\frac{\partial f}{\partial z_x} + \varepsilon_{15} A \\ X_y &= -\frac{\partial f}{\partial x_y} - \varepsilon_{22} A \\ \alpha &= r_1 A + \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y + e_1 \vartheta \\ \beta &= r_1 B + \varepsilon_{15} y_z - \varepsilon_{22}(x_x - y_y) + e_1 \vartheta \\ \gamma &= r_3 \Gamma + \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z + e_3 \vartheta \\ AU &= \frac{A \varepsilon c \vartheta}{\Theta} + q_1 x_x + q_1 y_y + q_3 z_z + e_1 A + e_1 B + e_3 \Gamma. \end{aligned}$$

Für die Wärmemenge, deren Zufuhr der Temperaturerhöhung ϑ entspricht, ergiebt sich hieraus

$$16) \qquad Q = \varepsilon c \vartheta + \frac{\Theta}{A}\{q_1 x_x + q_1 y_y + q_3 z_z + e_1 A + e_1 B + e_3 \Gamma\}.$$

c ist hiernach die specifische Wärme bei konstanter Form im konstanten elektrischen Felde.

Rühren die Deformationen $x_x, \ldots$ nur von einer gleichmäßigen Erwärmung des Turmalins her, so ist

$$x_x = y_y = a_1 \vartheta, \qquad z_z = a_3 \vartheta$$

und somit

$$\alpha = r_1 A \pm e_1 \vartheta, \quad \beta = r_1 B \pm e_1 \vartheta, \quad \gamma = r_3 \Gamma + (2a_1 \varepsilon_{31} + a_3 \varepsilon_{33}) \vartheta + e_3 \vartheta.$$

Die von mir ausgeführten Messungen pyroelektrischer Momente haben in Verbindung mit den gemeinschaftlich mit **Voigt** gemachten Bestimmungen piëzoelektrischer Konstanten gezeigt, daß e_3 innerhalb der Genauigkeitsgrenzen unserer Beobachtungen gleich Null gesetzt werden kann; die Konstanten e_1 müssen aus Symmetriegründen verschwinden, so daß die obigen Formeln übergehen in

$$\alpha = r_1 A, \qquad \beta = r_1 B, \qquad \gamma = r_3 \Gamma + (2 a_1 \varepsilon_{31} + a_3 \varepsilon_{33}) \vartheta.$$

Ein zweites System von Gleichungen erhält man, wenn man die Gleichungen 15) zur Berechnung der Verschiebungsgrößen benützt. Setzen wir

$$\begin{aligned} 2f' = {} & s_{11} X_x^2 + 2 s_{12} X_x Y_y + 2 s_{13} X_x Z_z + 2 s_{14} X_x Y_z \\ & + s_{11} Y_y^2 + 2 s_{13} Y_y Z_z - 2 s_{14} Y_y Y_z + s_{33} Z_z^2 \\ & + s_{44} Y_z^2 + s_{44} Z_x^2 + 4 s_{14} Z_x X_y + 2(s_{11} - s_{12}) X_y^2 \end{aligned}$$

so lauten die neuen Gleichungen:

$$17) \qquad \begin{aligned} x_x &= -\frac{\partial f'}{\partial X_x} - \delta_{22} B + \delta_{31} \Gamma + a_1 \vartheta \\ y_y &= -\frac{\partial f'}{\partial Y_y} + \delta_{22} B + \delta_{31} \Gamma + a_1 \vartheta \\ z_z &= -\frac{\partial f'}{\partial Z_z} + \delta_{33} \Gamma + a_3 \vartheta \\ y_z &= -\frac{\partial f'}{\partial Y_z} + \delta_{15} B, \qquad z_x = -\frac{\partial f'}{\partial Z_x} + \delta_{15} A \\ x_y &= -\frac{\partial f'}{\partial X_y} - 2 \delta_{22} A \\[1ex] \alpha &= \varrho_1 A - \delta_{15} Z_x + 2 \delta_{22} X_y \\ \beta &= \varrho_1 B - \delta_{15} Y_z + \delta_{22} (X_x - Y_y) \\ \gamma &= \varrho_3 \Gamma - \delta_{31} (X_x + Y_y) - \delta_{33} Z_z + f_3 \vartheta \\ AU &= \frac{A \varepsilon c' \vartheta}{\Theta} - a_1 X_x - a_1 Y_y - a_3 Z_z + f_3 \Gamma. \end{aligned}$$

Die Wärmezufuhr, welche der Temperaturzunahme ϑ entspricht, wird

$$18) \qquad Q = \varepsilon c' \vartheta - \frac{\Theta}{A} (a_1 X_x + a_1 Y_y + a_3 Z_z - f_3 \Gamma).$$

Zwischen den piëzoelektrischen Moduln δ und den piëzoelektrischen Konstanten ε bestehen die von **Voigt** entwickelten Beziehungen. Es ist ferner

Setzen wir $\vartheta = 0$ und lassen wir V von Null an zu allmählig größeren negativen Werthen wachsen, so wird die zu Anfang durch den Zug K erzeugte Dilatation kleiner, verschwindet,

$$\varrho_1 = r_1 + \varepsilon_{15}\delta_{15} + 2\varepsilon_{32}\delta_{32}$$
$$\varrho_3 = r_3 + 2\varepsilon_{31}\delta_{31} + \varepsilon_{33}\delta_{33}$$
$$f_3 = 2\varepsilon_{31}a_1 + \varepsilon_{33}a_3.$$

Wir denken uns nun eine Turmalinplatte von unbegrenzter Ausdehnung senkrecht zu der Axe geschnitten; die z-Axe des Coordinatensystemes laufe von dem antilogen zu dem analogen Pole; die elastischen Drucke seien gleich Null mit Ausnahme von Z_z, die Kraftlinien des elektrischen Feldes parallel der z-Axe. Die vorhergehenden Gleichungen werden:

$$\begin{aligned} x_x = y_y &= -s_{13}Z_z + \delta_{31}\Gamma + a_1\vartheta \\ z_z &= -s_{33}Z_z + \delta_{33}\Gamma + a_3\vartheta \\ \gamma &= \varrho_3\Gamma - \delta_{33}Z_z + f_3\vartheta \\ Q &= \varepsilon c'\vartheta - \frac{a_3\Theta}{A}Z_z + \frac{f_3\Theta}{A}\Gamma. \end{aligned} \tag{19}$$

Die numerischen Werthe der Koëfficienten sind in *cm*, *g*, *sec.* die folgenden:

$$s_{33} = 0{,}624 \times 10^{-12} \qquad s_{13} = -0{,}016 \times 10^{-12}$$
$$\delta_{33} = 5{,}71 \times 10^{-8} \qquad \delta_{31} = 0{,}88 \times 10^{-8}$$
$$a_1 = 7{,}73 \times 10^{-6} \qquad a_3 = 9{,}37 \times 10^{-6}$$
$$f_3 = 1{,}34 \qquad \varrho_3 = 0{,}403$$
$$\varepsilon = 3{,}116 \qquad c' = 0{,}245 \qquad A = 4{,}18 \times 10^7.$$

Das elektrische Feld, in dem sich der Turmalin befindet, bezeichnen wir als ein positives, wenn die Kraftlinien in der Richtung der positiven z-Axe, also vom antilogen Pol zum analogen laufen.

Wir wenden die Gleichungen 19) noch auf zwei speciellere Aufgaben an.

1. Die beiden Endflächen der Turmalinplatte seien mit Stanniolbelegen versehen; die untere antiloge Fläche werde auf ein Potential von V Volt, die obere analoge auf das Potential 0 gebracht. Jedes cm^2 der Oberfläche werde einem Zuge von K Megadynen ($= 10^6$ Dynen $= 1{,}02$ Kilogrammgewichten) unterworfen, die Temperatur um ϑ Grade erhöht. Nach elektrostatischem Maaße ist

$$\Gamma = 0{,}333 \times 10^{-2}\, V/d$$

wenn d die Dicke der Turmalinplatte. Somit ergiebt sich:

$$
20)\quad
\begin{aligned}
x_z &= -0{,}016\times 10^{-6}K + 0{,}293\times 10^{-10}V/d + 7{,}73\times 10^{-6}\vartheta\\
z_z &= 0{,}624\times 10^{-6}K + 1{,}903\times 10^{-10}V/d + 9{,}73\times 10^{-6}\vartheta\\
\gamma &= 0{,}134\times 10^{-2}V/d + 5{,}71\times 10^{-2}K + 1{,}34\vartheta\\
Q &= 0{,}764\vartheta + 0{,}651\times 10^{-4}K + 0{,}311\times 10^{-7}V/d.
\end{aligned}
$$

wenn $V = -3280\,Kd$, und geht dann in eine Kontraktion über. Setzen wir außer ϑ auch z_z gleich Null, so ergiebt sich für die Spannung, die zu Erhaltung einer konstanten Plattendicke erforderlich ist, der Werth

$$K = -3{,}046\times 10^{-4}V/d.$$

Gleichzeitig wird in der Volumeinheit eine Wärmemenge von $0{,}112\times 10^{-7}V/d$ Kalorieen entwickelt.

Wir können die Dicke der Platte auch gegenüber einer Aenderung der Temperatur konstant erhalten und zwar entweder durch eine Spannung oder durch Herstellung eines elektrischen Feldes. Im ersten Falle ergiebt sich

$$K = -15{,}6\,\vartheta$$

im zweiten

$$V = -5{,}11\times 10^{4}\,\vartheta d.$$

Für eine adiabatische Zustandsänderung gelten die Formeln:

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= -0{,}855\times 10^{-4}K - 0{,}408\times 10^{-7}V/d\\
x_z &= -(0{,}016\times 10^{-6} + 0{,}066\times 10^{-8})K\\
&\quad + (0{,}293\times 10^{-10} - 0{,}315\times 10^{-12})V/d\\
z_z &= (0{,}624\times 10^{-6} - 0{,}080\times 10^{-8})K\\
&\quad + (1{,}903\times 10^{-10} - 0{,}382\times 10^{-12})V/d\\
\gamma &= 0{,}134\times 10^{-2}V/d + (5{,}71\times 10^{-2} - 1{,}15\times 10^{-4})K.
\end{aligned}
$$

Bringen wir die Turmalinplatte bei konstanter Spannung in ein elektrisches Feld, dessen Kraftlinien vom antilogen Pole zu dem analogen laufen, so kühlt sie sich ab; gleichzeitig dehnt sie sich aus in der Richtung der Axe und senkrecht dazu. Machen wir das Potential V gleich Null, so erhalten wir die gewöhnlichen adiabatischen Zustandsänderungen, außerdem aber eine elektrische Polarisation in der Richtung der Axe.

Zu Erhaltung einer konstanten Plattendicke ist bei adiabatischer Zustandsänderung eine Spannung

$$K = -3{,}046\,(1-0{,}0007)\,10^{-4}\,V/d$$

erforderlich. Die Temperaturänderung ist:

$$\vartheta = -0{,}151\times 10^{-7}\,V/d.$$

2. Die Endflächen der Turmalinplatte seien isolirt. Es ist $\Gamma = -4\pi\gamma$, und es ergeben sich daher die Gleichungen

$$
21)\quad
\begin{aligned}
\gamma &= 0{,}944 \times 10^{-2}\, K + 0{,}221\, \vartheta \\
\Gamma &= -0{,}119\, K \qquad\quad - 2{,}783\, \vartheta \\
x_s &= -(0{,}016 \times 10^{-6} + 0{,}112 \times 10^{-8})\, K \\
&\quad + (7{,}73 \times 10^{-6} - 2{,}45 \times 10^{-8})\, \vartheta \\
z_s &= (0{,}624 \times 10^{-6} - 0{,}679 \times 10^{-6})\, K \\
&\quad + (9{,}73 \times 10^{-8} - 15{,}9 \times 10^{-8})\, \vartheta \\
Q &= 0{,}764\, \vartheta + (0{,}651 \times 10^{-4} - 0{,}011 \times 10^{-4})\, K.
\end{aligned}
$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Endflächen der Platte ausgedrückt in Volt ist:

$$35{,}7\, Kd + 835\, \vartheta d.$$

Die zur Erhaltung einer konstanten Plattendicke erforderliche Spannung

$$K = -15{,}6\,(1 - 0{,}0054)\, \vartheta.$$

Bei einer adiabatischen Aenderung des Zustandes wird:

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= -(0{,}855 \times 10^{-4} - 0{,}015 \times 10^{-4})\, K \\
x_s &= -(0{,}017 \times 10^{-6} + 0{,}065 \times 10^{-8})\, K \\
z_s &= (0{,}617 \times 10^{-6} - 0{,}078 \times 10^{-8})\, K \\
\gamma &= (0{,}944 \times 10^{-2} - 0{,}186 \times 10^{-4})\, K.
\end{aligned}
$$

Die mittleren dieser Formeln lassen die Aenderungen erkennen, welche die elastischen Konstanten durch den adiabatischen Verlauf der Deformation und die gleichzeitige elektrische Polarisation erfahren.

Reciprocitätssätze.

Die eine Reihe der Zustandsgrößen P_i und q_k ist durch die partiellen Differentialquotienten der freien Energie nach den entsprechenden Veränderlichen der anderen Reihe p_i und Q_k dargestellt worden. Aus den betreffenden Formeln folgen allgemein die Beziehungen:

$$\frac{\partial P_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial q_k}{\partial p_i}, \quad A\,\frac{\partial U}{\partial p_i} = \frac{\partial P_i}{\partial \Theta}, \quad A\,\frac{\partial U}{\partial Q_k} = \frac{\partial q_k}{\partial \Theta}.$$

Für den Turmalin insbesondere ergiebt sich aus den Gleichungen 15.

$$\frac{\partial Z_z}{\partial \Gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial z_z} = s_{33}, \quad \frac{A}{\Theta}\,\frac{\partial Q}{\partial z_z} = \frac{\partial Z_z}{\partial \vartheta} = q_3.$$

Ebenso aus den Gleichungen 17 oder 19.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial Z_z} = -\frac{\partial z_z}{\partial \Gamma} = -\delta_{33}, \quad \frac{A}{\Theta}\,\frac{\partial Q}{\partial Z_z} = -\frac{\partial z_z}{\partial \vartheta} = -a_3, \quad \frac{A}{\Theta}\,\frac{\partial Q}{\partial \Gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} = f_3.$$

Ein Druck Z_s in der Richtung der Axe erzeugt ein negatives Moment γ und dementsprechend im Innern der Platte ein positives elektrisches Feld; ein positives Feld Γ, bei dem die Kraftlinien vom antilogen Pol zum analogen gehen, erzeugt Dilatation in der Axen-Richtung. Umgekehrt entspricht einer Dilatation z_z ein positives Moment γ und ein negatives Feld im Innern der Platte; in einem positiven Feld ist zu Erhaltung der Plattendicke ein Druck in der Axen-Richtung nothwendig. Bringt man einen Turmalin bei konstanter Temperatur und konstantem Druck in ein positives elektrisches Feld, so wird er Wärme absorbiren.

Benutzt man als unabhängige Veränderliche z_z und γ, so ergiebt sich

$$\frac{\partial Z_s}{\partial \gamma} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial z_z} = \frac{\varepsilon_{33}}{r_3}$$

ebenso für γ und Z_z als unabhängige Veränderliche:

$$\frac{\partial z_z}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Gamma}{\partial Z_z} = \frac{\delta_{33}}{\varrho_3^{\prime}}.$$

Diese letztere Gleichung scheint in Verbindung mit $\frac{\partial \gamma}{\partial z_z} = \frac{\partial Z_z}{\partial \Gamma} = \varepsilon_{33}$ zu einem eigenthümlichen Cirkel zu führen[1]). Die Dilatation z_z erzeugt ein positives Moment γ, umgekehrt das Moment γ eine Dilatation z_z, so daß zwei sich wechselseitig steigernde Effekte vorzuliegen scheinen. Thatsächlich ist diese Auffassung nicht richtig, da die betreffenden Gleichungen auf der Anwendung verschiedener unabhängiger Veränderlicher beruhen. Man könnte sonst genau denselben Schluß bei den aus der Gasgleichung folgenden Beziehungen $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$, $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$ machen.

Die im Vorhergehenden besprochenen Reciprocitätssätze sind zum größten Theile bekannt. Sie ergeben sich aber aus der Gleichung der freien Energie, welche in diesem Sinne wohl zuerst von Duhem verwerthet wurde, einfacher als auf den von Lippmann und Pockels eingeschlagenen Wegen.

III. Theorie der Muskelkontraktion.

Beim Turmalin können wir im elektrischen Felde Erscheinungen hervorrufen, welche in gewisser Weise an die Vorgänge bei der Muskelkontraktion erinnern. Belasten wir eine senkrecht zur

1) Pockels, Neues Jahrbuch für Mineralogie, Beilage Band 7. 1890. p. 201.

Hauptaxe geschnittene Turmalinplatte mit einem Gewichte, so erleidet sie eine gewisse Verlängerung. Unterwerfen wir sie nun der Wirkung einer konstanten in der Richtung vom analogen zum antilogen Pole wirkenden elektrischen Kraft, so zieht sie sich zusammen und leistet dabei Arbeit. Gleichzeitig wird im Innern Wärme frei. Wir können andererseits durch Vermehrung des Zuges die Kontraktion verhindern und zwar würde bei einem Potentialgefälle von 1000 Volt auf das cm^2 ein Zug von etwa 300 g auszuüben sein. Auch hierbei wird Wärme frei, aber um $^2/_3$ weniger, als im vorhergehenden Falle. Durch rasches Anschwellen und Wiederverschwinden der elektrischen Kraft würden Bewegungen erzeugt, analog der elementaren Zuckung des Muskels.

Dabei würde beim Turmalin am Schlusse der Zuckung Spannung und Dilatation wieder genau dieselbe, wie zu Anfang und eine Arbeit nicht geleistet sein, es könnte also auch keine Erwärmung auftreten. Hier versagt also die Analogie zwischen Turmalin und Muskel.

Nach der Auffassung Müller's würde nun aber die Ursache der elektrischen Erregung nicht in einer von außen wirkenden elektrischen Kraft, sondern in einer Temperatursteigerung im Innern des Muskels liegen. Dementsprechend würde man als Analogon des Muskels den isolirten Turmalin betrachten können, dessen Zustand nur noch von Temperatur und Spannung abhängig ist. Aber nun ergiebt sich aus den Gleichungen 21, daß bei wachsender Temperatur der Turmalin sich ausdehnt, während der Muskel sich verkürzen muß; es ist also thatsächlich keine Analogie mehr vorhanden. Man kann zu einer neuen Analogie, welche aber nicht mehr experimentell zu realisiren ist, nur gelangen, wenn man den Konstanten des allgemeinen Gleichungssystems (19) wesentlich andere Eigenschaften beilegt. Zunächst ergiebt sich mit $\Gamma = -4\pi\gamma$ und mit $D_3 = 1 + 4\pi\varrho_3$

$$
\begin{aligned}
x_x &= -\left(s_{13} - \frac{4\pi\,\delta_{33}\,\delta_{31}}{D_3}\right) Z_z + \left(a_1 - \frac{4\pi f_3\,\delta_{31}}{D_3}\right)\vartheta \\
z_z &= -\left(s_{33} - \frac{4\pi\,\delta_{33}^2}{D_3}\right) Z_z + \left(a_3 - \frac{4\pi f_3\,\delta_{33}}{D_3}\right)\vartheta \qquad (22) \\
\frac{A}{\Theta}\,Q &= \left(\frac{A}{\Theta}\,\varepsilon c' - \frac{4\pi f_3^2}{D_3}\right)\vartheta - \left(a_3 - \frac{4\pi f_3\,\delta_{33}}{D_3}\right) Z_z
\end{aligned}
$$

Damit eine Temperaturerhöhung bei konstantem Druck Kontraktion in der Axenrichtung erzeugt, muß $\frac{4\pi f_3\,\delta_{33}}{D_3} > a$ sein.

Die Gleichungen 22 würden in der That einige Eigenthüm-

lichkeiten der Muskelbewegung wieder geben, allein auch sie schließen in dem Falle einer einfachen Zuckung jede bleibende Zunahme der Temperatur aus und bedürfen somit auf alle Fälle einer Ergänzung. Um zu einer solchen zu gelangen, gehen wir von einer etwas allgemeineren Betrachtung aus.

Was immer die Beschaffenheit der Muskelsubstanz sein mag, jedenfalls wird der Zustand des Muskels zu irgend einer Zeit durch Angabe gewisser Zustandsgrößen zu bestimmen sein. Als solche werden wir zu betrachten haben die elastischen Deformationen und die Temperatur; wir nehmen eine weitere Größe hinzu, welche den Charakter eines Vektors besitze und als tonisches Moment bezeichnet werde. Den Komponenten des tonischen Momentes lassen wir Komponenten einer tonischen Kraft entsprechen. Außerdem muß der Zustand des Muskels mindestens noch von einer Veränderlichen abhängen, da sonst bleibende Temperaturerhöhung als Folge einer Zuckung nicht möglich wäre. Wir wollen diese Größe in Anlehnung an die Theorie Müllers als Quellungsgrad bezeichnen, die entsprechende Kraft als den Quellungsdruck.

Durch Angabe der genannten Größen werden wir den Zustand, in welchem sich ein Muskel befindet, keineswegs vollständig beschreiben. Um den Verhältnissen der Wirklichkeit näher zu kommen, müßten wir den Muskel als ein Aggregat vieler verschiedener Körper betrachten, von denen jeder seine eigenen Zustandsgrößen besitzt. Es ist aber klar, daß eine solche Annahme zu einer hoffnungslosen Komplikation der Aufgabe führt und es bleibt also nichts übrig, als sich an das einfachste mögliche Schema zu halten und zu versuchen, ob dieses nicht wenigstens den gröberen und mehr äußerlichen Zügen der Erscheinungen gerecht zu werden vermag. Im Grunde ist ja auch das Verfahren, welches wir in der Physik der nicht organisirten Körper befolgen, hiervon nicht so ganz verschieden. Körper, welche nachweislich aus Aggregaten kleiner Krystalle bestehen, behandeln wir als Kontinua; gehen wir über das mikroskopisch Wahrnehmbare hinaus, so betrachten wir die Bewegungen der Molekeln nur in der kinetischen Theorie der Gase, während doch, wenn man sich einmal auf den atomistischen Standpunkt stellt, alle Erscheinungen in letzter Instanz von den Molekeln und ihrer chemischen Zusammensetzung abhängen müssen.

Als unabhängige Veränderliche, durch welche der Zustand des Muskels bestimmt wird, mögen nun im Folgenden elastische Verschiebungen, tonische Kräfte, Quellungsdruck und Temperatur betrachtet werden. Es muß dann dem Energieprincip zu

Folge eine Funktion dieser Veränderlichen existiren, durch deren Differentialquotienten die zweite Reihe der Zustandsgrößen, elastische Spannungen, tonische Momente, Quellungsgrad und Entropie gegeben wird. Diese Funktion denken wir uns entwickelt in eine Reihe, welche nach homogenen Funktionen zweiter, dritter Ordnung ... fortschreitet. In dieser Reihe werden wir uns im Allgemeinen beschränken auf die Glieder zweiter Ordnung; nur ein einziges Glied der dritten Ordnung möge noch berücksichtigt werden, um auch den von Müller gemachten Annahmen zu entsprechen. Müller denkt sich als Ursache der Kontraktion die wechselseitigen Anziehungen, welche die in gleichem Sinne polarisirten Disdiaklasten auf einander ausüben, d. h. er betrachtet die Kontraktion als eine Folge der Elektrostriktion. In den Ausdrücken für die elastischen Drucke erhalten wir Glieder, welche der Elektrostriktion entsprechen, wenn wir in der freien Energie ein Glied aufnehmen von der Form:

$$\begin{aligned}
&-(l_{11}A^2+l_{12}B^2+l_{13}\Gamma^2)x_x - 4l_{44}B\Gamma y_z\\
&-(l_{12}A^2+l_{22}B^2+l_{13}\Gamma^2)y_y - 4l_{44}\Gamma A z_x\\
&-(l_{13}A^2+l_{13}B^2+l_{33}\Gamma^2)z_z - 4l_{66}ABx_y
\end{aligned}$$

Analoge Terme werden wir auch in die Energie des Muskels einführen, wobei wir dann unter A, B, Γ die Komponenten der tonischen Kraft verstehen.

Die allgemeinen Formeln wollen wir vereinfachen durch die Annahme, daß ein elatischer Druck und eine tonische Kraft nur in der Längsrichtung des Muskels wirke. Wir brauchen dann auch die Formel, durch welche die Querkontraktion bestimmt wird, nicht weiter zu berücksichtigen; die in derselben auftretenden Konstanten sind von den in den übrigen Gleichungen enthaltenen verschieden und würden im Allgemeinen durch die Bedingung des konstanten Volumens zu bestimmen sein. Bezeichnen wir den Druck in der Richtung der Axe durch Z_z, die tonische Kraft durch Γ, die Temperatur durch ϑ, den Quellungsdruck durch Π, so ergeben sich für die Dilatation z_z, das tonische Moment γ, die Wärmemenge, welche dem Muskel bei seiner Zustandsänderung zugeführt wurde, und endlich den Quellungsgrad die Formeln:

$$\begin{aligned}
z_z &= -sZ_z+\delta\Gamma+a\vartheta+m\Pi-l\Gamma^2\\
\gamma &= \varrho\Gamma-\delta Z_z+f\vartheta+2l\Gamma Z_z\\
\frac{A}{\Theta}Q &= \frac{A}{\Theta}\varepsilon c\vartheta-aZ_z+f\Gamma-\lambda\Pi\\
\omega &= \varkappa\Pi+\lambda\vartheta+mZ_z.
\end{aligned} \tag{23}$$

In diesen Gleichungen ist s der Elasticitätskoefficient, a der Wärmeausdehnungskoefficient des Muskels; A das mechanische Aequivalent der Wärme, Θ die absolute Temperatur; ε Dichte und c specifische Wärme des Muskels; δ, m, l, ϱ, f, λ, $\varkappa$ sind gewisse neu einzuführende Konstante.

Die erste dieser Gleichungen wollen wir umformen, indem wir an Stelle von s den Elasticitätsmodulus $E = \frac{1}{s}$ und außerdem ein der inneren Reibung entsprechendes Glied einführen. Wir erhalten:

$$24)\qquad Z_z = -Ez_z - H\frac{dz_z}{dt} + E\delta\Gamma + Ea\vartheta + Em\Pi - El\Gamma^n$$

Wir knüpfen an diese Formel die Berechnung der Elasticität des Muskels im Ruhezustand und im Tetanus; sie ist im allgemeinen abhängig von der Belastung; es werden daher im Folgenden die Werthe der Elasticitätskoefficienten für die allmälig zunehmende Belastung und außerdem ihr Mittelwerth angegeben werden.

1. Elasticität des ruhenden Muskels.

Der auf den Muskel ausgeübte Zug betrage K Gramme; sein Querschnitt sei ω, die ursprüngliche Länge L, die Verlängerung λ; dann ist:
$Z_z = -\frac{K}{\omega}$, $z_z = \frac{\lambda}{L}$ und wenn K, K' zwei verschiedene Belastungen, λ und λ' die entsprechenden Verlängerungen:

$$E\omega = \frac{(K'-K)L}{\lambda'-\lambda}.$$

Aus Beobachtungen von Ed. Weber[1]) ergeben sich die folgenden zusammengehörigen Werthe von $K'-K$ und $E\omega$

$K'-K$	10—5	15—10	20—15	25—20	30—25
$E\omega$	211	234	264	301	703

Im Mittel

$$E\omega = 300.$$

---

1) Diese Beobachtungsdaten, ebenso wie die im Folgenden benutzten sind entnommen dem Buche von Fick „Mechanische Arbeit und Wärmeentwicklung bei der Muskelthätigkeit“. Leipzig 1882. Internationale wissenschaftliche Bibliothek. 51. Band.

Aus einer Beobachtungsreihe von Fick[1]:

$K'-K$	100—50	150—100	200—150	250—200
$E\omega$	840	1450	530	1600
$K'-K$	300—250	350—300		
$E\omega$	4000	1230		

Im Mittel: $E\omega = 1100$

Aus einer zweiten Beobachtungsreihe[2]) von Fick ergiebt sich:

$K'-K$	10—5	20—10	30—20	40—30
$E\omega$	390	630	1120	1450
$K'-K$	50—40	60—50	70—60	
	2470	2470	3530.	

Im Mittel:

$$E = 1170.$$

2. Elasticität des gereizten Muskels.

In Gleichung 24 setzen wir:

$$\delta\Gamma + a\vartheta + m\Pi - l\Gamma^{s} = -\tau/L$$

für $Z_s = 0$ ist dann:

$$z_s = -\tau/L$$

und daher τ die tetanische Verkürzung. Es ist ferner

$$Z_s = -E\left(z_s + \frac{\tau}{L}\right).$$

Bezeichnen wir die Verlängerung, welche der Muskel von dem Zustande der größten tetanischen Zusammenziehung aus erleidet, durch λ, so ist

$$z_s = -\frac{\tau - \lambda}{L}$$

und somit

$$Z_s = -E\frac{\lambda}{L}.$$

Aus den Beobachtungen Webers[3]) ergiebt sich:

$K'-K$	10—5	15—10	20—15	25—20	30—25
$E\omega$	176	117	111	81	84.

Im Mittel: $E\omega = 105.$

---

1) l. c. p. 21. 2) l. c. p. 113. 3) l. c. p. 20.

Aus Messungen von Fick, welche sich auf denselben Muskel beziehen, wie die erste von den im Vorhergehenden benutzten Beobachtungsreihen [1]).

$K'-K$	100–50	150–100	200–150	250–200
$E\omega$	760	760	690	730
$K'-K$	300–250	350–300		
$E\omega$	690	690		

Im Mittel

$$E\omega = 720.$$

3. Theorie der elementaren Zuckung.

Wenn man einen Muskel, den wir uns der Einfachheit halber ganz frei hängend denken, einem einmaligen elektrischen Schlage aussetzt, so sieht man ihn sich verkürzen und wieder verlängern; der ganze Vorgang vollzieht sich in der Zeit von etwa $^1/_{10}$ sec. Trägt man auf einer horizontalen Linie die Zeiten, senkrecht dazu die zugehörigen Verkürzungen ab, so entsteht eine Kurve, die in ihrem aufsteigenden Theile sanfter geneigt ist, als in dem absteigenden. Eine Zuckung des Muskels, bei der er sich mit konstanter Belastung frei verkürzen kann, nennen wir eine isotonische. Man kann auf der anderen Seite durch eine passende Steigerung und Wiederverminderung des auf den Muskel ausgeübten Zuges erreichen, daß seine Länge eine konstante bleibt. Eine in dieser Weise vor sich gehende Zuckung nennt man eine isometrische. Stellt man die den verschiedenen Zeiten entsprechenden isometrischen Spannungen graphisch dar, so erhält man eine Kurve, welche sehr steil ansteigt und ganz allmälig wieder herabsinkt, eine Kurve von ganz anderem Ansehen, als die durch die isotonische Verkürzung erzeugte.

Bezeichnen wir durch T die gesammte Zugkraft, welche wir aufwenden müssen, um in irgend einem Augenblicke der Zuckung die Verkürzung des Muskels zu verhindern, durch ω wie früher den Querschnitt des Muskels, so ist:

$$Z_s^0 = -\frac{T}{\omega}.$$

Setzen wir diesen Werth an Stelle von Z_s in Gleichung 24

1) l. c. p. 21.

und zugleich $s_s = 0$, so folgt:

$$E(\delta\Gamma + a\vartheta + m\Pi - l\Gamma^s) = -\frac{T}{\omega} \tag{25}$$

und

$$\omega Z_s = -E\omega s_s - H\omega\frac{ds_s}{dt} - T.$$

Die Gleichung für die isotonische Zuckung ergiebt sich nun in folgender Weise. Wir nehmen an, daß während derselben die Kontraktion über die ganze Länge des Muskels sich gleichmäßig vertheile; dann ist die Bewegung vollständig bestimmt durch die Strecke λ, welche das freie Ende des Muskels jeweilig nach oben hin zurückgelegt hat. Die zu bewegende Masse setzt sich zusammen aus der Masse des angehängten Gewichtes und der Masse des Muskels selbst. Eine hier nicht weiter auszuführende Rechnung zeigt, daß die letztere nur mit ihrem dritten Theile zu berücksichtigen ist; bezeichnen wir die so berechnete ganze Masse durch m, so wird

$$m\frac{d^2\lambda}{dt^2} = -\omega Z_s$$
$$= E\omega s_s + H\omega\frac{ds_s}{dt} + T.$$

Ist L die ursprüngliche Länge des Muskels, so ist $s_s = -\frac{\lambda}{L}$ und daher

$$\frac{E\omega}{L}\lambda + \frac{H\omega}{L}\frac{d\lambda}{dt} = T - m\frac{d^2\lambda}{dt^2} \tag{26}$$

Zur Prüfung dieser Gleichung kann man verschiedene Wege einschlagen. Mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Beobachtungen habe ich den folgenden gewählt. Durch die Kurven der isotonischen Zuckung sind die Werthe von λ für die aufeinanderfolgenden Zeiten gegeben; die Kurven lassen sich in ihren mittleren Theilen mit ziemlicher Genauigkeit durch die beiden ersten Glieder einer Fourierschen Reihe darstellen. Die gefundenen Formeln dienen zur Berechnung von $d\lambda/dt$ und $d^2\lambda/dt^2$, wobei freilich eine Vergrößerung der bei der ersten Rechnung begangenen Fehler nicht zu vermeiden ist. Die Masse m ist gegeben, die Werthe von T sind aus den Kurven der isometrischen Zuckung zu entnehmen; es sind also aus den korrespondirenden Punkten der isotonischen und isometrischen Kurve die Konstanten $\frac{E\omega}{L}$ und $\frac{H\omega}{L}$ zu berechnen. Die Prüfung für die Richtigkeit der Formel liegt dann einmal in dem gefundenen Werthe des Elasticitätskoefficien-

ten, andererseits in der Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe von T.

Ich benütze zur Rechnung 3 Beobachtungen von Fick[1]), bei welchen das von dem Muskel getragene Gewicht beziehungsweise 5, 10 und 60 g betrug; die zu der ersten Reihe gehörende isometrische Kurve war nicht unmittelbar gegeben, sondern mußte durch Extrapolation aus den für die Belastungen von 10 und 60 gegebenen konstruirt werden.

Belastung 5 *g*.

$$\lambda = 2{,}34 \sin \frac{\pi t}{0{,}138} - 0{,}307 \sin \frac{2\pi t}{0{,}138}.$$

$$E\omega = 2150, \qquad H\omega = 57.$$

t	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
λ ber.	0,79	1,18	1,55	1,89	2,17	2,36	2,42	2,33	2,09
λ beob.	0,87	1,31	1,57	1,84	2,12	2,28	2,37	2,29	2,12
T ber.	320	390	450	480	490	470	420	330	210
T beob.	295	460	470	450	450	450	410	330	250.

Belastung 10 *g*.

$$\lambda = 2{,}27 \sin \frac{\pi t}{0{,}133} - 0{,}396 \sin \frac{2\pi t}{0{,}133}$$

$$E\omega = 2300, \qquad H\omega = 47.$$

t	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
λ ber.	0,71	1,09	1,47	1,82	2,13	2,33	2,39	2,28	1,98
λ beob.	0,85	1,18	1,49	1,77	2,03	2,25	2,34	2,25	2,07
T ber.	310	380	430	460	480	470	420	330	230
T bob.	290	450	460	450	450	440	400	330	260.

3. Belastung 60 *g*.

$$\lambda = 1{,}61 \sin \frac{\pi t}{0{,}128} - 0{,}444 \sin \frac{2\pi t}{0{,}128}.$$

$$E\omega = 3400, \qquad H\omega = 21.$$

t	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
λ ber.	0,39	0,64	0,93	1,23	1,52	1,72	1,81	1,73	1,46
λ beob.	0,50	0,75	0,99	1,07	1,40	1,58	1,71	1,75	1,63
T ber.	170	250	320	380	410	420	390	330	240
T beob.	240	370	380	370	360	370	340	300	260.

1) l. c. p. 118 und 132.

Die Beobachtungen beziehen sich auf denselben Muskel, wie die zweite von den Seite 35 angeführten Reihen; der bei einer Belastung von 60 g gefundene Elasticitätskoefficient stimmt mit dem früheren überein, die beiden anderen Werthe sind wesentlich größer als die entsprechenden der früheren Reihe.

Die Kurve der berechneten Werthe von T steigt weniger steil an, als die Kurve der beobachteten und fällt rascher ab. Der Grund hierfür kann einmal darin liegen, daß die Annahme einer gleichförmigen Kontraktion des Muskels unzureichend ist; von größerem Einflusse ist aber wahrscheinlich der Umstand, daß die Kurve der beobachteten λ durch die beiden Sinusfunktionen nicht genügend dargestellt wird; dieß muß sich insbesondere in den absteigenden Kurven-Zweigen bemerklich machen; die Kurve der beobachteten λ verläuft gegen die Axe der Zeit asymptotisch, nach dem Wendepunkt sind daher die ihr entsprechenden Werthe von $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ positiv, während die Fouriersche Reihe negative Werthe von $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ liefert.

4. Beobachtungen mit dem Myographion von Blix[1]).

Ein Muskel wird im gereizten Zustand zunächst so belastet, daß er seine natürliche Länge $L = 9\ cm$ behält, dann verkürzt, bis seine Spannung verschwindet, und darauf durch erneute Spannung wieder gedehnt. Berechnen wir die Beobachtungen nach der früher benützten Formel

$$E\omega = \frac{K'-K}{\lambda'-\lambda}.L$$

so ergeben sich die in der folgenden Tabelle enthaltenen Zahlen.

A. Während der Periode der Verkürzung.

$K'-K$	1050—800	800—650	650—520	520—350
$E\omega$	4500	2700	2340	3060
$K'-K$	350—150	150—0		
$E\omega$	3600	2700		

B. Während der Periode der Dehnung.

$K'-K$	190—0	660—190	1070—660	1290—1070
$E\omega$	3400	8460	7380	5850

1) l. c. p. 25.

Im Ganzen nimmt $E\omega$, abgesehen von den wellenförmigen Schwankungen der Werthe, während der Beobachtung zu; man wird daher $E\omega$ als eine Funktion der Variabelen Γ, Π, ϑ zu betrachten und anzunehmen haben, daß diese entsprechenden zeitlichen Aenderungen unterworfen sind. Auch

$$\tau = L(l\Gamma^2 - \delta\Gamma - a\vartheta - m\Pi)$$

kann dann nicht konstant sein. Aus den Beobachtungen scheint zu folgen, daß τ bis zu einem Maximum anwächst, und dann wieder kleiner wird, so daß in dem absteigenden Zweig der Curve demselben λ ein kleineres τ entspricht als in dem aufsteigenden. Die bei der Verkürzung des Muskels geleistete Arbeit beträgt 1600 g cm, die der Wiederverlängerung entsprechende 3100 g cm.

5. Kinetische Energie und Reibungswärme bei der Kontraktion.

Aehnliche Differenzen in der Arbeitsleistung wie bei den Beobachtungen von Blix stellen sich heraus, wenn man einen Muskel langsam sich zusammenziehen läßt, während Spannung und Belastung im Gleichgewicht stehen und wenn er sich andererseits plötzlich kontrahirt, wobei dann die geleistete Arbeit ein Aequivalent in der lebendigen Kraft geschleuderter Massen findet.

Wenn im ersteren Falle die geleistete Arbeit größer ist als im zweiten, so kann der Grund hiefür zum Theil wieder in verschiedenen Werthen des Elasticitätskoëfficienten liegen; außerdem aber wird in dem zweiten Falle nicht blos lebendige Kraft, sondern auch Wärme erzeugt und die Arbeit der elastischen Kräfte findet ihr Aequivalent in der Summe der beiden Wirkungen.

Die Bewegung eines sich kontrahirenden Muskels wird bestimmt durch Gleichung 26); im Falle einer tetanischen Kontraktion setzen wir $T = \frac{E\omega}{L}\tau$ und erhalten:

$$27)\qquad m\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{H\omega}{L}\cdot\frac{d\lambda}{dt} + \frac{E\omega}{L}\lambda = \frac{E\omega}{L}\tau.$$

Die Gleichung der Energie für den Zeitpunkt der maximalen Kontraktion wird:

$$28)\qquad \tfrac{1}{2}m\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{H\omega}{L}\int_0^{T/2}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{\tau}\frac{E\omega}{L}(\tau-\lambda)\,d\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{E\omega}{L}\tau^2$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Arbeit, welche von der elastischen und tonischen Kraft bis zu dem Eintritt der

maximalen Kontraktion τ geleistet wird; das erste Glied links ist die in diesem Momente vorhandene lebendige Kraft, das zweite repräsentirt die während der Kontraktion in Folge der inneren Reibung erzeugte Wärme. Setzt man

$$\text{29)} \qquad \tfrac{1}{2}\frac{H\omega}{Lm} = \alpha, \qquad \sqrt{\frac{E\omega}{Lm} - \tfrac{1}{4}\frac{H^2\omega^2}{L^2m^2}} = \beta$$

so sind die Integrale der Bewegungsgleichung:

$$\tau - \lambda = \frac{\tau}{\beta} e^{-\alpha t}\{\alpha \sin\beta t + \beta\cos\beta t\}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}\tau e^{-\alpha t}\sin\beta t.$$

Die Zeit, welche bis zum Eintritt der maximalen Kontraktion verstreicht ist $T/2 = \pi/2\beta$.

Die Reibungswärme wird:

$$\text{30)} \qquad W = \frac{H\omega}{L}\int_0^{T/2}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 dt = 2m\alpha\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^2}\tau^2\int_0^{T/2} e^{-2\alpha t}\sin^2\beta t\, dt$$

$$= \frac{m}{2}\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^2}\tau^2\frac{1-(1+\alpha^2/\beta^2)e^{-\pi\alpha/\beta}}{1+\alpha^2/\beta^2}.$$

Die lebendige Kraft

$$\text{30')} \qquad T = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^2}\cdot\tau^2 e^{-\pi\alpha/\beta}.$$

Für ihr Verhältniß ergiebt sich:

$$\text{31)} \qquad \frac{W}{T} = \frac{e^{\pi\alpha/\beta}}{1+\alpha^2/\beta^2} - 1$$

wo

$$\frac{\alpha}{\beta} = \tfrac{1}{2}\frac{H\omega}{\sqrt{E\omega Lm - \tfrac{1}{4}H^2\omega^2}}.$$

Setzen wir in Uebereinstimmung mit den früheren Rechnungen $H\omega = 50$, $E\omega = 2000$, und $L = 12$, $m = 0{,}06$, so wird: $\alpha/\beta = 0{,}876$ und $W/T = 7{,}8$; hiernach werden bei einem Muskel von 12 cm Länge, welcher bei seiner Kontraktion eine Masse von etwa 60 g schleudert, $\frac{8}{9}$ der ganzen Arbeit in Wärme verwandelt. Es steht dieses Ergebniß der Rechnung in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Fick, bei welchen die lebendige Kraft der geschleuderten Massen bis auf den 7. Theil der gesammten Arbeit mit der Verkleinerung der geschleuderten Masse sank [1]).

1) l. c. p. 66.

Setzen wir die tetanische Verkürzung gleich $\frac{1}{3}$ der Länge L, so ergiebt sich in unserem Beispiel für die ganze bei der Verkürzung geleistete Arbeit der Werth $\frac{1}{3}\frac{E\omega}{L}\tau^2 = 1330$ g cm.

Der in Wärme verwandelte Theil beträgt somit 1180 g cm oder 0,028 Grammkalorieen; bei einer Masse des Muskels von 5 g würde sich hieraus eine Erwärmung um 0,007° ergeben.

6. Myothermische Erscheinungen.

Unter der Voraussetzung, daß alle Veränderungen des Muskels adiabatisch vor sich gehen, erhalten wir die Gleichungen:

$$32)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_s &= -\frac{1}{E}Z_s + \delta\Gamma + a\vartheta + m\Pi - l\Gamma^2 \\ \gamma &= \varrho\Gamma - \delta Z_s + f\vartheta + 2l\Gamma Z_s \\ \omega &= \varkappa\Pi + \lambda\vartheta + mZ_s \\ \frac{A\varepsilon c}{\Theta}\cdot\vartheta &= \lambda\Pi - f\Gamma + aZ_s. \end{aligned}$$

Betrachten wir zuerst den Fall der elementaren Zuckung bei freier Kontraktion; die Werthe der Zustandsgrößen vor der Reizung setzen wir gleich Null; nach Ablauf der Zuckung sind Γ und Z_s jedenfalls wieder Null und es bleibt daher die Gleichung:

$$33)\qquad \frac{A\varepsilon c}{\Theta}\vartheta = \lambda\Pi.$$

Es ergiebt sich hieraus, daß $\lambda\Pi$ mit dem chemischen Umsatz wächst, und es liegt daher nahe, Π mit dem osmotischen Druck der im Muskelsafte gelößten Molekeln in Beziehung zu setzen. Aus den experimentellen Daten ergiebt sich ferner, daß die im Muskel bei der Kontraktion erzeugte Wärmemenge mit der Spannung des Muskels zunimmt und es muß daher λ eine Funktion der Spannung sein; bei der Betrachtung der myothermischen Erscheinungen reichen wir also nicht mit dem ersten Gliede der für die freie Energie F gegebenen Reihe. Unabhängig von jeder speciellen Entwicklung würde λ durch

$$\frac{1}{A}\frac{\partial^2 F}{\partial\Pi\,\partial\Theta}$$

gegeben sein. Um ein Urtheil über seine Veränderlichkeit zu gewinnen, benützen wir eine Beobachtungsreihe von Fick[1]), deren Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die

1) l. c. p. 221.

in der zweiten Reihe gegebenen Wärmemengen W sind um den Betrag der durch Reibung entwickelten Wärme zu verkleinern; dieser läßt sich aus der bis zum Momente der maximalen Kontraktion geleisteten Arbeit nach Formel 31) näherungsweise berechnen; die so korrigirten Wärmemengen in g. Kalorieen sind in der dritten Reihe angegeben, sie entsprechen der durch den chemischen Umsatz erzeugten Wärme $\lambda\Pi$.

$K = -\omega Z_e$	3	23	43	83	123	163	203
$W \times 10^3$	14.0	18.1	19.6	22.9	23.7	26.0	25.6
$\lambda\Pi$	14.0	15.9	18.0	20.6	21.4	23.2	22.3.

Aus diesen Beobachtungen folgt:

34) $$\lambda = \frac{13,2}{\Pi} + \frac{0,116}{\Pi} K - \frac{0,00035}{\Pi} K^2.$$

Bei der isometrischen Zuckung ist die Spannung K und demzufolge auch λ variabel. Wir müssen also in der Formel

$$\frac{A\varepsilon e}{\Theta} \cdot \vartheta = \lambda\Pi$$

einen Mittelwerth für λ einsetzen und dieser ist, da er einer höheren Spannung entspricht, größer als der Werth von λ bei isotonischer Zuckung. Die Temperaturerhöhung des Muskels ist bei isometrischer Zuckung größer als bei isotonischer.

Beim Tetanus ergiebt sich für die von dem Beginn der Reizung bis zu dem Momente der maximalen Kontraktion entwickelte Temperatursteigerung:

$$\frac{A\varepsilon c}{\Theta} \cdot \vartheta = \lambda\Pi - f\Gamma.$$

Bezeichnen wir durch ϑ' und Π' die Werthe dieser Variabeln für den Moment, in welchem die Wiederausdehnung beginnt, so ist:

$$\frac{A\varepsilon c}{\Theta}(\vartheta' - \vartheta) = \lambda(\Pi' - \Pi).$$

Sind endlich ϑ'' und Π'' die Werthe der Variabeln nach dem Ende des Tetanus, so ist:

$$\frac{A\varepsilon c}{\Theta}(\vartheta'' - \vartheta') = \lambda(\Pi'' - \Pi') + f\Gamma.$$

Um die Beobachtung von Fick über die Wärmeentwicklung beim Tetanus zu erklären, müssen wir die Abhängigkeit des

Koëfficienten λ von Γ berücksichtigen. Wenn die tonische Kraft von Null bis Γ steigt, oder von Γ wieder auf Null sinkt, so durchläuft λ eine Reihe verschiedener Werthe; das Mittel aus denselben sei λ_0. Setzen wir außerdem $\Pi'' - \Pi' = \Pi$, so ergiebt sich aus den obigen Formeln:

$$34) \qquad \frac{A\varepsilon c}{\Theta} \vartheta'' = 2\lambda_0 \Pi + \lambda_1 (\Pi' - \Pi).$$

Die Temperaturerhöhung ϑ'' setzt sich zusammen aus zwei Theilen, von welchen der erste konstant, der zweite der Dauer des Tetanus proportional ist.

So lange der Tetanus maximal bleibt, behalten Π und Π' dieselben Werthe unabhängig von der Zahl der Reize; die auf einen Reiz entfallende Temperaturerhöhung ist jener Zahl umgekehrt proportional. Hört der Tetanus bei größeren Intervallen der Reize auf maximal zu sein, so sinkt der Werth von Π und Π'; schließlich konvergirt die auf einen Reiz entfallende Temperaturerhöhung gegen den konstanten Werth $2\lambda_0 \Pi$.

Da λ_0 und λ_1 abhängig sind von der Spannung des Muskels, so wächst die Temperaturerhöhung beim Tetanus mit der Belastung und ist größer bei gehemmter Verkürzung als bei freier.

7. Ergänzung und Vereinfachung der Gleichungen.

Die Gleichungen 32), welche wir für die adiabatische Zustandsänderung aufgestellt haben, bedürfen einer gewissen Ergänzung. Sie enthalten noch 7 Zustandsgrößen $Z_{,}$, Π, Γ, $\varepsilon_{,}$, ω, γ und ϑ und es können mit ihrer Hülfe vier von jenen Größen durch die 3 übrigen ausgedrückt werden; der Zustand des Muskels erscheint demnach als eine Funktion dreier unabhängiger Veränderlicher.

Das tonische Moment γ enthält ein der Temperatur proportionales Glied, würde also mit dieser gleichmäßig wachsen; die Erfahrung zeigt, daß der tonische Zustand wieder verschwindet, obwohl eine dauernde Erhöhung der Temperatur sowohl bei der Zuckung, wie beim Tetanus eintritt. Das tonische Moment zeigt ein ähnliches Verhalten, wie die pyroëlektrische Ladung unter der Wirkung der Zerstreuung oder ein Induktionsstrom unter der Wirkung der Selbstinduktion. Wenn in einem bestimmten Augenblick das tonische Moment γ erreicht ist, so findet in einem folgenden Zeitelement dt ein Verlust statt, welcher mit $\gamma\,dt$ proportional ist.

Es liegt endlich noch eine Vereinfachung unseres Gleichungs-

systems nahe, durch welche die Zahl der unabhängigen Veränderlichen auf zwei reducirt wird. Wir nehmen an, daß eine von außen wirkende tonische Kraft Γ nicht existire, daß also Γ nur Rückwirkung gegen ein vorhandenes Moment γ sei; wir setzen dementsprechend $\gamma = -n\Gamma$, wo n ein von den Dimensionen des Muskels abhängender Faktor ist. Die Gleichung für das tonische Moment verwandelt sich in eine Differentialgleichung für die tonische Kraft:

$$\frac{d\Gamma}{dt} + q\Gamma = -\frac{f}{\varrho'}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\delta}{\varrho'}\frac{dZ_s}{dt}. \tag{35}$$

Wo

$$\varrho' = \varrho + n + 2lZ_s.$$

Die Integration giebt:

$$\Gamma = -e^{-qt}\int\left\{\frac{f}{\varrho'}\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\delta}{\varrho'}\frac{dZ_s}{dt}\right\}e^{qt}dt \tag{36}$$

eine Formel, durch welche die tonische Kraft als Funktion der Temperatur und der Spannung gegeben wird. Fügen wir hierzu die Gleichungen

$$\Pi = \frac{A\varepsilon c}{\lambda\Theta}\vartheta + \frac{f}{\lambda}\Gamma - \frac{a}{\lambda}Z_s$$

und

$$s_s = -\frac{1}{E}Z_s + a\vartheta + \delta\Gamma - l\Gamma^2 + m\Pi$$

$$\omega = \lambda\vartheta + mZ_s + \varkappa\Pi$$

so sehen wir, daß in der That alle in Betracht kommenden Größen durch die zwei Variabeln ϑ und Z_s ausgedrückt werden können. Der Muskel erscheint also jetzt als ein Gebilde, dessen Zustand nur noch von zwei Veränderlichen abhängig ist, der Temperatur und der Spannung. Die vorliegende Betrachtung zeigt aber auch, daß die früher für die elementare Zuckung entwickelte Theorie möglicherweise einer Korrektion bedarf; wir haben damals vorausgesetzt, daß die tonische Kraft bei der isotonischen und isometrischen Zuckung dieselbe sei. Diese Annahme wird im allgemeinen nicht mehr zutreffen, wenn die vorhergehende Reduktion der Variabeln möglich ist; wenn sie dennoch zu annähernd richtigen Resultaten führt, so würde dieses auf den numerischen Verhältnissen der Konstanten beruhen. In der Bestimmung dieser Verhältnisse, in der Vervollständigung der Theorie, so daß sie die Resultate der Beobachtung genauer wiedergiebt als bisher, würde die wesentliche Aufgabe der weiteren Forschung bestehen.

Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiet der elliptischen Functionen.

Von

H. Weber.

I.

Ich beabsichtige in einer Reihe von Mittheilungen an die Gesellschaft der Wissenschaften die Resultate von Untersuchungen zu veröffentlichen, die in Beziehung stehen zu der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen und zu der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Functionen. Sie berühren sich einerseits mit älteren Untersuchungen von Dirichlet aus dem Ende der dreißiger Jahre und den daran anknüpfenden Arbeiten Kroneckers, andererseits mit neueren Arbeiten über Modulfunctionen von Hurwitz, Klein und Fricke[1]). Auch meine eigenen älteren Arbeiten „über die unendlich vielen Formen der ϑ-Function" (Journal für Mathematik Bd. 74) und „über die Transformationstheorie der Theta-Functionen (Annali di Matematica. Ser. II. Tomo IX), sowie über die complexe Multiplication, kommen dabei in Betracht.

Die Bezeichnungsweise, deren ich mich in der Theorie der quadratischen Formen bediene, die von der hergebrachten Gauss-Dirichlet'schen abweicht, rührt in der Hauptsache von Kronecker her, und vereinfacht über Erwarten Ausdruck und Ableitung vieler Zahlentheoretischer Sätze. Dies soll in der vorliegenden ersten Mittheilung in einigen wichtigen Fällen gezeigt werden.

§ 1.

Discriminanten.

Eine ganze positive oder negative Zahl D, die nach dem Modul 4 mit 0 oder mit 1 congruent ist, heißt (nach Kronecker)

1) Dirichlet, Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Journal f. Mathematik Bd. 19 u. 21. Dirichlets Werke Bd. I. S. 468 f. Auch in einen Brief an Kronecker vom 23. Juli 1855. Nachrichten der G. d. W. 1885. S. 378. Kronecker, Sitzungsberichte der Berliner Akademie aus den Jahren 1883 bis 1889. Hurwitz, Ueber endliche Gruppen, die in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten. Math. Annalen Bd. 74. Fricke, Neue Beiträge zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen ebda. Bd. 40. Klein-Fricke, Vorlesungen über die Modulfunctionen.

eine Zahl von Discriminantenform; wir werden auch kurz sagen, eine Discriminante.

Die Discriminanten bilden in der Gesammtheit der Zahlen eine Gruppe insofern sie sich durch Multiplication wieder erzeugen, d. h. das Product zweier oder mehrerer Discriminanten ist immer wieder eine Discriminante.

Wenn D außer 1 keinen quadratischen Factor enthält, nach dessen Absonderung eine Discriminante übrig bleibt, so heißt D eine Stammdiscriminante.

Stammdiscriminanten sollen zum Unterschied von den übrigen mit Δ bezeichnet sein.

Wenn D keine Stammdiscriminante ist, so giebt es eine und nur eine Quadratzahl Q^2, und eine Stammdiscriminante Δ so daß

$$D = \Delta Q^2.$$

Δ heißt der Stamm von D.

Eine Stammdiscriminante darf durch kein ungerades Quadrat theilbar sein, und muß, wenn sie gerade ist mit 8 oder -4 nach dem Modul 16 congruent sein.

Man hat also in Q^2 die größte in D aufgehende ungerade Quadratzahl und dann noch eine so hohe Potenz von 4 aufzunehmen, daß Δ entweder ungerade und $\equiv 1 \pmod 4$ oder $\equiv 8$ oder $\equiv 12 \pmod{16}$ wird.

Jede Stammdiscriminante läßt sich auf eine einzige Art durch Multiplication aus gewissen einfachen nicht weiter zerlegbaren Discriminanten zusammensetzen, die wir Primdiscriminanten nennen können. Diese Primdiscriminanten sind, wenn p eine ungerade Primzahl bedeutet und das Zeichen so bestimmt wird, daß $\pm p \equiv 1 \pmod 4$ wird

$$\pm p, \quad -4, \quad +8, \quad -8.$$

§ 2.

Das erweiterte Legendre-Jacobi'sche Symbol.

Das Legendresche Symbol aus der Theorie der quadratischen Reste

$$\left(\frac{m}{p}\right),$$

worin m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, p eine positive ungerade Primzahl, die nicht in m aufgeht, bedeutet, hat bekanntlich den Werth $+1$, wenn m quadratischer Rest von p ist und den Werth -1, wenn m quadratischer Nichtrest von p ist.

Jacobi hat die Bedeutung des Symbols dahin erweitert, daß, wenn $n = p\,p'\,p''\ldots$ eine in ihre Primfactoren zerlegte positive ungerade Zahl ist, die mit m keinen Theiler gemein hat,

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\cdots$$

sein soll. Die Bedeutung des Symbols ist in noch erweitertem Sinne gebraucht worden von Kronecker (Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 30. Juli 1885) und von Dedekind (Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, dritte Auflage § 180). Die Bedeutung ist bei beiden dieselbe; während aber Kronecker unverändert das Legendre'sche Symbol in allgemeinerem Sinne braucht, wendet Dedekind eine veränderte Bezeichnung an, der ich mich hier anschließe.

Es sei D eine Discriminante und n, n' beliebige Zahlen. Wir setzen fest

$$1)\qquad (D, n)(D, n') = (D, nn'),$$

$$2)\qquad (D, 1) = 1, \quad (D, 0) = 0.$$

Darnach ist das Symbol (D, n) allgemein definirt, sobald wir

$$(D, -1), \quad (D, p),$$

definirt haben, wenn p eine Primzahl ist. Es sei

$$3)\qquad (D, p) = 0$$

wenn p in D aufgeht,

$$4)\qquad (D, p) = \left(\frac{D}{p}\right)$$

wenn p eine ungerade und nicht in D enthaltene Primzahl ist,

$$5)\qquad (D, 2) = \left(\frac{2}{D}\right) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}}$$

wenn D ungerade ist,

$$6)\qquad \begin{aligned}(D, -1) &= +1 \text{ wenn } D > 0\\ &= -1 \text{ wenn } D < 0.\end{aligned}$$

Dadurch ist (D, n) für jedes n völlig eindeutig definiert, und zwar so, daß die Gleichung 1) befriedigt ist. Es ist immer $(D, n) = 0$ wenn D und n einen gemeinsamen Theiler haben, und wenn Q^2 ein Quadrat ist, was mit n keinen gemeinsamen Theiler hat, so ist

$$7)\qquad (DQ^2, n) = (D, n).$$

Die Definition 6), also die Erweiterung der Bedeutung des Symbols (D, n) für negative n ist, so viel ich weiß neu. Daß sie aber naturgemäß und zweckmäßig ist, ergeben bereits die folgenden Sätze.

Nehmen wir für D ein Primdiscriminante, so ergiebt sich, wenn n durch p nicht theilbar ist auf Grund des Reciprocitätsgesetzes der quadratischen Reste

I. $$(\pm p, n) = \left(\frac{n}{p}\right),$$

und wenn n ungerade ist

II. $$(-4, n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$
$$(8, n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$
$$(-8, n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}},$$

und hierin kann n positiv oder negativ sein. Es gelten weiter folgende Sätze:

III. $$(D, n)(D', n) = (DD', n)$$

wenn D, D' irgend zwei Discrimanten sind. Denn III. gilt erstens wenn n und DD' nicht relativ prim sind, da dann beide Seiten 0 sind. Er gilt aber auch nach 3), 4), 5), 6), wenn n eine Primzahl oder -1 ist, und folglich nach 1) allgemein.

IV. $$(D, n) \equiv \pm (D', n) \text{ wenn } D' \equiv D \pmod{4n},$$

und das obere Zeichen gilt, wenn von den beiden Zahlen n und DD' wenigstens eine positiv ist, das untere, wenn sie beide negativ sind.

Ist der Satz richtig für $n = n'$ und für $n = n''$ so ist er auch richtig für $n = n'n''$, und daher ist er allgemein bewiesen, da er für den Fall daß n eine Primzahl oder -1 ist, aus 2) bis 6) sofort folgt.

V. $$(D, n) = (D, n') \text{ wenn } n \equiv n' \pmod{D}.$$

Dieser Satz, der von besonderer Wichtigkeit ist, ist nach III offenbar erwiesen, wenn er für jede Primdiscriminante als richtig erkannt ist. Für Primdiscriminanten ergiebt er sich aber unmittelbar aus I, II.

Sind D, D' irgend zwei Discriminanten, so ist

VI. $$(D, D') = \pm (D', D),$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn von den beiden Discriminanten

wenigstens eine positive ist, das untere wenn sie beide negativ sind. Auch VI wird erwiesen sein, sobald es für irgend zwei Primdiscriminanten bewiesen ist. Für diese ergiebt er sich aber auch aus I, II mit Hilfe des Reciprocitätsgesetzes der quadratischen Reste.

Die Sätze IV, V können zur Berechnung des Symbols (D, n) nach dem Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Theilers dienen. Denn man kann aus den Congruenzen

$$\begin{aligned} D &\equiv D' \pmod{4n} \\ n &\equiv n' \pmod{D'} \\ D' &\equiv D'' \pmod{4n'} \\ n' &\equiv n'' \pmod{D''} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

die Reihe der Zahlen

$$D', \quad 2n', \quad D'', \quad 2n'', \quad \ldots$$

so bestimmen, daß jede folgende dem absoluten Werth nach kleiner ist als die vorhergehende.

Ist D keine Quadratzahl, so kann man immer eine Zahl β so bestimmen, daß

$$(D, \beta) = -1$$

ist; denn ist Δ der Stamm von D so ist, wenn β relativ prim zu D ist

$$(D, \beta) = (\Delta, \beta).$$

Ist nun $\Delta = \delta\Delta'$ und δ eine Primdiscriminante, so kann man β_0 so wählen, daß

$$(\delta, \beta_0) = -1$$

ist (nach I, II).

Man bestimme dann β aus den Congruenzen

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \beta_0 \pmod{\delta}, \\ &\equiv 1 \pmod{\Delta'}, \end{aligned}$$

und erhält

$$(D, \beta) = (\Delta, \beta) = -1.$$

Wir lassen nun s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul D durchlaufen und setzen

$$S = \sum^{s}(D, s).$$

Diese Summe multiplicieren wir mit (D, β) und erhalten

$$-S = \sum^{s}(D, s\beta).$$

Aber die rechte Seite ist hier von S nicht verschieden, da $s\beta$ zugleich mit s ein vollständiges Restsystem durchläuft, und also ist $S = 0$.

Es giebt also in dem System s ebenso viele Zahlen α, für die $(D, \alpha) = +1$ ist, wie Zahlen β, für die $(D, \beta) = -1$ ist, und es ist allgemein

$$\begin{aligned}(D, n) &= +1 \text{ wenn } n \equiv \alpha \pmod D\\ &= -1 \text{ wenn } n \equiv \beta \pmod D,\end{aligned}$$

worin das bekannte Gesetz über den quadratischen Charakter der Zahl D enthalten ist.

§ 3.

Die Gauss'schen Summen.

Ist p eine ungerade Primzahl, so gilt die bekannte Formel von Gauß (vgl. Dirchlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, Supplement I)

$$\sum_{1, p-1}^{s} \left(\frac{s}{p}\right) e^{\frac{2h\pi i s}{p}} = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

wenn h durch p nicht theilbar ist.

Nun ist $\pm p$ eine Primdiscriminante, und wenn wir dafür Δ setzen, so ist

$$i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} = \sqrt{\Delta}$$

worin $\sqrt{\Delta}$ bei positivem Δ positiv reell, bei negativem Δ positiv imaginär zu nehmen ist[1]).

Ersetzen wir nun in der Gauss'schen Formel h durch $\pm h$, und beachten, daß

$$\left(\frac{s}{p}\right) = (\Delta, s), \quad \left(\frac{\mp h}{p}\right) = (\Delta, \mp h) = (\Delta, h),$$

da die oberen Zeichen bei positivem, die unteren bei negativem Δ gelten (§ 2, I, 6), so erhalten wir

$$\text{(A)} \qquad \sum^{s} (\Delta, s) e^{-\frac{2h\pi i s}{\Delta}} = (\Delta, h)\sqrt{\Delta}$$

und hierin kann s ein beliebiges Restsystem nach dem Modul Δ durchlaufen. Es ist (wegen § 2, 3) auch nicht nöthig, den durch

1) Ich verstehe unter einer positiven imaginären Größe immer eine solche, die ein positives Vielfaches von i ist.

p theilbaren Werth von s auszuschließen, und ebenso darf auch h durch p theilbar sein.

Die Formel (A) ist zunächst nur für den Fall erwiesen, daß Δ eine positive oder negative ungerade Primzahl ist; daß sie aber auch für

$$\Delta = -4, \quad 8, \quad -8,$$

also für jede Primdiscriminante gilt, zeigt die einfache Berechnung der Summe in diesen Fällen, in denen sie aus nur zwei oder vier Gliedern besteht.

Wenn wir aber die Richtigkeit der Formel (A) voraussetzen für

$$\Delta = \Delta', \quad \Delta = \Delta''$$

so können wir, falls Δ' und Δ'' ohne gemeinsamen Theiler sind, ihre Richtigkeit für $\Delta = \Delta'\Delta''$ ableiten, womit dann die Richtigkeit allgemein für jede Stammdiscriminante erwiesen ist.

Dabei ist zu beachten, daß nach der Definition der Wurzel

$$1) \qquad \sqrt{\Delta'}\sqrt{\Delta''} = \pm\sqrt{\Delta'\Delta''}$$

ist, worin das untere Zeichen gilt, wenn Δ' und Δ'' beide negativ sind, sonst das obere.

Multiplicieren wir die beiden Reihen

$$\sum^{s'}(\Delta', s')e^{-\frac{2h\pi i s'}{\Delta'}}, \quad \sum^{s''}(\Delta'', s'')e^{-\frac{2h\pi i s''}{\Delta''}},$$

so folgt

$$\sum^{s' s''}(\Delta', s')(\Delta'', s'')e^{-\frac{2h\pi i}{\Delta'\Delta''}(s'\Delta''+s''\Delta')}.$$

Setzen wir

$$2) \qquad s = s'\Delta'' + s''\Delta'$$

so durchläuft s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $\Delta'\Delta''$, (wenn Δ', Δ'' relativ prim sind). Es ist ferner

$$(\Delta', s) = (\Delta', \Delta'')(\Delta', s'),$$
$$(\Delta'', s) = (\Delta'', \Delta')(\Delta'', s''),$$

und folglich (§ 2, IV)

$$(\Delta'\Delta'', s) = \pm(\Delta', s')(\Delta'', s''),$$

wenn das obere Zeichen gilt, falls von den beiden Zahlen Δ', Δ'' wenigstens eine positiv ist, das untere wenn sie beide negativ sind, also die Zeichenbestimmung dieselbe ist wie in 1). Andererseits ergiebt sich aus der für $\Delta = \Delta'$ und $\Delta = \Delta''$ als richtig vorausgesetzten Formel (A) durch Multiplication der rechten Seiten

$$\pm(\varDelta'\varDelta'', h)\sqrt{\varDelta'\varDelta''},$$

also die Richtigkeit der Formel (A) für das Product $\varDelta = \varDelta'\varDelta''$.

§ 4.

Die Function $\psi(D, n)$.

Sei D eine Discriminante, n eine beliebige Zahl. Wir betrachten die Congruenz

1) $$x^2 \equiv D \pmod{4n}.$$

Ist x eine Lösung, so ist auch $x+2n$ eine Lösung. Unter einer Lösung von 1) verstehen wir also eine Zahlenclasse nach dem Modul $2n$, deren Individuen alle der Congruenz 1) genügen. Die Anzahl der Lösungen von 1) in diesem Sinne gezählt, soll mit

2) $$\psi(D, n)$$

bezeichnet werden, so daß dieses Zeichen den Werth Null hat, wenn 1) nicht lösbar ist. Sind m, n relative Primzahlen, so gilt die Formel

3) $$\psi(D, n)\,\psi(D, m) = \psi(D, nm).$$

Denn sind y, z Repräsentanten von Lösungen von

4) $$y^2 \equiv D \pmod{4n}, \quad z^2 \equiv D \pmod{4m},$$

so ist immer $y \equiv z \pmod 2$ und man kann eine Zahenlclasse x nach den Modul $2mn$ bestimmen durch

$$\begin{aligned} x &\equiv y \mod 2n \\ &\equiv z \mod 2m, \end{aligned}$$

die der Congruenz

5) $$x^2 \equiv D \pmod{4mn}$$

genügt, und zwar führen verschiedene Paare y, z auch zu verschiedenen x. Umgekehrt erhält man aus jeder Lösung der Congruenz 5) eine Lösung von jeder der Congruenzen 4). Daraus folgt, daß die Anzahl der Lösungen von 5) ebenso groß ist wie die Anzahl der Paare der Lösungen von 4), was eben durch die Formel 3) ausgedrückt ist.

Die Bestimmung des Werthes von $\psi(D, n)$ ist hiermit auf den Fall zurückgeführt, daß n eine Primzahlpotenz ist, und diese Bestimmung geschieht nach den bekannten Sätzen über die quadratischen Congruenzen. Wir verstehen unter $\varDelta$ den Stamm der Discriminante D, und setzen

$$D = \varDelta Q^2$$

und beschränken uns bei den folgenden Betrachtungen über $\psi(D, n)$ auf die Annahme, daß n relativ prim zu Q sei. Die andern Fälle sind zwar nicht schwierig, machen aber weitläufige Unterscheidungen nothwendig und führen nicht zu einfachen Resultaten.

Ist also q eine Primzahl die nicht in Q aufgeht, so kann q, wenn es ungerade ist, höchstens in der ersten Potenz in D enthalten sein, und nur $q = 2$ kann bis zur dritten Potenz in D aufgehen.

Es ergeben sich dann folgende drei Fälle, die auch für $q = 2$ gelten

$$\begin{array}{llll} 1. & (D,q) = 0, & \psi(D,q) = 1, \quad \psi(D,q^k) = 0 & k > 1. \\ 2. & (D,q) = 1, & \psi(D,q^k) = 2 & \multirow{2}{*}{$\Big\} k \geqq 1$} \\ 3. & (D,q) = -1, & \psi(D,q^k) = 0 & \end{array}$$

und wir können noch hinzufügen

$$4. \qquad \psi(D,1) = 1.$$

Wir bezeichnen nun, immer unter der Voraussetzung, daß n relativ prim zu Q sei mit e^2 die sämmtlichen quadratischen Theiler von n (einschließlich 1), mit ε sämmtliche Divisoren von n überhaupt, und stellen die Formel auf

$$\text{(B)} \qquad \sum^{e^2} \psi\left(D, \frac{n}{e^2}\right) = \sum^{\varepsilon} (D, n)$$

die wir nun zu beweisen haben.

Bezeichnen wir mit n' eine zu n theilerfremde Zahl, und legen den e', ε' dieselbe Bedeutung in Bezug auf n' bei, die e und ε für n haben, so folgt, wenn wir (B) für n und n' bewiesen voraussetzen

$$\sum^{e^2} \sum^{e'^2} \psi\left(D, \frac{n}{e^2}\right) \psi\left(D, \frac{n'}{e'^2}\right) = \sum^{\varepsilon} \sum^{\varepsilon'} (D, \varepsilon)(D, \varepsilon'),$$

oder nach 3) und § 2, 1)

$$\sum^{e^2} \sum^{e'^2} \psi\left(D, \frac{nn'}{e^2 e'^2}\right) = \sum^{\varepsilon} \sum^{\varepsilon'} (D, \varepsilon\varepsilon').$$

Nun durchläuft $e^2 e'^2$ die sämmtlichen quadratischen, $\varepsilon\varepsilon'$ sämmtliche Theiler von nn', und also folgt die Formel (B) für das Product nn'.

Es braucht also (B) nur noch für den Fall bewiesen zu werden, daß n eine Primzahlpotenz q^k ist, die zu Q relativ prim ist. Nach 1, 2, 3, 4 ist aber für diesen Fall die Richtigkeit von (B) leicht zu bestätigen.

Ist $n = q^k$ so ist

$$\frac{n}{e^s} = q^{k-2s} \qquad 0 \leqq s \leqq \frac{k}{2}.$$

Es ist also

$$\Sigma\psi\left(D, \frac{n}{e^s}\right) = \overset{s}{\Sigma}\psi(D, q^{k-2s})$$

und wir erhalten nach 1, 2, 3, 4 folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} (D,q) &= 0, & \overset{s}{\Sigma}\psi(D, q^{k-2s}) &= 1, \\ (D,q) &= +1, & \overset{s}{\Sigma}\psi(D, q^{k-2s}) &= k+1, \\ (D,q) &= +1, & \overset{s}{\Sigma}\psi(D, q^{k-2s}) &= 1, \quad k \text{ gerade} \\ & & &= 0, \quad k \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Es ist ferner

$$s = q^s \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, k$$

und folglich

$$\begin{aligned} (D,q) &= 0, & \Sigma(D, q^s) &= 0, \\ (D,q) &= 1, & \Sigma(D, q^s) &= k+1, \\ (D,q) &= -1, & \Sigma(D, q^s) &= 1, \quad k \text{ gerade} \\ & & &= 0, \quad k \text{ ungerade,} \end{aligned}$$

woraus in allen diesen Fällen die Richtigkeit der Formel (B) folgt, die somit allgemein bewiesen ist.

§ 5.

Composition.

Die binären quadratischen Formen schreibe ich nicht in der seit Gauss üblichen Bezeichnungsweise mit dem Factor 2 des mittleren Coëfficienten, sondern in der von Kronecker zuerst wieder aufgenommenen älteren Schreibweise

$$(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

und nenne

$$D = b^2 - 4ac$$

die Discriminante dieser Form, von der ich durchweg annehmen will, daß sie kein Quadrat sei. Die Form heißt primitiv, wenn die Coëfficienten a, b, c ohne gemeinschaftlichen Theiler sind.

Bei negativer Discriminante sollen immer nur die positiven Formen berücksichtigt werden.

Die Composition gestaltet sich in dieser Bezeichnung wie schon bei Dirichlet-Dedekind angedeutet ist (l. c. § 146 Anmerkung) folgendermaßen.

Zwei quadratische Formen der Discriminante D

1) $$(a', b', c'),\quad (a'', b'', c'')$$

heißen einig, wenn die drei Zahlen

$$a',\quad a'',\quad \frac{b'+b''}{2}$$

keinen gemeinsamen Theiler haben. Die beiden Formen brauchen dabei nicht primitiv zu sein, nur müssen ihre Theiler σ', σ'' relativ prim sein.

Es läßt sich eine Zahlenclasse (mod $2a'a''$) aus den Congruenzen bestimmen

2) $$B \equiv b' \pmod{2a}, \qquad B \equiv b'' \pmod{2a'}, \qquad B^2 \equiv D \pmod{4a'a''},$$

und wenn wir also $B^2 = D + 4a'a''C$ setzen, so ist die Form der Discriminante D

3) $$(a'a'', B, C)$$

aus den beiden Formen 1) componiert.

Die Formen 1) sind aequivalent mit

4) $$(a', B, a''C), \qquad (a'', B, a'C),$$

und daraus ergiebt sich, daß $\sigma'\sigma''$ der Theiler der Form 3) ist.

Sind x', y' und x'', y'' irgend zwei Variable und ist

5) $$\begin{aligned} X &= x'x'' - Cy'y'', \\ Y &= a'x'y'' + a''x''y' + By'y'', \end{aligned}$$

so besteht die Identität

6) $$\begin{aligned}(2a'x + By' + \sqrt{D}y')(2a''x'' + By'' + \sqrt{D}y'') \\ = 2(2a'a''X + BY + \sqrt{D}Y),\end{aligned}$$

woraus folgt

7) $$\begin{aligned}(a'x'^2 + Bx'y' + a''Cy'^2)(a''x''^2 + Bx''y'' + a'Cy''^2) \\ = a'a''X^2 + BXY + CY^2.\end{aligned}$$

Setzt man voraus, daß die beiden Zahlen

$$\begin{aligned} m' &= a'x'^2 + Bx'y' + a''Cy'^2 \\ m'' &= a''x''^2 + Bx''y'' + a'Cy''^2 \end{aligned}$$

ohne gemeinsamen Theiler sind, und daß auch x' zu y' und x'' zu y'' relativ prim sind, so folgt, indem man 5) einmal nach x', y', dann nach x'', y'' auflöst, daß auch X, Y keinen gemeinsamen Theiler haben, und man erhält also aus zwei eigentlichen Darstellungen der Zahlen m', m'' durch die Formen (a', b', c'), (a'', b'', c'')

eine eigentliche Darstellung von $m'm''$ durch die componierte Form

$$(a'a'', B, C).$$

Ersetzt man die beiden Formen 1) durch irgend zwei aequivalente Formen, so geht auch 3) in eine aequivalente Form über, so daß die Classe, zu der 3) gehört als aus den beiden Classen 1) 2) componiert bezeichnet wird. Bezeichnet man die Classen von 1) mit k' und k'' so wird die Classe k von 3) mit $k'k''$ bezeichnet, also

$$8) \qquad k = k'k''.$$

Eine primitive Form (a, b, c) ist mit sich selbst einig, wenn a und b ohne gemeinsamen Theiler sind, und dies tritt stets ein, wenn a relativ prim zu D ist. Um die Form mit sich selbst zu componieren bestimme man B aus

$$B \equiv b \pmod{2a}, \qquad B^2 \equiv D \pmod{4a^2};$$

dann ist

$$(a, B, aC) \text{ aequivalent mit } (a, b, c)$$

und

$$(a, b, c)(a, b, c) = (a^2, B, C)$$

der Repräsentant der Classe k^2. Die Formel 7) ergiebt für diesen Fall

$$9) \qquad \begin{aligned}(ax'^2 + Bx'y' + aCy'^2)&(ax''^2 + Bx''y'' + aCy''^2) \\ &= aX^2 + BXY + CY^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left\{(aX + BY)^2 - DY^2\right\}.\end{aligned}$$

Die Composition einer primitiven Form (a, b, c) und ihrer entgegengesetzten (c, b, a) ergiebt

$$(ac, b, 1)$$

die aequivalent ist mit $(1, -b, ac)$ und also in die Hauptclasse $\left(1, 1, -\frac{D-1}{4}\right)$ oder $(1, 0, \frac{1}{4}D)$ gehört.

§ 6.

Charaktere der quadratischen Formen.

Es sei D eine beliebige Discriminante und δ eine Stammdiscriminante die in D aufgeht, jedoch so daß $D:\delta$ auch noch Discriminantenform hat. Ein solcher Theiler δ soll ein Stammtheiler von D genannt werden.

Es ist zunächst festzustellen, wie viele solche Stammtheiler es giebt, und wie man sie erhält.

Ein ungerader Stammtheiler kann keine anderen Primfactoren enthalten, als solche die in D aufgehen; und keinen mehr als einmal; dagegen kann man ein beliebiges Product aus solchen Primzahlen, mit dem geeigneten Vorzeichen versehen, für δ wählen. Ist also τ die Anzahl der in D aufgehenden ungeraden Primzahlen, so ist 2^τ die Zahl der ungeraden Stammtheiler von D, wobei 1 als Stammtheiler mitgerechnet ist. -4 tritt unter den Stammtheilern nur dann auf, wenn $D \equiv 0, -4 \pmod{16}$ ist. $+8$ wenn $D \equiv 0, 8 \pmod{32}$ und -8 wenn $D \equiv 0, -8 \pmod{32}$.

Bezeichnen wir also mit δ_1 die ungeraden Stammtheiler, so ergeben sich die sämmtlichen Stammtheiler δ und ihre Anzahl aus folgender Tabelle

1.	$\delta = \delta_1$,	$D \equiv 1 \pmod{4}$ $\equiv 4 \pmod{16}$	Anzahl 2^τ
2.	$\delta = \delta_1, -4\delta_1$,	$D \equiv -4 \pmod{16}$ $\equiv 16 \pmod{32}$	Anzahl $2^{\tau+1}$
3.	$\delta = \delta_1, 8\delta_1$,	$D \equiv 8 \pmod{32}$	Anzahl $2^{\tau+1}$
4.	$\delta = \delta_1, -8\delta_1$,	$D \equiv -8 \pmod{32}$	
5.	$\delta = \delta_1, -4\delta_1, 8\delta_1, -8\delta_1$.	$D \equiv 0 \pmod{32}$	Anzahl $2^{\tau+2}$

Die Stammtheiler von D lassen sich zu einer Gruppe zusammenfassen in folgender Weise.

Sind δ_1, δ_2 zwei Stammtheiler von D, so ist das Product $\delta_1 \delta_2$ auch eine Discriminante; ihr Stamm δ wird ebenfalls unter den Stammtheilern von D enthalten sein. Wir nennen dann δ aus δ_1 und δ_2 componiert und setzen

$$\delta = \delta_1 \delta_2. \tag{1}$$

Dies ist keine wirkliche Multiplication, sondern es ist nach Ausführung der Multiplication unter Umständen noch ein quadratischer Factor abzuwerfen.

Setzen wir in 1) $\delta_1 = \delta_2$, so wird $\delta = 1$, d. h. bei der symbolischen Multiplication 1) ist jedes Element sich selbst reciprok; es folgt also aus 1)

$$\delta_1 = \delta \delta_2, \tag{2}$$

und damit sind die δ als Gruppe erklärt. Diese Gruppe ist eine Abelsche; d. h. bei der Composition sind die Elemente vertauschbar.

Um diese Gruppe durch eine Basis darzustellen, setze man

$$\delta = \delta_1^{\varepsilon_1} \delta_2^{\varepsilon_2} \dots \delta_\nu^{\varepsilon_\nu}, \tag{3}$$

worin, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ die Werthe 0 oder 1 haben und ν den obigen Fällen 1 bis 5 entsprechend $= \tau$, $\tau+1$, $\tau+2$ ist. Für $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ kann man im Falle 1. die in D aufgehenden ungeraden Primzahlen $\pm p$ wählen, wozu im Falle 2. noch -4 im Fall 3. 8 im Fall 4. -8 und im Falle 5. 8 und -8 (oder -4 und 8 oder -4, -8) kommen.

Die Stammtheiler dienen zur Definition der Charaktere der primitiven quadratischen Formen. Ich gehe aus von der Formel 9) § 5.

Bedeuten m' und m'' irgend zwei durch die Form (a, b, c) darstellbare Zahlen, so ergiebt jene Formel

$$4) \qquad 4m'm'' = (aX + BY)^2 - DY^2$$

woraus man folgert, wenn δ irgend ein Stammtheiler von D ist, und m' und m'' relativ prim zu δ:

$$5) \qquad (\delta, m') = (\delta, m'').$$

Dies ist zunächst evident, wenn δ ungerade ist, weil dann geradezu $m'm''$ nach dem Modul δ mit einem Quadrat congruent ist. Und 5) braucht also nur noch für $\delta = -4, +8, -8$ und ungerade m', m'' bewiesen zu werden. Diese Werthe kommen aber als Stammtheiler in folgenden Fällen vor:

$$\begin{array}{llll} \delta = -4, & D \equiv 0, -4 \pmod{16}, & m'm'' \equiv 1 & \pmod 4, \\ \delta = 8, & D \equiv 0, \ \ 8 \pmod{32}, & m'm'' \equiv \pm 1 & \pmod 8, \\ \delta = -8, & D \equiv 0, -8 \pmod{32}, & m'm'' \equiv 1, 3 & \pmod 8, \end{array}$$

woraus die Richtigkeit von 5) in diesen Fällen folgt.

Der Werth des Symbols (δ, m) ist also nicht von der individuellen Zahl m, sondern nur von der sie darstellenden Form oder genauer Formenclasse abhängig. Er wird der zum Stammtheiler δ gehörige Charakter dieser Classe genannt. Wir wollen ihn, indem wir die Classe mit k bezeichnen durch das Zeichen

$$6) \qquad \chi(\delta, k)$$

andeuten, oder, wenn die Bezeichnung von δ nicht nöthig ist, auch kürzer durch $\chi(k)$.

Es ergeben sich aus der Definition unmittelbar die folgenden Fundamentalsätze:

$$7) \qquad \chi(1, k) = 1,$$

$$8) \qquad \chi(\delta_1, k)\chi(\delta_2, k) = \chi(\delta_1\delta_2, k),$$

$$9) \qquad \chi(\delta, k')\chi(\delta, k'') = \chi(\delta, k'k''),$$

und wenn k_0 die Hauptclasse ist

10) $$\chi(\delta, k_0) = 1.$$

In 8) ist unter dem Product der beiden Stammtheiler $\delta_1 \delta_2$ der durch 1) definierte Stammtheiler δ zu verstehen, und in 9) bedeutet $k'k''$ die aus k' und k'' componierte Classe.

Nimmt man in 4) die beiden Zahlen m', m'' relativ prim zu einander und zu a und zu D an, was immer gestattet ist, so kann auch Y mit m' und m'' keinen gemeinsamen Theiler haben. Es folgt aber aus 4)

$$DY^2 \equiv (aX + BY)^2 \pmod{4m'},$$

und mithin nach § 2, IV

$$(DY^2, m') = (\Delta, m') = 1.$$

Es ist also für jede Classe k

11) $$\chi(\Delta, k) = 1.$$

Dies bedingt eine gewisse Abhängigkeit unter den Charakteren, durch die sich ihre Zahl auf die Hälfte reduciert. Zu jedem Stammtheiler δ nämlich läßt sich nach unserer symbolischen Multiplication ein bestimmter complementärer Stammtheiler δ' bestimmen aus

12) $$\delta\delta' = \Delta,$$

und nach 8) ist dann für jede Classe k

13) $$\chi(\delta, k) = \chi(\delta', k).$$

Das Complement von δ' ist wieder δ selbst, und jeder Primfactor, der in δ und δ' zugleich aufgeht, muß in Q aufgehen.

Durch 5) ist der Charakter $\chi(\delta, k)$ bestimmt durch eine durch die Classe k darstellbare Zahlen, die aber an gewisse Bedingungen gebunden war.

Diese Darstellung wollen wir nun etwas verallgemeinern. Wir wollen nämlich die Voraussetzung fallen lassen, daß die Zahl m relativ prim zu δ sei; nur daran wollen wir festhalten, daß m relativ prim zu Q sei, eine Bedingung, die also wegfällt, wenn D Stammdiscriminante ist.

Sei zunächst m durch die Formen der Classe k eigentlich darstellbar. Es giebt dann in der Classe k eine Form

$$\psi = (m, B, C),$$

deren erster Coëfficient m ist. Wir zerlegen m irgendwie in zwei Factoren ohne gemeinsamen Theiler, $m = nn'$, von denen der eine,

n, relativ prim zu δ, der andere, n', relativ prim zu δ' ist. Dies ist immer und meist auf mehrere Arten möglich, da nach der Voraussetzung, daß m relativ prim zu Q ist, m, δ, δ' keinen gemeinsamen Theiler haben. Die Form ψ entsteht dann durch Composition aus den beiden Formen

$$(n, B, Cn'), \qquad (n', B, Cn),$$

deren zu δ gehörige Charaktere nach 13) durch

$$(\delta, n), \qquad (\delta', n')$$

ausgedrückt sind, und daraus folgt nach 9)

$$14) \qquad \chi(\delta, k) = (\delta, n)(\delta', n').$$

Hierin kann aber auch noch die Forderung aufgegeben werden, daß m durch ψ eigentlich darstellbar ist; denn ein gemeinsamer Theiler der darstellenden Zahlen x, y bedingt einen quadratischen Factor von m, den man wieder in zwei quadratische Factoren zerlegt, von denen der eine zu n der andere zu n' genommen wird. Dadurch ändern sich (δ, n) und (δ', n') nicht.

Wir können diesem Resultat auch folgende Form geben.

Wir bestimmen zu jeder positiven Zahl n, die mit Q keinen Theiler gemein hat, eine Function $\chi(\delta, n)$ nach folgender Definition.

Man setze

$$n = \varepsilon n',$$

und bezeichne mit ε das Product aller der Primfactoren von n, die zugleich in δ aufgehen, so das n' relativ prim zu δ ist; dann setze man

$$15) \qquad \chi(\delta, n) = (\delta', \varepsilon)(\delta, n'),$$

wodurch $\chi(\delta, n)$ eindeutig und immer von Null verschieden definiert ist. Dann ist

$$16) \qquad \chi(\delta, ax^2 + bxy + cy^2) = \chi(\delta, k),$$

wenn (a, b, c) irgend ein Repräsentant der Classe k und x, y so gewählt sind, daß $ax^2 + bxy + cy^2$ mit Q keinen gemeinsamen Theiler hat.

Für die hierdurch definierte Function $\chi(\delta, n)$ gelten folgende Sätze, von denen der erste nach § 2, 1) unmittelbar aus 15) folgt

$$17) \qquad \chi(\delta, n_1)\chi(\delta, n_2) = \chi(\delta, n_1 n_2),$$

worin n_1, n_2 zwei beliebige positive Zahlen sind, die mit Q keinen gemeinsamen Theiler haben;

$$18)\qquad \chi(\delta, n)\sum^{e}(D, e) = \sum^{e}(\delta, e)(\delta', e'),$$

worin e die Reihe der Divisoren von n durchläuft und $n = ee'$, $\Delta = \delta\delta'$ ist.

Um die Formel 18) zu beweisen, zeigt man zunächst nach 17), daß wenn sie für $n = n_1$, $n = n_2$ gilt, sie auch für $n = n_1 n_2$ gilt, wenn n_1 und n_2 relativ prim sind. Dann ist 18) nur noch zu beweisen unter der Voraussetzung, daß n eine Primzahlpotenz ist, also, wenn $n = q^k$ gesetzt wird und q eine nicht in Q aufgehende Primzahl bedeutet

$$\chi(\delta, q^k)\sum_{0,k}^{s}(\Delta, q^s) = \sum^{s}(\delta, q^s)(\delta', q^{k-s}).$$

Wenn nun q nicht in δ aufgeht, so multiplicieren wir unter den Summenzeichen rechts mit $(\delta, q^{k-s})^2 = 1$ wodurch man nach § 2 1) und III erhält

$$(\delta, q^k)\sum(\Delta, q^{k-s}),$$

was mit der linken Seite übereinstimmt.

Geht aber q in δ, also nicht in δ' auf, so multiplicieren wir ebenso mit $(\delta', q^s)^2 = 1$ und erhalten wieder in Uebereinstimmung mit der linken Seite

$$(\delta', q^k)\sum^{s}(\Delta, q^s),$$

wodurch 18) bewiesen ist.

Die in 18) vorkommenden Summen

$$\sum(D, e), \qquad \sum(\delta, e)(\delta', e')$$

ändern sich nicht, wenn δ mit δ' vertauscht wird. Wenn also $\chi(\delta, n)$ von $\chi(\delta', n)$ verschieden ist, so müssen beide Summen gleich Null sein.

Ferner kann man noch, wenn δ_1, δ_2 zwei Stammtheiler von D sind, die Formel ableiten

$$19)\qquad \chi(\delta_1, n)\chi(\delta_2, n) = \chi(\delta_1\delta_2, n),$$

die wegen 17) nur für den Fall bewiesen zu werden braucht, daß n eine Primzahl ist, wofür man sie leicht aus

$$(\delta_1\delta_2)' = \delta_1'\delta_2 = \delta_1\delta_2'$$

ableitet.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1892.

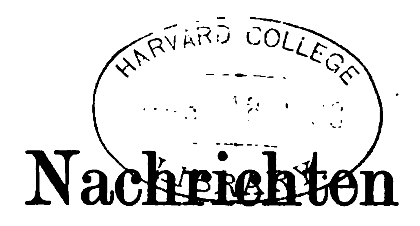
(Fortsetzung.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. C. Orthmann. Bd. XXI. Jahrg. 1889. Heft 2. Berlin 1892.
Leopoldina. Heft XXVIII. N. 5—10. 1892. Halle a. S.
Astronomische Mittheilnngen von der Königl. Sternwarte zu Göttingen. Herausgegeben v. Dr. Wilh. Schur. 2. Theil Göttinger Sterncatalog für 1860 nach Beob. v. W. Klinkerfues. Göttingen 1891.
Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung von A. Hirsch.
Verhandlungen abgehalten vom 8—17. Okt. 1891 zu Florenz. Berlin 1892.
Handbuch der organischen Chemie v. Dr. Beilstein. Dritte Aufl. 3. Lieferung (Band I. Lieferung 3). Hamburg 1892.
Oberlausitzische Gesellsch. der Wissenschaften. Neues Lausitzisches Magazin. 68. Band, 1. Heft. Görlitz 1892.
Naturhistorisch-medicinischer Verein in Heidelberg.
Verhandlungen. Neue Folge. 4. Band, 5. Heft. Heidelberg 1892.
Die Epiglottis. Vergleichend anatomische Studie v. Carl Gegenbaur (Prof. Kölliker gewidmet). Leipzig 1892.
Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien
a. Denkschriften. Philos.-historisch. Band 40.
Mathematisch-naturwissensch. Band 58.
b. Sitzungsberichte:
Philosophisch-historische Classe. Band CXXIV, CXXV.
mathematisch-naturwissensch. Band. C. Jahrg. 1891.
Abth. I. Mineralogie etc. Heft 1—7.
Abth. IIa. Mathematik etc. Heft 1—7.
Abth. IIb. Chemie. Heft 1—7.
Abth. III. Anatomie etc. Heft 1—7.
c. Archiv für österreichische Geschichte. 77. Band, 1. Hälfte.
d. Almanach. 41. Jahrg. 1891.
e. Register 111—120 der Sitzungsberichte der philosophisch-historischen Classe. XII. Wien 1890—91.
Kaiserl.-Königl. geologische Reichsanstalt.
Jahrbuch. Jahrg. 1891. XLI. Band. 2. u. 3. Heft. Wien 1892.
Musealverein für Krain:
a. Mittheilungen. 5. Jahrg. Erste und zweite Abth.
b. Izvestja. Drugi letnik. Laibach 1892.
Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. Bericht 1891. Prag 1892.
Akademie der Wissenschaften in Krakau.
Anzeiger. Mai 1892. Krakau 1892.
Die Internationale Erziehungs-Arbeit.
Kritiken. (Deutsche Zeitung, Morgenausgabe). Wien 1892.
The Royal Society.
Proceedings. Vol. LI. N. 308, 309.
The Zoological Society of London.
Proceedings. Part I. 1892. London 1892.
The London Mathematical Society.
Proceedings. N. 433—439. London 1892.

The Royal Astronomical Society.
Monthly notices. Vol. LII. N. 7. Mai 1892. London 1892.
The Royal Microscopical Society.
a. Journal 1892. Part 3. June.
b. Charter and Bye-Laws. List of fellows 1892. London 1892.
The Royal Physical Society.
Proceedings. Session 1890—91. Edinburgh 1892.
Nature. Vol. 46. N. 1178—1183 und die fehlende Nr. Vol. 45. 1166.
The Royal Society of New South Wales.
Journal and Proceedings. Vol. XXV. 1891. Sidney and London.
The Canadian Institute:
a. Transactions. N. 4. 1892. Vol. II. Part II.
b. Annual Archeological Report (An Appendix to the report of the Minister of education. Ontario).
c. An appeal to the Canadian Institute on the rectification of Parliament by Sandford Fleming. Toronto 1891—92.
Documents relatives à l'unification de l'heure etc. Ottawa 1891.
La Société Hollandaise des sciences a Harlem.
Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXVI. 1re Livr. Harlem 1892.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Tijdschrift voor N. Taal- en Letterkunde. XI. Deel. Nieuwe Reeks 3 Deel. Tweede Afl. Leiden 1892.
Flora Batava 295e 296e Afl. Leiden.
Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXVII. 1890—91. Första & Andra Afdelingen. Lund 1890—91.
Den Nordske Nordhars-Expedition 1876—1878. XXI. Zoologi. Christiania 1892.
Société Imperiale des Naturalistes de Moscou.
Bulletin. Année 1892. N. 1. Moscou 1892.
Académie Royale de Belgique.
Bulletin. 3me série. Tome 23. N. 5. Bruxelles 1892.
La Société Mathématique de France.
Bulletin. Tome XX. N. 3. Paris 1892.
L'otite grippale observée a Paris en 1891. Par le Dr. Loewenberg. Tours 1892.
Sull' origine del solfo nei giagimenti solfiferi della Sicilia. Per Giorgio Spezia. Torino 1892.
Rassegna delle scienze geologiche in Italia. Anno 1. 2° semestre 1891. Fasc. 3° e 4° (parte 2a). Roma 1892.
Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli).
Rendiconti. Serie 2a—Vol. VI (Anno XXXI) fasc. 1—5. 1892. Napoli 1892.
Società Toscana di scienze naturali.
Atti. Processi verbali. Vol. VIII. 13 Marzo 1892.
R. Accademia delle scienze di Torino.
Atti. Vol. XXVII. Disp. 7a, 8a. 1891—92. Torino 1892.
Reale Accademia dei Lincei:
a. Rendiconti. Classe di scienze morali storiche e filologiche. Serie V. Vol. I. Fasc. 3. 4.
b. Atti. 1892. Serie Quarta. Classe di scienze morali storiche e filologiche. Vol. X. Parte 2a. Notizie degli Scavi. Genn. Febbr. 1892.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. Januar. | № 2. | 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 14. Januar.

Beiträge zur Kenntniß der Hieracienflora Osteuropas.

Von

A. Peter.

I. Die Piloselloiden der Umgebung von Moskau.

Unter den polymorphen Pflanzensippen Europas sind die Hieracien unstreitig die schwierigsten. Um so nothwendiger ist ein nicht rastendes Studium derselben; jede Erweiterung unserer Kenntniß dieser Gattung muß erwünscht sein. Für die Mehrzahl der Piloselloiden und einen Theil der Archieracien hat die neueste Monographie derselben [1]), soweit diese Sippen in Mitteleuropa vorkommen, die bisherigen Forschungen mit ungewöhnlich eingehenden neuen Untersuchungen verarbeitet. In Nordeuropa beschäftigt sich gegenwärtig eine Anzahl Forscher wieder intensiver mit der Darlegung der skandinavischen und finnländischen

1) C. v. Naegeli und A. Peter. Die Hieracien Mitteleuropas I. Piloselloiden 1885; II. Archieracien 1886 ff.

Hieracien [1]). Bezüglich des östlichen Europa aber besteht noch jetzt eine weite Lücke in der Hieracienkenntniß, welche um so mehr ausgefüllt werden sollte, als manche europäische Hieracientypen erwiesenermaßen auch in den centralasiatischen Gebirgen, einzelne sogar noch im japanischen Reiche angetroffen werden. Der oben genannten Monographie der Gattung *Hieracium sect. Piloselloidea* ist, abgesehen von Finnland, nur sehr wenig Material aus Rußland zugänglich gewesen, und seit dieser Publikation ist meines Wissens über russische Hieracien nichts von Bedeutung mitgetheilt worden, so daß die Kenntnisse über die in Osteuropa vorkommenden Piloselloiden auch heute noch höchst ungenügende sind.

Um so erwünschter war mir daher die Zusendung der Sammlungen, welche Herr Eisenbahndirektor Petunnikov in Moskau während der Jahre 1889 bis 1891 in dem gleichnamigen Gouvernement mit größter Sorgfalt gemacht hatte.

Dieselben bieten vielfach Gelegenheit, die Kenntniß der schwierigen Pflanzensippe nach systematischer und phytogeographischer Richtung hin zu ergänzen und zu erweitern.

Besonders hervorzuheben ist 1) der Nachweis, daß mehrere der im Osten Deutschlands oder in Finnland vorkommenden Sippen eine ausgedehnte östliche Verbreitung haben, 2) daß in Osteuropa außer manchen mitteleuropäischen Sippen noch andere bisher unbekannt gebliebene existiren, endlich 3) daß einige mitteleuropäische Hieracienformen im Osten durch sehr ähnliche ersetzt werden. Im ganzen erscheint der Hieracienbestand des Moskauer Gouvernements als ein unerwartet großer, so daß sich vermuthen läßt, daß auch die noch weiter östlich gelegenen Landstriche nicht allzu arm an Hieraciensippen sein werden, die wohl noch andere Aufschlüsse geben können.

Im Nachstehenden wird zunächst eine Aufzählung der von Herrn Petunnikov bei Moskau gesammelten Sippen gegeben mit den nothwendigen Bemerkungen und den Beschreibungen der neuen Subspecies und Varietäten, entsprechend der in meiner Monographie

---

1) P. Norrlin. Adnotationes de Pilosellis Fennicis I. 1884.

A. Berlin. Kärlväxter, insamlade under den svenska expeditionen till Grönland 1883. Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1884. Stockholm.

E. Norrlin. Bidrag till Hieracium-Floran i Skandinaviska halföns mellersta delar. Acta Soc. pro Fauna et Flora Fennica III. 1888.

H. Dahlstedt. Hieracia exsiccata. 1889. Cent. 1—3. — De Hieraciis nonnullis Scandinavicis in: Acta horti Bergiani I. 1891.

M. Elfstrand Botaniska Utflygter. 1890.

der Hieracien angewandten Nomenklatur und Methode der Beschreibung. In einer folgenden Mittheilung beabsichtige ich weitere Angaben über osteuropäische Hieracien zu liefern und so eine Ergänzung der Monographie für die östlichen Gebiete überhaupt darzubieten.

A. Pilosellina.

I. Hieracium Pilosella Linn.

1. **H. Pilosella * Borussorum N. P.** Monogr. I, 136; eine reicher behaarte Form *(pilosum)*. — Ostiankino im Distrikt von Moskau Juni 1891. — Die Pflanze ist hier sehr kräftig, wird öfters bis 30 cm hoch und zeigt häufig Verzweigung des Schaftes in wechselnder Höhe über der Rosette. Da sie mit den unten anzuführenden Formen von *H. flagellare* gemeinsam vorkommt, so ist eine Beeinflussung durch diese nicht ausgeschlossen. Bisher bekannte Fundorte sind in Ostpreußen: bei Königsberg im Thal zwischen Metgethen und Friedrichsberg, in den Medenauer Seebergen, in der Kapornschen Heide!!, bei Juditten (Bänitz!); bei Gutstadt auf einem Sandfelde am Buchenwalde!!, bei Lyck vor der Swinia Gora (Sanio!); in Oesterreich am Schneeberg 1300 m (Halacsy!), am Tichyofen unweit Kalksburg bei Wien (Wiesbaur!); in den botanischen Gärten von Petersburg und München ehedem kultiviert!! — eine kahlere Form *(calvescens)* in Ostpreußen: Serpentener Wiese bei Gumbinnen auf torfigem Boden!!; Bayern: Haselhof bei Regensburg (Loritz!).

2. **H. Pilosella * angustius N. P.** Monogr. I, 157, die gewöhnliche Form *(genuinum pilosum)*, welche in Mittel- und Südeuropa weit verbreitet ist. — Moskau, Ende Juni 1889.

3. **H. Pilosella * subviresens Pet.** in Bot. Jahrb. V, 254; Monogr. I, 160. — Außer den l. c. beschriebenen Formen dieser Unterart sind mir seit langer Zeit noch andere bekannt, welche jedoch in die Monographie nicht aufgenommen worden sind, darunter eine solche, die auch in der Sammlung Petunnikovs wiederkehrt. Hier eine Uebersicht der Sippe mit Einschluß der letztgenannten Varietät:

H. * subvirescens Pet.

α. **genuinum.** Schäfte 1 oder 2. Blätter grün. Hüllschuppen grau, hell- (kult. grün-) randig. Stolonen schlank. — Mit verschiedener Behaarung wie l. c. angegeben; weit verbreitet in Mitteleuropa.

β. **chlorophyllum.** Schäfte 1 oder 2. Blätter hellgrün, etwas glaucescirend. Hülle oval, Schuppen dunkelgrau, schmal hellrandig. Stolonen dünn. — Bisher nur aus Graubünden bekannt.

γ. **polyscapum n. var.** Schäfte bis 5. Blätter hellgrün. Hülle niedergedrückt-bauchig, Schuppen grau, etwas hellrandig. Stolonen schlank. — Tritt mit kürzerer und geringer Behaarung auf: Haspelmoor zwischen Augsburg und München!!; Gunskirchen bei Wels in Oberösterreich (Wiesbaur!), — oder mit reicher langer Behaarung: zwischen Ammerland und Wolfrathshausen bei München!! Moskau (Anf. Juli 1889 Pettunn.!) hier die Haupt- und Nebenschäfte nicht selten gablig.

4. **H. Pilosella * limnogenes n. subsp.** — Eine Pflanze, welche mit der von Petunnikov bei Moskau im Jahr 1889 gesammelten sehr übereinstimmt, besitze ich ebenfalls seit vielen Jahren aus den Mooren bei München (Haspelmoor!; Erdinger Moor zwischen Freising und Gaden!!). Sie unterscheidet sich von *H. subvirescens*, zu dessen nächster Verwandtschaft sie gehört, nur wenig durch größere Köpfe, dunklere Hüllschuppen und die schwarze Behaarung: Schäfte 1 oder 2, 20—30 cm hoch, schlank. Blätter länglichlanzettlich bis lanzettlich, stumpf bis spitzlich, hellgrün. Hülle 10,5—12 mm lang, bauchig; Schuppen breitlich, schwarz, hellrandig. Haare überall mäßig oder ziemlich zahlreich, an der Hülle schwarz, 1 mm, am Schaft 1,5—2,5 mm, auf den Blättern 3—4 mm lang. Drüsen an und dicht unter der Hülle reichlich, abwärts bis zum Grunde des Schaftes zerstreut. Flocken an Hülle und Schaft reichlich, Schuppenränder nackt, Blattrücken graulichgrün. Randblüthen schwach rothspitzig. Ausläufer verlängert, schlank.

5. **H. Pilosella * stenodes N. P.** Monogr. I, 158. — Kossino im Distrikt von Moskau Juni 1891; war mir bisher nur von Ágasvár im Matragebirge Ungarns (Borbás!) bekannt.

B. *Auriculina.*

II. Hieracium Auricula Lmk. et D. C.

6. **H. Auricula * Auricula Pet.** in Bot. Jahrb. V, 256; N. P. Monogr. I, 189. — Die in Europa so allgemein verbreitete typische Form kommt offenbar auch bei Moskau reichlich vor: Swenigorod im Westen des Gouvernements Ende Mai 1890, Distrikt von Dmitrov im Norden des Gouvernements Juni 1890.

C. *Collinina.*

III. Hieracium collinum Gochn.

7. **H. collinum * altaicum N. P.** Monogr. I, 306. — Es liegt eine größere Anzahl Exemplare vor, welche mit der l. c. aus dem Altai beschriebenen Pflanze bis auf die Behaarung der Blätter, die

bei den Moskauer Exemplaren viel geringer ist, sehr gut übereinstimmt. Auch ist der Strauß hier etwas reichköpfiger als bei der altaïschen Pflanze. — Kossino im Distrikt von Moskau, Juni 1891.

8. **H. collinum * perichlorum n. subsp.** — Zur Gruppe des *H.* * *stenocephalum* (Monogr. I, 312) gehört eine bei Moskau recht häufig vorkommende Sippe, welche mit keiner mir bekannt gewordenen *collinum*-Form genau übereinstimmt, sich aber einerseits dem *H.* * *Porcii* (l. c. 313), anderseits dem *H.* * *altaicum* nahe anschließt. Die Köpfchenhüllen sind sehr schlank, Drüsenhaare reichlich vorhanden, der Kopfstand ist übergipflig-mehrköpfig. Wegen der lebhaft grünen Farbe der sehr schmalen Hüllschuppenränder mag die Bezeichnung *perichlorum* für die ganz wohl charakterisierte Pflanze vorgeschlagen werden. — Moskau Ende Juni bis Juli 1889.

Stengel (25—)30—50 cm hoch, schlank, in der unteren Hälfte purpurroth angelaufen. Kopfstand doldig bis laxrispig, locker, zuerst gleichgipflig, dann ± übergipflig, mehrköpfig. Akladium 3—6 mm lang; Strahlen 2. Ordnung 3—5, alle gedrängt oder genähert oder untere locker stehend, dünn; Ordnungen 3—4; Kopfzahl 6—20. Blätter lanzettlich, stumpflich bis spitz, am Rande mit sehr kleinen entfernten Zähnchen, ± gelblichgrün bis bläulichgrün, ziemlich weich; meist 2 Stengelblätter in der unteren Hälfte, von denen das untere ansehnlich, das obere nur 1—3 cm lang ist. Hülle 6—7 mm lang, schlank cylindrisch mit etwas herabgezogener später gerundeter Basis; Schuppen sehr schmal, sehr spitz, schwärzlich, sehr schmal hellgrün berandet. Bracteen grau. Haare überall reichlich, hell, an Hülle und Blättern 1 mm, am Stengel bis 2 mm lang. Drüsen der Hülle mäßig zahlreich, an Kopfstielen und Stengelspitze sehr reichlich, schwarz, abwärts bis zur Mitte stark vermindert. Flocken der Hülle mäßig zahlreich, auf den Schuppenrändern 0, Kopfstiele graufilzig, Stengel oben reichflockig, abwärts allmählich fast nackt werdend, Blätter oberseits flockenlos, unterseits zerstreut-flockig. Blüthen dunkelgelb. Ausläufer unterirdisch, verlängert, dünn, mit endständiger Blattrosette.

Neben dieser kurzhaarigen Form kommt auch eine an Köpfchen und Stengeln 3 mm lang behaarte vor, deren etwas glaucescirende Blätter oberseits armhaarig sind: Moskau Ende Juni 1889.

9. **H. collinum * brevipilum N. P.** Monogr. I, 312. — Die bisher nur aus Livland, Ostpreußen, Galizien und Siebenbürgen bekannte weißhaarige Form dieser ausgezeichneten Subspecies sammelte Petunnikov im Distrikt Dmitrov im Norden des Moskauer Gouvernements Juni 1890; eine dunkelhaarige Form

2. obscuripilum reichlich bei Kossino im Distrikt von Moskau

Juni 1891. Diese habe ich schon 1873 in Ostpreußen bei Angerburg (im Damerauwalde!!) gesammelt, auch besitze ich sie von Königsberg in Pr. (am Eisenbahndamm bei Kellermühle, Baenitz!), ferner aus Galizien (in Wäldern bei Lemberg, Rehmann!), aus Siebenbürgen (Wiesen in der Buchenregion des Parengu, Csato! als *H. subauratum Schur* in sched.) und Serbien (Tekije, Pancic!). — Blätter stumpflich oder spitzlich; meist nur ein Stengelblatt im unteren $^1/_5$ des Stengels; Hülle 7—7,5 mm lang; Schuppen ± hellrandig; Haare dunkel, am Stengel zuweilen bis 1,5 mm lang; im ganzen also ein Bindeglied zwischen *H.* * *brevipilum* und dem typischen *H. collinum*, wie deren noch mehrere andere in Dalmatien, Serbien und sonst angetroffen werden.

D. Cymosina.

IV. Hieracium cymosum L.

10. **H. cymosum * denticuliferum Norrl.** Adnot. de Pil. Fenn. I (1884) p. 167; N. P. Monogr. I, 418. — Ostakino im Distrikt von Moskau Juni 1891; ist bisher nur aus Finnland bekannt gewesen und deutet darauf hin, daß manche der im nordwestlichen Rußland vorkommenden Hieracien eine weitere Verbreitung haben mögen, als man bisher anzunehmen Grund hatte.

11. **H. cymosum * leptothyrsum n. subsp.** — Sophino im Distrikt Bronnizy des Moskauer Gouvernements Juni 1891. — Steht dem *H.* * *suprafastigiatum* N. P. Monogr. I, 420 nahe, welches in die Verwandtschaft des *H.* * *cymigerum* gehört, wie so viele der durch Norrlin für Finnland festgestellten *Cymosina.* — Stengel 35—60 cm hoch, schlank bis dünn, aufrecht. Kopfstand doldig, meist mit abgerücktem unterstem Ast (selten ganz aufgelöst), sehr locker, stark übergipflig; Akladium 4—6 mm lang; Strahlen 2 Ordn. 4—6, obere gedrängt, dünn, schräg aufrecht; Ordnungen 4—5(—6). Kopfzahl 15—30(—45). Blätter: äußere länglich, innere bis lanzettlich, in den Grund verschmälert, stumpf bis spitz, ± gelblichgrün, etwas derb; 2—3 Stengelblätter im unteren $^1/_3$. Hülle 5—5,5 mm lang, schlank cylindrisch, am Grunde bald gestutzt; Schuppen sehr schmal, spitz, dunkel, sehr schmal hellgrün berandet. Brakteen hellgrau. Haare der Hülle fehlend, an den Kopfstielen und oben am Stengel vereinzelt, hier abwärts bald reichlicher und bis zum Grunde an Zahl zunehmend, hell, 0,5—1 mm, auf den Blättern beiderseits ziemlich reichlich, weich, 0,5 mm lang. Drüsen an Hülle und Kopfstielen sehr zahlreich, klein, am Stengel oben ziemlich reichlich, abwärts langsam vermindert bis über die Mitte hin-

aus, an den Stengelblättern 0. Flocken der Hülle mäßig zahlreich, auf den Schuppenrändern 0, an den Kopfstielen sehr reichlich oder graulichen Filz bildend (doch werden die Kopfstiele zuletzt grün), am Stengel oben reichlich, abwärts allmählich vermindert, auf den Blättern oberseits zerstreut, unterseits ± reichlich. Blüthen gelb. Stolonen fehlen.

E. Echinina.

V. Hieracium echioides Lumn.

12. H. echioides * multifolium n. subsp. Die hier vorliegende Pflanze kenne ich von mehreren Orten Norddeutschlands schon seit längerer Zeit. Sie reiht sich vermöge ihrer großen sehr lockeren doldigen Inflorescenz an *H. * macrocymum* und *H. * Freynii* an, von denen sie nach dem typischen *H. * echioides* hinüberleitet.

Stengel 60—80 cm hoch, dicklich oder ziemlich schlank, aufrecht. Kopfstand doldig, groß, locker, übergipflig; Akladium (5—)10—20 mm lang; Strahlen 2. Ordnung 5—7, schlank, sehr gedrängt, die untersten 1—3 entfernt stehend; Ordnungen 4—5; Kopfzahl 25—35. Blätter zungenförmig-lanzettlich, stumpf oder stumpflich, gelblich-graugrün; Stengelblätter 12—15; längstes Internodium das 2.—4. unter der Dolde. Hülle 7—7,5 mm lang, oval mit gerundeter Basis; Schuppen sehr schmal, spitz, grau, randlos. Bracteen grau. Haare der Hülle mäßig zahlreich, hell, 1 mm, an den Kopfstielen sehr spärlich, am Stengel oben zerstreut, von der Mitte abwärts zahlreicher, unten sehr reichlich, borstlich, aufrecht, hell, 4—6 mm, auf beiden Blattseiten sehr zahlreich, oberseits borstlich, 3—4 mm lang, unterseits steif. Drüsen fehlen. Flocken: Hülle grau, Kopfstiele weißlich, Stengel graulich oder reichflockig, Blätter oberseits mit ± zerstreuten oder spärlichen, unterseits mäßig zahlreichen bis reichlichen Flocken. Blüthen gelb. Stolonen fehlen. — Pommern: Garz a/O. (Minks!); Mark: Frankfurt a/O. (Buek!), auf den sandigen Hügeln der Jahnberge hinter Paulinenaue (Koernicke!); Rußland: Distrikt von Bogorodsk im Osten des Moskauer Gouvernements Ende Juni 1890 (Petunnikov!).

13. H. echioides * echioides var. Tauscheri N. P. Monogr. I, 485. — Distrikt von Bogorodsk im Osten des Moskauer Gouvernements Ende Juni 1890. — War mir bisher mit Sicherheit nur aus der Umgebung von Budapest bekannt.

F. Praealtina.

VI. Hieracium florentinum All.

14. H. florentinum * subfrigidarium N. P. Monogr. I, 532. — Petunnikov sammelte Mitte August 1891 im Distrikt Serpuchov

im Süden des Moskauer Gouvernements einige wenige Exemplare einer Pflanze, deren Verwandtschaft unzweifelhaft an der eben genannten Stelle zu suchen ist, die aber nach ihrem Erhaltungszustande und deswegen, weil sie der 2. Blüthezeit angehören, es nicht mit aller Sicherheit entscheiden lassen, ob sie zur *var. aquilonare* gehören. Auf diese Zugehörigkeit ist allerdings aus der sonstigen Verbreitung des *H. * aquilonare* zu schließen, welches von der Tatra, Dresden und Graudenz durch West- und Ostpreußen bis Petersburg bekannt ist.

15. **H. florentinum * cylindriceps N. P.** Monogr. I, 554. — An genannter Stelle habe ich eine Pflanze beschrieben, deren Merkmale (ganz besonders Form und Behaarung der Stengelblätter) auf eine verbindende Stellung zwischen den Spec. *H. florentinum All.* und *H. Fussianum Schur* hinweisen. Dieselbe lag mir vor aus Istrien: auf dem Arsot (Rossi!); vom croatischen Litorale (Rossi!); Türkei: trockene Berghänge zwischen immergrünem Gebüsch bei Chyrka unweit Dédéaghatsch 160—195 m (Dingler!). Nun hat Petunnikov auch bei Moskau eine sehr ähnliche, nur durch etwas zahlreichere Haare und Flocken der Köpfchenhüllen abweichende Pflanze gesammelt, welche die Möglichkeit einer weiteren Verbreitung nach Osten der Spec. *H. Fussianum* eröffnet. — Moskau Ende Juni 1889.

16. **H. florentinum * Almquistii N. P.** Monogr. I, 538. — Eine mit *var. stipitigemmum* fast übereinstimmende Pflanze im Distrikt Kolomna im Süden des Gouvernements Moskau Anfang Juni 1890; die Behaarung der Blattoberseite ist noch geringer als l. c. angegeben. War bisher nur auf der Insel Gottland gefunden worden, — die mit ausschließlich sitzenden Rosetten innovierende Form nur in Schweden, Gottland und Finnland.

VII. Hieracium magyaricum Pet.

17. **H. magyaricum * thaumasium Peter** in Bot. Jahrb. V, 284; N. P. Monogr. I, 583. — Die Pflanze ist mir bekannt aus Kärnten: am Predilpass bei Raibl!!; Niederösterreich: Kalksburg bei Wien (Wiesbaur)!); Mähren: am Stollfürst bei der Burg Neuhäusel unweit Znaim!!; auch aus Thüringen: am Wegrande zwischen Golmsdorf und Graitschen bei Naumburg (Sagorski!) und der Mark: Trebnitzer Hügel zwischen Droschen und Heidewilzen (Uechtritz!). Petunnikov sammelte sie Ende Mai 1890 im Distrikt Swenigorod im Westen des Moskauer Gouvernements. — Sehr ähnliche Formen wurden ebenfalls im südöstlichen Centraleuropa beobachtet und zwar

eine behaartere (*pilosicaule*) in Mähren: Kaidling bei Znaim und in den Hohlwegen zwischen Znaim und Klein-Teßwitz (Oborny!);

Niederösterreich: zwischen Gaden und Sittendorf bei Wien (Wiesbaur!), Kalenderberg bei Mödling (Müllner!) und

eine kleinköpfige (*microcephalum*, l. c.) sehr zarte Form auf den Karawanken von Krain: Abhänge der Roschiza über Lengenfeld 975 m (Dingler!).

G. *Zwischenformen.*

Collinina-Pilosellina.

VIII. Hieracium prussicum N. P.

18. H. prussicum N. P. Monogr. I, 375. — Bei Kossino im Moskauer Distrikt (Juni 1891) kommt eine (in mehreren Exemplaren vorliegende) Pflanze vor, welche dem *H.* * *prussicum* zwar recht nahe steht, indessen durch glaucescirende Blattfarbe, mehr gerundete Köpfchenhüllen, grünlich berandete Hüllschuppen gegen *H.* * *chlorops* (l. c. 376) abweicht und daher beide Sippen verbindet. Auffallend ist jedoch die sattgelbe Farbe und die kräftige Rothspitzung der Außenseite der Randblüthen. Durch diesen Fund wird ebenfalls die Vermuthung nahegelegt, daß alle *prussicum*-artigen Piloselloiden hybrider Abstammung sind, und daß bei der Kreuzung der Species *Pilosella* und *collinum* je nach den zusammentretenden Varietäten erkennbar ungleiche Bastarde entstehen. Daß das vorliegende *prussicum-chlorops* hybrid ist, wird ferner dadurch gestützt, daß unter den von Petunnikov gesammelten Pflanzen sich auch solche befinden, die bei Moskau stark verbreitet sind und die Merkmale der nicht hybriden *flagellare*-Sippe aufweisen. Sie sind noch nicht beschrieben und sollen im folgenden charakterisirt werden:

IX. Hieracium flagellare Willd.

19. H. flagellare * mocoviticum n. subsp. — Distrikt von Dmitrov im Norden des Gouvernements Moskau Juni 1890; Moskau Ende Juni und Juli 1889; Ostankino im Moskauer Distrikt Juni 1891. — Stengel 10—15(—25) cm hoch, schlank, etwas aufsteigend. Verzweigung in verschiedener Höhe gablig; Akladium = $^1/_4$—$^7/_8$ (—$^1/_1$) des Stengels, Strahlen 2. Ordnung meist 1; Ordnungen 2(—3); Kopfzahl 2(—3). Blätter schmal lanzettlich, ± spitz, glaucescirend, ziemlich derb; das Stengelblatt gewöhnlich sehr klein. Hülle 9—10 mm lang, eiförmig, am Grunde gerundet. Schuppen schmal, sehr spitz, schwärzlich, sehr schmal aber lebhaft grünrandig. Bracteen hell. Haare an der Hülle mäßig zahlreich, 1—1,5 mm, an Caulomen und Blättern zerstreut, weich,

hell, 2—3(—4) mm lang, hier und am Mittelnerv unterseits ziemlich reichlich. Drüsen der Hülle reichlich, an den Kopfstielen oben sehr zahlreich, schwarz, abwärts am Stengel rasch sich vermindernd. Flocken auf der Mitte der Hüllschuppen reichlich, auf den Schuppenrändern fast 0, Caulome oben grau, abwärts bis zum Grunde reichflockig, Blätter oberseits nackt, unterseits ziemlich reichflockig bis graulichgrün. Blüthen sattgelb, die randständigen außen gleichfarbig oder zuweilen röthlich gespitzt. Ausläufer verlängert, schlank; Flagellen werden öfters entwickelt.

H. moscoviticum gehört wie das folgende *H. Petunnikovii* einer Gruppe von *flagellare*-artigen Sippen an, welche in den Sudeten, Beskiden und Centralkarpathen die Höhenlagen zwischen 880 und 1360 m bewohnen, von denen jedoch auch eine bei Stanislawow in Galizien gefunden wird. Sie sind vom eigentlichen *H. flagellare* durch viel schlankeren Wuchs, kleinere und am Grunde mehr abgerundete (nicht bauchige oder niedergedrückte) Köpfchenhüllen mit dunkleren Hüllschuppen und durch das weit geringere Wucherungsvermögen verschieden; gleichzeitig erinnern sie durch einige Merkmale, besonders durch die Gestalt des Involucrums und durch ihren Habitus an das nordeuropäische *H. cernuum Fr.*

20. H. flagellare * Petunnikovii n. subsp. — Moskau Ende Juni und Juli 1889. — Stengel (15—)20—30 cm hoch, schlank, aufsteigend, in sehr verschiedener Höhe gablig, Akladium = $^1/_{10}$—$^3/_4$ desselben, Strahlen 2. Ordn. 1—2, sehr entfernt, Ordnungen 2—3, Kopfzahl 2—3(—5). Blätter länglich bis fast lanzettlich, gerundetstumpf bis spitzlich, hellgrün, weich; das Stengelblatt unscheinbar. Hülle 9—10 mm lang, eiförmig bis fast rundlich, am Grunde zuerst gerundet, bald ± gestutzt; Schuppen breitlich, meist sehr spitz, schwärzlich, stark hellrandig. Bracteen dunkel. Haare der Hülle reichlich, etwas dunkel, 1,5—2 mm, an den Caulomen ebenso, 3—5 mm, oben dunkel, abwärts hell, am Stengelgrunde sehr reichlich, auf den Blättern 3—5 mm lang, weich, oberseits zerstreut, unterseits reichlich. Drüsen der Hülle zerstreut, an den Kopfstielen sehr reichlich, dunkel, abwärts am Stengel sehr vermindert. Flocken der Hülle reichlich, auf den Schuppenrändern spärlich, Caulome oben grau, abwärts ± reichflockig, Blätter oberseits nackt, unterseits reichflockig oder graulichgrün. Blüthen sattgelb, die randständigen außen etwas röthlich gespitzt. Ausläufer verlängert, schlank. — Dem *H. * tatrense* ähnlich, aber durch die hellfarbigen Köpfchenhüllen, die reichere Behaarung, die minder zahlreichen Drüsenhaare und die geringere Beflockung der Blätter von demselben abweichend.

Collinina - Auriculina.

X. Hieracium spathophyllum N. P.

21. H. spathophyllum * curvatum n. subsp. — Distrikt Swenigorod im Westen des Moskauer Gouvernements Ende Mai 1890 in Gesellschaft des *H. Auricula.*

Stengel c. 17 cm hoch, schlank, bogenförmig aufsteigend. Kopfstand fast doldig, geknäuelt; Akladium 3—4 mm lang; Strahlen 2. Ordn. 2—3, gedrängt; Ordnungen 3; Kopfzahl 4—8. Blätter: äußerste spatelig, gerundet-stumpf, übrige schmallanzettlich, bis spitz, alle glaucessirend, etwas derb; 1 Stengelblatt im unteren 1/3. Hülle 8 mm lang, eiförmig mit gerundeter Basis; Schuppen breitlich, stumpflich, schwarz, hellrandig. Bracteen dunkel. Haare der Hülle ziemlich reichlich, dunkel, 1,5 mm, am Stengel zerstreut, 2—4 mm, oben dunkel, abwärts hell, auf den Blättern nur am Rande mäßig zahlreich, 1—3 mm lang, etwas steif, am Mittelnerv der Unterseite reichlich, auf den Flächen fast 0. Drüsen der Hülle ziemlich reichlich, an den Caulomen oben reichlich, schwarz, abwärts bis zum Stengelgrunde allmählich vermindert. Flocken der Hülle mäßig zahlreich, auf den Schuppenrändern 0, Kopfstiele weißlich, Stengel oben ebenso, abwärts mit rasch verminderten Flocken, diese am Grunde nur mäßig zahlreich, auf den Blättern oberseits 0, unterseits zerstreut. Blüthen ziemlich sattgelb. Stolonen verlängert, sehr schlank. — Die Pflanze steht deutlich dem *H. Auricula* näher als dem *H. collinum* und schließt sich am ehesten den *H. * diatentum* und *H. * pubens* (Monogr. I p. 392) an, bewahrt aber durch die schmale Blattform und den geknäuelten Kopfstand die Eigenthümlichkeit ihrer Erscheinung.

22. H. spathophyllum * longatum n. subsp. — Distrikt Dmitrov im Norden des Gouvernements Moskau Juni 1890. — Eine andere zur Verwandtschaft des *H. spathophyllum* gehörige Pflanze, welche dem schlesischen *H. * polyastrum* am nächsten steht. Sie zeigt aufs deutlichste ihre Stellung zwischen *H. collinum* und *H. Auricula.* — Stengel (15—)30—40 cm hoch, schlank bis dicklich, schwächlich, etwas aufsteigend oder fast aufrecht. Kopfstand rispig oder gewöhnlicher (mindestens nach oben) doldig, locker, zuletzt stark übergipflig; Akladium 6—12 mm lang; Strahlen 2. Ordn. 3—5, genähert oder gedrängt, nur der unterste zuweilen entfernt (aber selten entwickelt), alle sehr schlank; Ordnungen 3(—4); Kopfzahl 6—12. Blätter spatelig-lanzettlich bis lanzettlich, gerundet-stumpf bis spitzlich, kurz, derb, glaucescirend; 1 Stengelblatt nahe der Rosette. Hülle (6—)7—8 mm lang, kurz cylindrisch mit gestutzter

Basis; Schuppen ziemlich schmal, stumpf, dunkel, hellrandig. Bracteen hell. Haare an Hülle und Kopfstielen 0, am Stengel oben vereinzelt, abwärts spärlich, hell, 2—3 mm, auf den Blättern nur am Rande mäßig bis sehr zerstreut, weich, 1—3 mm, am Rückennerv ziemlich zahlreich, sonst 0. Drüsen an Hülle und Kopfstielen sehr reichlich, kurz, am Stengel oben reichlich, abwärts bis zum Grunde nur sehr allmählich vermindert. Flocken der Hülle zerstreut, auf den Schuppenrändern 0, Kopfstiele grau, Stengel bis zum Grunde vermindert-flockig, Blätter oberseits nackt, unterseits mäßig flockig. Blüthen gelb. Ausläufer wenig verlängert, schlank oder dünn, nach Art des *H. Auricula*.

Cymosina-Auriculina.

XI. Hieracium sciadophorum N. P.

23. H. sciadophorum * leptophyes n. subsp. — Moskau Ende Juni 1889. — Offenbar ein *H. cymigerum* + *Auricula*, wie sich an Behaarung und Köpfchenhüllen hier noch viel deutlicher zeigt als bei *H.* * *ignotum* N. P. Monogr. I, 441. — Stengel 35—38 cm hoch, sehr schlank, schwächlich, aufrecht. Kopfstand fast doldig, locker, fast gleichgipflig; Akladium 5—10 mm lang, Strahlen 2. Ordn. 2—3, genähert, dünn; Ordnungen 2(—3); Kopfzahl 3—5. Blätter: äußere spatelig, gerundet stumpf, in den langen Stiel verschmälert, die übrigen ± spatelig-lanzettlich, stumpf bis spitz, langsam in die stielartige Basis herablaufend, alle glaucescirend, weich; Stengelblätter 3, rasch decrescirend, oberstes meist über der Stengelmitte inserirt, 1—2 cm lang. Hülle 7—8 mm lang, cylindrisch mit gerundeter, dann gestutzter Basis; Schuppen schmal, stumpf, schwärzlich, stark hellrandig. Bracteen hell. Haare der Hülle spärlich, dunkel, 0,5 mm, an den Kopfstielen vereinzelt, am Stengel sehr zerstreut, hell, 0,5 mm, nur ganz am Grunde reichlich, auf den Blättern oberseits 0, nur am Rande und Hauptnerv der Unterseite bis mäßig zahlreich, weich, 1 mm lang. Drüsen der Hülle sehr reichlich, an den Kopfstielen reichlich, am Stengel ganz oben mäßig, abwärts bis zur Mitte sehr vermindert, am obersten Stengelblatt spärlich. Flocken der Hülle mäßig zahlreich. Schuppenränder nackt, Kopfstiele grau, Stengel zerstreut-flockig, abwärts flockenlos, Blätter oberseits nackt, nur an der Mittelrippe zuweilen mit sehr zerstreuten Flocken, unterseits bis mäßig flockig (Stengelblätter). Blüthen ziemlich hellgelb. Ausläufer fehlen.

Cymosina-Collinina.

XII. Hieracium glomeratum Fr.

24. H. glomeratum * pycnothyrsum n. subsp. — Moskau Juni 1889. — Stengel 50—60 cm hoch, dick, aufrecht. Kopfstand doldig, geknäuelt, gleichgipflig; Akladium 5—8 mm lang; Strahlen 2. Ordnung 7—10, gedrängt, schlank; Ordnungen 3—4; Kopfzahl 15—20. Blätter: äußere ± länglich, stumpf, übrige ± lanzettlich, bis spitz, alle ansehnlich, gelbgrün, weich, lang in den stielartigen Grund verschmälert; Stengelblätter 3—4 in der unteren Hälfte, ziemlich rasch decrescirend. Hülle 7—8 mm lang, kurz cylindrisch mit zuerst gerundeter, dann gestutzter Basis; Schuppen schmal, spitzlich, schwarz, kaum gerandet. Bracteen grau. Haare fast überall reichlich, hell, an der Hülle sehr zahlreich, 2 mm, am Stengel oben nur mäßig zahlreich, 2—3 mm, abwärts sehr reichlich, auf den Blättern oberseits steiflich, 1,5—2,5 mm lang. Drüsen an Hülle und Kopfstielen mäßig zahlreich, am Stengel oben zerstreut, abwärts bald vereinzelt, in der Mitte verschwindend, an den oberen Stengelblättern vereinzelt. Flocken der Hülle reichlich, auf den Schuppenrändern spärlich oder 0, Kopfstiele weißlich oder grau, Stengel oben graulich, abwärts reichflockig, Blätter oberseits mäßig-, unterseits reichlich flockig. Blüthen sattgelb. Stolonen verlängert, dünn, unterirdisch. — Steht dem bei Teschen in Schlesien beobachteten *H. * prolongatum* am nächsten, von welchem es sich indessen besonders durch breitere Blätter und längere Behaarung unterscheidet. Die Mittelstellung zwischen den Hauptarten ist unverkennbar, die Beblätterung neigt etwas mehr gegen *H. cymosum* als gegen *H. collinum.*

Praealtina-Pilosellina.

XIII. Hieracium brachiatum Bertol.

25. H. brachiatum * dmitrovense n. subsp. — Distrikt von Dmitrov im Gouvernement Moskau Juni 1890. — Vermittelt zwischen *H. Pilosella* und *H. brachiatum*, und zwar so, daß es die Gruppe des *H. subtile*, mit welcher es den niedrigen Wuchs, die dünnen Caulome und die kleinen Köpfe theilt, mit *H. Pilosella * vulgare* verbindet.

Stengel 10—18 cm hoch, dünn, etwas aufsteigend, tief gablig; Akladium = $^1/_2$—$^7/_8$(—$^1/_1$) desselben; Strahlen 2. Ordnung (0—)1, öfters außerdem 1—2 Nebenschäfte aus der Rosette. Blätter ziemlich kurz, äußere länglich, gerundet stumpf, innere bis lanzettlich und ± spitz, alle derb, gelbgrün. Hülle (7—)8—9 mm lang, eiförmig, dann fast kuglig; Schuppen schmal, spitz, dunkelgrau, hell-

randig. Bracteen hellgrau. Haare hell, an der Hülle ziemlich reichlich, 1 mm, an den Caulomen mäßig zahlreich, abwärts vermehrt, 2—3 mm, auf den Blättern beiderseits mäßig, weich, 3—5 mm lang. Drüsen an der Hülle mäßig oder ziemlich reichlich, an den Caulomen oben sehr zahlreich, abwärts vermindert bis zum Grunde. Flocken: Hülle graulich, Schuppenränder und Blattoberseite nackt, Caulome und Blattrücken grau. Blüthen hellgelb, randständige außen schwach röthlich gestreift. Ausläufer mäßig verlängert, dünn, oberirdisch, *pilosella*-artig.

Praealtina-Collinina.

XIV. Hieracium arvicola N. P.

26. H. arvicola * leucocraspedum n. subsp. — Distrikt von Kolomna im Süden des Moskauer Gouvernements Juni 1890. — Steht *H. * leucodes* und *H. * tergicanum N. P.* am nächsten, zeigt zwar deutlich seine Stellung zwischen den Species *florentinum* und *collinum*, hat indessen habituell ziemlich große Aehnlichkeit mit den Zwischenformen der Spec. *collinum* und *Auricula*, besonders mit der oben als *H. longatum* beschriebenen Pflanze. Letzteres wird begreiflich, wenn man die Uebereinstimmung mancher Merkmale der Spec. *florentinum* und *Auricula* berücksichtigt. — Stengel 22—32 cm hoch, dicklich, ein wenig aufsteigend. Kopfstand rispig, meist abgesetzt, locker, etwas übergipflig; Akladium 6—10 mm lang; Strahlen 2. Ordnung 3—5, obere genähert, unterster zuweilen ziemlich weit abgerückt, etwas dicklich; Ordnungen bis 4; Kopfzahl 8—15. Blätter kurz, glaucescirend, steif, lanzettlich, äußerste gerundet, übrige bis spitz oder sehr spitz; 1 kleines Stengelblatt nahe über der Rosette. Hülle c. 7 mm lang, kurz cylindrisch, am Grunde gestutzt; Schuppen schmal, stumpflich, dunkel, schmal aber auffällig weißlichgrün berandet. Bracteen weißlich. Haare der Hülle sehr spärlich, 0,5 mm, an den Kopfstielen ebenso, am Stengel zerstreut, 1—1,5 mm, auf den Blättern beiderseits zerstreut, nur unterseits gegen den Rand hin und am Mittelnerv zahlreicher, oberseits steiflich bis dünnborstlich, 2—3(—5) mm lang. Drüsen an Hülle und Kopfstielen sehr reichlich, am Stengel oben reichlich, abwärts bis zum Grunde langsam vermindert. Flocken der Hülle mäßig bis reichlich, auf den Schuppenrändern 0, an den Kopfstielen grauen Filz bildend, am Stengel oben reichlich, abwärts vermindert, auf den Blättern oberseits 0, unterseits ± reichlich. Blüthen dunkelgelb. Ausläufer sehr kurz, dicklich, unterirdisch.

27. H. arvicola * hirtulum n. subsp. — Moskau Juni 1889. —

Stengel 25—33 cm hoch, dicklich oder schlank, aufrecht. Kopfstand doldig, geknäuelt, gleichgipflig, abgesetzt; Akladium 6—10 mm lang; Strahlen 2. Ordnung 3—6, gedrängt, schlank; Ordnungen 3; Kopfzahl 6—12. Blätter lanzettlich, stumpf (äußerste) bis spitz, etwas derb, glaucescirend; Stengelblätter 2 im unteren $^{1}/_{4}$. Hülle 6—7 mm lang, cylindrisch mit bald gestutzter Basis; Schuppen schmal, stumpflich, dunkel, schmal hellrandig. Bracteen hell. Haare an Hülle und Kopfstielen 0, am Stengel oben vereinzelt, abwärts wenig zahlreicher, hell, 0,5 mm, auf den Blättern beiderseits 0 oder sehr spärlich, 0,5 mm lang, am Rande und Mittelnerv unterseits zahlreicher und länger. Drüsen an Hülle, Kopfstielen und Stengelspitze sehr reichlich, am Stengel abwärts langsam vermindert. Flocken der Hülle spärlich, auf den Schuppenrändern 0, Kopfstiele graufilzig, Stengel reichflockig, Blätter oberseits nackt, unterseits zerstreut- bis mäßig flockig, Blüthen sattgelb. Stolonen sehr kurz, dicklich, unterirdisch. — Gehört zur Gruppe des *H.* * *arvicola*, erinnert aber auch an *H.* * *apatorium* N. P. Monogr. I p. 674.

2. pilosius: Hülle kurzhaarig, Stengel mit mäßiger 1,5—3 mm langer Behaarung. Blätter beiderseits reichlicher und länger behaart als bei der vorigen Varietät. Blätter mehr spatelig-lanzettlich. Dolde armköpfig. — Moskau Ende Juni 1889.

Endlich findet sich vom gleichen Standorte noch ein einzelnes Exemplar in der Petunnikov'schen Sammlung, welches ich nur als eine hybride Pflanze = *H. hirtulum* + *perichlorum* zu deuten vermag, demnach als einen zurückkehrenden Bastard von der in Hauptarten ausgedrückten Abstammungsformel *H. (collinum — florentinum)* + *collinum*. In der That erkennt man an dieser Pflanze hauptsächlich Merkmale der Spec. *collinum*, und den Einfluß der Spec. *florentinum* fast nur an der Beschaffenheit der Blätter.

Praealtina-Auriculina-Collinina.

XV. Hieracium floribundum Wimm. & Grab.

28. H. floribundum * floribundum var. rossicum N. P. Monogr. I, 694, jedoch mit etwas kleineren, nur knapp 7 mm langen Köpfchenhüllen. — Distrikt Dmitrov im Norden des Gouvernements Moskau August 1890. — Bisher wurde *H.* * *rossicum* nur bei Petersburg, hier aber an mehreren Stellen gesammelt, so bei Ochta, beim landwirthschaftlichen Institut, oberhalb der Stadt unfern der Neida, auf Kretowki am Wege nach der Schanze (Körnicke!, Regel!).

29. H. floribundum * floribundum var. petropolitanum N. P. Monogr. I, 694. — Distrikt Dmitrov im Norden des Gouvernements Mos-

kau, August 1890. — Bekannte Fundorte dieser Varietät sind ebenfalls nur bei Petersburg unweit des landwirthschaftlichen Institutes (Könicke!, Regel!).

Praealtina-Cymosina.

XVI. Hieracium umbelliferum N. P.

30. H. umbelliferum * penicillatum n. subsp. — Sophino im Distrikt von Bronnizy des Moskauer Gouvernements Juni 1891; zusammen mit dem oben beschriebenen *H. cymosum * leptothyrsum*.

Stengel 50—55 cm hoch, dünn, aufrecht, steif. Kopfstand rispig oder im oberen Theil doldig, sehr locker, stark übergipflig, die Aeste öfters wickelartig ausgehend; Akladium 6—14 mm lang; Strahlen 2. Ordnung 3—6, obere gedrängt oder genähert, der unterste entfernt, alle sehr dünn, etwas schief-aufrecht; Ordnungen 3—5; Kopfzahl 8—25. Blätter schmallanzettlich, lang in den Grund verschmälert, spitz, etwas glaucescirend, etwas derb; Stengelblätter 2—3 an der unteren Hälfte, rasch descescirend. Hülle (4—)5 mm lang, sehr schlank cylindrisch mit gerundeter Basis; Schuppen sehr schmal, sehr spitz, grüngrau, schmal hellrandig. Bracteen grüngrau. Haare an der Hülle vereinzelt, 1 mm, an den Caulomen oben sehr spärlich, abwärts langsam vermehrt, endlich mäßig zahlreich, hell, 2—3 mm, auf den Blättern oberseits zerstreut, steif, 2—3 mm lang, unterseits noch zahlreicher, aber weicher. Drüsen der Hülle spärlich bis mäßig zahlreich, an den Caulomen oben zerstreut oder vereinzelt, abwärts bald verschwindend. Flocken der Hülle spärlich, auf den Schuppenrändern 0, an den Kopfstielen sehr reichlich (graulichgrün), am Stengel überall ± reichlich, auf den Blättern oberseits zerstreut bis fast 0, dann nur am Hauptnerv spärlich, unterseits zerstreut bis mäßig zahlreich, an den jüngsten Blättern sogar ziemlich reichlich. Blüthen gelb. Ausläufer etwas verlängert, reptant, dünn, oberirdisch; daneben Innovation durch sitzende Rosetten.

Steht dem *H. * manothyrsum* und *H. * asthenes N. P.* Monogr. I, 739 am nächsten, ist aber von diesen wie von den meisten anderen Pflanzen ähnlicher Stellung durch die sehr kleinen Köpfchen und die sehr geringe Behaarung des Kopfstandes verschieden. Ueberhaupt liegen die Merkmale der Spec. *cymosum* hier besonders im Indument der Blätter, während diejenigen der Spec. *magyaricum* an den übrigen Organen praevalieren. Die Bezeichnung *penicillatum* soll auf die reiserbesenartige Zusammenordnung der Kopfstiele hinweisen.

XVII. Hieracium Zizianum Tausch.

31. H. Zizianum * amauranthum n. subsp. — Moskau Juni 1889; Sophino im Distrikt von Bronnizy des Moskauer Gouvernements Juni 1891, hier zusammen mit *H. umbelliferum * penicillatum* und *H. cymosum * leptothyrsum.*

Stengel c. 40(—60) cm hoch, dick, leicht verbogen, aufrecht, öfters Nebenstengel vorhanden. Kopfstand oben doldig, abwärts aufgelöst, sehr locker; Akladium 6—8 mm lang; Strahlen 2. Ordn. 7—10, obere gedrängt, untere 2—3 entfernt, alle gegen die Spitze hin rispig oder fast doldig weiter verzweigt, dünn, ± gespreizt; Ordnungen 4—5; Kopfzahl 30—60. Blätter gelbgrün, derb, ziemlich kurz, äußere ± länglich, stumpf, innere lanzettlich, bis spitz, alle in den Grund verschmälert; Stengelblätter 3—5 in der unteren Hälfte, ziemlich langsam decrescirend. Hülle 5—5,5 mm lang, schlank cylindrisch mit gerundeter Basis; Schuppen schmal, dunkel, spitz, äußerst schmal heller berandet. Bracteen hell. Haare der Hülle mäßig zahlreich, dunkel, 0,5 mm, an den Kopfstielen sehr spärlich, am Stengel oben zerstreut, abwärts bald zahlreicher und endlich ziemlich reichlich, hell, 0,5 mm, auf den Blättern beiderseits mäßig zahlreich bis fast 0, nur am Rande und Mittelnerv der Unterseite ziemlich reichlich, überall 0,5—1 mm lang. Drüsen gelb, auf der Hülle mäßig zahlreich, an den Kopfstielen oben ziemlich reichlich, abwärts an den Caulomen langsam vermindert, an den oberen Stengelblättern vereinzelt. Flocken der Hülle zerstreut oder höchstens mäßig zahlreich, auf den Schuppenrändern 0, an den Kopfstielen grauen Filz bildend, am Stengel überall reichlich, auf den Blättern oberseits sehr spärlich bis fast 0, unterseits ± zerstreut. Blüthen dunkelgelb. Ausläufer fehlen. Innovation durch sitzende Rosetten.

Steht dem *H. * farinosum N. P.* Monogr. I, 717 nahe und ist als ein *H. cymigerum-florentinum* zu deuten, vielleicht als Bastard von *H. cymosum * leptothyrsum* und *H. florentinum * subfrigidarium.* Schon *leptothyrsum* zeigt wenigstens andeutungsweise einzelne Merkmale der Spec. *florentinum* neben den vorherrschenden der Spec. *cymosum,* und *H. amauranthum* geht in dieser Richtung noch viel weiter.

Praealtina-Echinina.

XVIII. Hieracium calodon Tausch.

32. H. calodon * strictiramum N. P. Monogr. I, 746. — Distrikt Bogorodsk im Osten des Moskauer Gouvernements Ende Juni 1890. — Bisher nur von Riga bekannt (Schweinfurth!).

Ueber die Beziehung der Dielectricitätsconstanten zum optischen Brechungsexponenten.

Von

P. Drude.

Der Satz, daß der optische Brechungsexponent eines Körpers gleich der Quadratwurzel aus seiner Dielectricitätsconstanten ist, findet bekanntlich bei den meisten Körpern keine Bestätigung, schon allein wegen des Auftretens der Dispersion. In neuerer Zeit sind nun von Koláček[1]), Goldhammer[2]), Ebert[3]) und v. Helmholtz[4]), die elektromagnetischen Gleichungen auch auf die Dispersionserscheinungen erweitert, sodaß der oben genannte Satz auch theoretisch nicht mehr bestehen bleibt.

Für Körper mit normaler Dispersion hat sich die Dispersionsformel

$$\text{(I)} \qquad n^2 = -AT^2 + B + \frac{C}{T^2} + \frac{D}{T^4}$$

als sehr brauchbar bewiesen[5]). Es bedeutet n den Brechungsexponenten (gegen den leeren Raum), T die Schwingungsdauer des Lichtes, A, B, C, D sind positive Coefficienten. B characterisirt den ungefähren Werth von n^2 innerhalb des sichtbaren Spectrums, und diese Größe ist vorzugsweise mit der Dielectricitätsconstanten verglichen. Es zeigt sich nun, daß B höchstens annähernd gleich, aber nie größer als die Dielectricitätsconstante ε ist.

Wenn man in den verschiedenen Theorieen der Dispersion (auch in den mechanischen) nach dem Grunde dieser Thatsache forscht, so erkennt man leicht, daß sie durch die im Ultrarothen liegenden Absorptionsgebiete verursacht wird. Diese machen auch eine Extrapolation des optischen Brechungsexponenten auf unendlich langsame Schwingungen unmöglich, wie neuerdings Ketteler[6]) nach seiner und der v. Helmholtz'schen mechanischen Theorie nachwies.

Wenn daher auch wohl die Ursache für die Abweichung des optischen Brechungsexponenten von der Dielectricitätsconstanten

1) F. Koláček, Wied. Ann. 32, p. 224, 429, 1887. — 34, p. 673, 1888.
2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. 47, p. 93, 1892.
3) H. Ebert, Wied. Ann. 48, p. 1, 1893.
4) H. v. Helmholtz, Berl. Ber. 1892. Dec. p. 1.
5) Vgl. E. Ketteler, Theoret. Optik, Braunschw. 1885. p. 547.
6) E. Ketteler, Wied. Ann. 46, p. 572, 1892.

klar zu Tage liegt, so möchte ich im Folgenden doch noch etwas näher auf diesen Punkt eingehen, um zu zeigen, in welch bestimmter und einfacher Weise jene Abweichung mit gewissen Vorstellungen der mechanischen und elektromagnetischen Dispersionstheorie verknüpft ist.

Ich beginne mit der mechanischen Theorie von v. Helmholtz, weil sie die Form der Ausgangsgleichungen in der bestimmtesten und mechanisch anschaulichsten Weise liefert.

I. Mechanische Theorie.

Bezeichnet u die Elongation der Aethertheile aus der Ruhelage, U die der ponderabeln Theile (Molecüle), so bestehen nach v. Helmholtz[1]) für ebene Wellen, welche sich nach der z-Axe fortpflanzen, die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \beta(u - U), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\gamma U - \delta\frac{\partial U}{\partial t} + \beta'(u - U). \tag{2}$$

Die Gleichungen sind auf die Masseneinheit des Aethers und der Molecüle bezogen. Bezeichnet man daher die Reactionskraft zwischen Aether und Molecülen mit $\mathfrak{K}$, so muß sein

$$\beta m(u - U) = \beta' M(u - U) = \mathfrak{K}$$

d. h.

$$\beta : \beta' = M : m, \tag{3}$$

falls m die Dichte des Aethers bedeutet, M die Dichte des Antheils der Materie, welche durch die Lichtschwingungen mit in Bewegung versetzt wird.

Die Gleichung 2) lehrt, daß die Molecüle, falls sie sich ohne Reibung bewegen könnten ($\delta = 0$) und der Aether in Ruhe verbliebe ($u = 0$) eine Eigenschwingung besitzen von der Dauer

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\beta' + \gamma}.$$

Man setze zur Integration:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\,e^{-kz}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) &&= \Re\left[A\,e^{\frac{i}{\tau}(t - nz)}\right], \\ U &= A' e^{-kz}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \Delta\right) &&= \Re\left[A e^{\frac{i}{\tau}(t - nz)}\right], \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

1) W. v. Helmholtz, Berl. Ber. 1874, p. 667.

wobei das vorgesetzte $\mathfrak{R}$ bedeutet, das der reelle Theil der nachfolgenden complexen Größe genommen werden soll und wobei A und $\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T}$ reell sind, während für die complexen Größen $\varkappa$ und A die Beziehungen bestehen:

$$
5) \quad \begin{aligned}
&\varkappa = p - ip', \quad p = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{V}, \quad p' = \tau k, \\
&A = \mathfrak{A} + i\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A} = A'\cos 2\pi\Delta, \quad \mathfrak{A}' = A'\sin 2\pi\Delta.
\end{aligned}
$$

V bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Körper.

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man

$$
6) \quad a\varkappa^2 = 1 - \beta\tau^2 + \frac{\beta\beta'\tau^2}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2} + i\frac{\delta}{\tau}},
$$

wobei $\tau_1 = T_1/2\pi$, d. h.

$$
7) \quad \tau_1^2 = \frac{1}{\beta' + \gamma}.
$$

Trennt man das Reelle vom Imaginären, so gewinnt man aus 6)

$$
8) \quad \begin{aligned}
a(p^2 - p'^2) &= 1 - \beta\tau^2 + \beta\beta'\tau^2 \frac{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}, \\
2app' &= \frac{\beta\beta'\delta\tau}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}.
\end{aligned}
$$

Wir wollen sehen, ob diese Gleichungen mit der nach der elektromagnetischen Theorie nothwendigen Bedingung verträglich sind, daß für unendlich großes τ, p einen endlichen Grenzwerth annimmt, während k einen sehr kleinen Werth (oder Null) erreicht. Diese Körper würden elektrische Isolatoren sein.

Die Gleichungen 8) ergeben, wenn man die erste derselben nach Potenzen von τ entwickelt und die Entwickelung mit dem zweiten Gliede abbricht:

$$
\begin{aligned}
a(p - p'^2) &= \tau^2\beta(\tau_1^2\beta' - 1) + 1 + \beta\beta'\tau_1^4(1 + \delta^2\tau_1^2), \\
2app' &= \tau\beta\beta'\delta\tau_1^4.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt für p^2 die Gleichung:

$$
ap^2 - \frac{\tau^2}{p^2}\frac{\beta^2\beta'^2\delta^2\tau_1^8}{4a} = 1 + \beta\beta'\tau_1^4(1 + \delta^2\tau_1^2) + \tau^2\beta(\tau_1^2\beta' - 1).
$$

Zur Erfüllung dieser Gleichung bieten sich zwei Möglichkeiten: Entweder man setzt die Factoren von τ^2 auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich. Dann würde p^2 (also auch n^2) unendlich klein werden, falls die Reibung δ zu Null abnimmt. Dieses Verhalten ist unwahrscheinlich. Oder man bestimmt p^2 dadurch, daß man die von τ unabhängigen Glieder obiger Gleichung einander gleich setzt. Es muß dann eine bestimmte Relation zwischen den Constanten β, β', δ, τ_1, a stattfinden, damit auch die Glieder der Gleichung, welche mit τ^2 multiplicirt sind, einander gleich werden. Dies Verfahren liefert, falls man $\delta^2 \tau_1^2$ gegen 1 vernachlässigt, was bei kleiner Reibung gestattet sein wird:

$$a p^2 = 1 + \beta \beta' \tau_1^4, \qquad 1 - \tau_1^2 \beta' = \frac{\beta \beta' \delta^2 \tau_1^8}{4(1 + \beta \beta' \tau_1^4)}.$$

Setzt man für $1/\tau_1^2$ seinen Werth nach 7), so erkennt man, daß γ klein wird von der Ordnung δ^2. Geht man bis auf erste Ordnung in δ^2 und berücksichtigt die Beziehung 3), so folgt:

$$\gamma = \tfrac{1}{4} \delta^2 \frac{M}{M+m}, \qquad a p^2 = \frac{M+m}{m}. \tag{9}$$

Bezeichnet a_0 das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_0 des Lichtes im leeren Raume, so ist nach 5)

$$a_0 p^2 = n^2.$$

Daher nach 9) der Grenzwerth n_∞^2 für sehr lange Wellen:

$$n_\infty^2 = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{M+m}{m}, \tag{10}$$

während für den Grenzwerth k_∞ des Schwächungscoëfficienten k nach 5) folgt:

$$k_\infty = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{V_0} \cdot \frac{M}{\sqrt{m(M+m)}}. \tag{11}$$

Es ist also thatsächlich k_∞ sehr klein, n_∞ endlich.

Da γ, wie die erste der Formeln 9) lehrt, sehr klein ist, so werden nach Gleichung 2) die Molecüle wesentlich nur durch ihre relativen Verschiebungen gegen den Aether in ihre Ruhelage getrieben. Für sehr langsame Bewegungen würden Aether und Materie nahezu relativ ruhen, d. h. letztere würde ersteren so zu sagen mitführen. Diese Anschauung wird durch neuere Untersuchungen [1]), welche direkt dazu angestellt sind, um von der rela-

1) Vgl. Des Coudres, Wied. Ann. 38, p. 71, 1889.

tiven Bewegung des Aethers gegen die Materie, z. B. die Erde, Kenntniß zu erhalten, unterstützt.

Verallgemeinert man die Formel 10) auf den Fall, daß mehrere Arten schwingungsfähiger Molecüle im Körper vorhanden sind, was nach einer entsprechenden Verallgemeinerung der Grundgleichungen 1) und 2) leicht geschehen kann, so würde man erhalten:

$$n_\infty^2 = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{m + \sum M_h}{m}. \tag{10'}$$

Macht man die Annahme, daß der Werth von a nur infolge einer Verdichtung des Aethers zwischen den Molecülen von dem Werthe von a_0 verschieden ist, so ist $a_0 : a = m : m_0$, falls m_0 die Dichtigkeit des Aethers im leeren Raum bezeichnet. Es wird dann

$$n_\infty^2 = \frac{m + \sum M_h}{m_0}, \tag{10''}$$

d. h. der Grenzwerth des Quadrats des Brechungsindex für sehr langsame Schwingungen ist gleich dem Verhältniß der gesammten an den Schwingungen Theil nehmenden Masse eines bestimmten Körpervolumens zu der Masse des Aethers, welche in dem gleichen Volumen des leeren Raumes enthalten ist.

Untersuchen wir jetzt die Frage, welchen Werth der Brechungsexponent für Wellen von der Dauer der Lichtschwingungen bei Körpern mit normaler Dispersion besitzen muß. Da man diese als einen Specialfall der anomalen Dispersion auffaßt, nur mit dem einzigen Unterschiede, daß die Dauern der Eigenschwingungen der Molecüle nicht mit den Schwingungsdauern sichtbaren Lichtes zusammenfallen, so muß sich nach 8) das allgemeinste Dispersionsgesetz ergeben, wenn man diese Gleichungen nur für den Fall beliebig vieler Molecülarten erweitert.

Da τ sich wesentlich von jedem τ_h, welches einer Eigenschwingung entsprecht, unterscheidet, so kann man in 8) $\frac{\delta^2}{\tau^2}$ gegen $\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2$ vernachlässigen, und ebenso p'^2 gegen p^2. Es folgt dann aus 8), unter Rücksicht auf die Beziehung 7) mit Vernachlässigung von γ nach 9) für mehrere Molecülarten:

$$a_0 p^2 = n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 + \tau^2 \sum \frac{\beta_h \tau_h^2}{\tau^2 - \tau_h^2}\right\}.$$

Sondert man die Absorptionsgebiete im Ultravioletten (Index v, $\tau_v < \tau$) von den Absorptionsgebieten im Ultrarothen (Index

r, $\tau_r > \tau$), so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 + \sum_v \frac{\beta_v \tau_v^2}{1 - \frac{\tau_v^2}{\tau^2}} - \sum_r \frac{\beta_r \tau^2}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_r^2}}\right\};$$

oder mit Entwickelung nach Potenzen von τ_v/τ, resp. τ/τ_r und mit Weglassung von kleineren Gliedern:

$$12)\qquad n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{-\tau^2\sum\beta_r + 1 + \sum\beta_v\tau_v^2 + \frac{\sum\beta_v\tau_v^4}{\tau^2} + \frac{\sum\beta_v\tau_v^6}{\tau^4}\right\}.$$

Diese Formel ist mit der anfangs erwähnten Dispersionsformel (I) identisch. Es ist sonach erklärt, weshalb die in ihr auftretenden Coëfficienten A, B, C, D positiv sein müssen. Speciell folgt für B nach 12), 7) und 3):

$$B = \frac{a_0}{a}(1 + \sum\beta_v\tau_v^2) = \frac{a_0}{a}\frac{m + \sum M_v}{m};$$

daher nach 10'):

$$13)\qquad n_\infty^2 - B = \frac{a_0}{a}\cdot\frac{\sum M_r}{m},$$

oder falls $a_0 : a = m : m_0$:

$$13')\qquad n_\infty^2 - B = \frac{\sum M_r}{m_0}.$$

Acceptirt man das Resultat der elektromagnetischen Theorie, nach der n_∞^2 gleich der Dielectricitätsconstanten ist, so erzielt man daher den Satz:

Die Differenz zwischen der Dielectricitätsconstanten und dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten eines Körpers (genauer dem von T unabhängigen Gliede der Dispersionsformel) ist gleich dem Verhältniß der in einem Körpervolum enthaltenen Massen, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen, zu der Masse des Aethers, welche sich in dem gleichen Volum des leeren Raumes befindet.

Das Gebiet des Ultrarothen ist dabei von $T = \infty$ bis zu solchen Werthen von T definirt, welche rothes Licht erzeugen. — Daß obige Differenz $n_\infty^2 - B$ stets positiv ist, wie die Versuche zeigen, scheint sonach nothwendig. Der Satz erfährt auch dadurch eine gewisse experimentelle Stütze, als die Differenz für das stark undiathermane Wasser den größten Werth (nämlich 76) erreicht, der bisher unter allen Körpern beobachtet ist.

II. Die elektromagnetische Theorie.

Man kann in einfacher Weise eine elektromagnetische Theorie der Dispersion erhalten, wenn man an den Gleichungen, welche zwischen der elektrischen, bezw. magnetischen Polarisation und den elektrischen, bezw. magnetischen Kräften besteht, festhält [1]). Dieselben lauten für Isolatoren in der Bezeichnung von Hertz [2])

$$14)\qquad A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}.$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Dagegen muß man die Beziehungen, welche zwischen den Polarisationen und ihren bezw. Kräften stattfinden, und welche für isotrope Körper lauten:

$$15)\qquad \mathfrak{L} = \mu L, \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon X$$

für schnelle Schwingungen erweitern.

Für den leeren Raum ist $\mathfrak{X} = X$, man kann daher die Differenz $\mathfrak{X} - X$ als durch die Wirksamkeit der ponderabeln Molecüle herbeigeführt ansehen, z. B. sie als die Polarisation der Molecüle selbst definiren. Setzt man daher, falls mehrere Molecülarten vorhanden sind

$$16)\qquad \mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h,$$

so kann man annehmen, daß die $\mathfrak{X}_h$ gewisser Eigenschwingungen fähig sein sollen, sei es nun deshalb, weil sie sozusagen an der ponderabeln Materie haften, sodaß ihre Eigenschwingungen mit denen der $\mathfrak{X}_h$ identisch sind, sei es deshalb, weil jeder Körper gewisse Eigenschwingungen seines elektrischen Zustandes besitzt, deren Dauer aus seiner Selbstinduction und Kapacität zu berechnen ist. Nach beiden Anschauungen müssen zwischen den $\mathfrak{X}_h$ und X gewisse lineare Differentialgleichungen mit Differentialquotienten nach t bestehen, die in die Form gebracht seien:

$$17)\qquad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + \cdots = \varepsilon_h X + \alpha_h \frac{\partial X}{\partial t} + \beta_h \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \cdots$$

Für sehr langsame Zustandsänderungen geht daher die Formel 16)

---

1) Diesen Gedanken verdanke ich einer brieflichen Mittheilung des Herrn Prof. Hertz. — Auf dem eingeschlagenen Wege erhält man für die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Schwingungsdauer Resultate, welche mathematisch identisch mit den Resultaten sind, die sich aus den anfangs erwähnten elektromagnetischen Dispersionstheorieen ergeben.

2) H. Hertz, Gött. Nachr. 4, p. 106, 1891.

in die zweite von 15) über, falls gesetzt wird

18) $$\varepsilon = 1 + \sum \varepsilon_h.$$

Um die Abhängigkeit der magnetischen Polarisationen von ihren Kräften kümmern wir uns nicht weiter, es genügt, zu wissen, daß für Lichtschwingungen $\mu = 1$ sein muß bei allen Körpern.

Für periodische Bewegungen mit der Periode $T = \tau/2\pi$ wird die Gleichung 17) zu

$$\mathfrak{X}_h = X \frac{\varepsilon_h + i\frac{\alpha_h}{\tau} - \frac{\beta_h}{\tau^2} + \cdots}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2} + \cdots} = X \cdot \varepsilon_h(\tau),$$

falls $\varepsilon_h(\tau)$ den Quotienten zweier nach Potenzen von $1/\tau$ fortschreitender Reihen bezeichnet. Es wird daher nach 16)

$$\mathfrak{X} = X(1 + \sum \varepsilon_h(\tau)).$$

Grade wie sich nach den ursprünglichen Gleichungen $n^2 = \varepsilon$ ergiebt, folgt daher hier

19) $$n^2 = 1 + \sum \varepsilon_h(\tau).$$

Die Form der Quotienten $\varepsilon_h(\tau)$ wird experimentell und ohne Zuhülfenahme specialisirterer Vorstellungen erst dann völlig zu bestimmen möglich sein, wenn man n^2 auch für sehr kleine τ bestimmen kann. Um die Erscheinungen der anomalen Dispersion, soweit man sie bis jetzt beobachten kann, zu erklären, genügt schon die Form

20) $$\varepsilon_h(\tau) = \frac{\varepsilon_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}},$$

d. h. der Ansatz

$$\mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h X,$$

wobei b_h positiv sein muß. Ebenfalls muß ε_h positiv sein, denn es bedeutet gewissermaßen die Dielectricitätsconstante der bestimmten Molecülgattung und bestimmt die Polarisation derselben bei langsamen Zustandsänderungen. Es möge daher ε_h als „Polarisationsconstante" der h^{ten} Molecülgattung bezeichnet werden.

b_h steht in einfachem Zusammenhang mit der Eigenschwingungsdauer T_h oder τ_h. Nimmt man wiederum an, daß dieselben nur im Ultravioletten (τ_v, ε_v) und im Ultrarothen (τ_r, ε_r) lägen, so erhält man aus 19) und 20) durch Reihenentwickelungen eine ganz

ähnliche Dispersionsformel, wie die Formel 12) der mechanischen Theorie ist. Ueberhaupt gehen die Formeln beider Theorieen völlig ineinander über, wenn man setzt:

$$\varepsilon_h = M_h : m, \qquad a_0 = a.$$

Hätte man anstatt 16) den allgemeineren Ansatz

$$\mathfrak{X} = \varepsilon_0 X + \sum \mathfrak{X}_h$$

gemacht, d. h. würde man annehmen, daß die Polarisationsconstante ε_0 des Aethers innerhalb eines Körpers von der des freien Aethers ($\varepsilon_0 = 1$) verschieden ist, so läßt sich völlige Identität der mechanischen und elektrischen Theorie erreichen, falls man setzt:

$$a_0 : a = m : m_0, \qquad \varepsilon_h = M_h : m_0, \qquad \varepsilon_0 = m : m_0.$$

Es ist daher auch eine innere Identität beider Theorieen zu ermöglichen, falls man einerseits die Molecülmasse M_h als verdichtete Aethermasse selbst auffaßt, andrerseits die elektrische Polarisation als Verschiebung des Aethers auffaßt, diesem aber in verschiedenen Körpern und in demselben Körper an verschiedenen discreten Stellen (den Orten der Molecüle) verschiedene Dichte beilegt.

Unabhängig von diesen Speculationen ergiebt sich jedenfalls aus 18) und 19):

$$\varepsilon - B = \sum \varepsilon_r,$$

wobei B das von T^2 unabhängige Glied der Dispersionsformel (I) bedeutet, d. h. falls man B schlechtweg den optischen Brechungsexponenten eines (normal dispergierenden) Körpers nennt, so erhält man den Satz:

Die Differenz zwischen der Dielectricitätsconstanten und dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten ist gleich der Summe der Polarisationsconstanten der Molecülarten, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen.

Um die optischen und elektrischen Eigenschaften der Metalle unter ein System von Gleichungen fassen zu können, genügt noch nicht die Erweiterung von (14) in:

$$14') \qquad A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} + A \cdot 4\pi\lambda \frac{\partial X}{\partial t},$$

während für $\mathfrak{X}$ die Gleichung 16) bestehen bleibt[1]). Man kann

1) In ähnlicher Weise verfährt Goldhammer l. c.

dadurch allerdings zu scheinbar negativen Werthen der Dielectricitätsconstanten gelangen, wenn Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen, indeß erhält man dann infolge des bedeutenden Werthes der elektrostatisch gemessenen Leitfähigkeit λ zu große Werthe für das Product nk, wie sie an Metallen nicht auftreten. — Ich glaube vielmehr, daß für Metalle in 14') noch ein Glied der Form

$$p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{p}{A}\Delta X$$

zugefügt werden muß[1]), durch ein solches kann man wenigstens durch passende Wahl von p die optischen Konstanten der Metalle unter Benutzung der Leitfähigkeit λ der Erfahrung entsprechend berechnen und erhält dabei einen großen positiven Werth für ihre Dielectricitätsconstante, wie H. A. Lorentz[2]) zeigte.

Göttingen, December 1892.

1) Vgl. P. Drude, Gött. Nachr. 1892, 10, p. 390.
2) H. A. Lorentz, Schloin. Zeitschr. 23, p. 209, 1878.

Einige Beobachtungen über die Drillungsfestigkeit von Steinsalzprismen.

Von

W. Voigt.

Jede Deformation eines elastischen Körpers stellt sich bekanntlich dar als eine gleichförmige Dilatation der einzelnen Volumenelemente nach drei zu einander senkrechten Richtungen. Man würde demgemäß die Gesetze der Cohäsion im ganzen Umfange und auf die einfachste Weise ableiten können, wenn man die Mittel hätte, prismatische Präparate nach den drei Kantenrichtungen gleichförmig, aber um verschiedene und beliebige Beträge zu dilatiren und zu comprimiren. Leider scheint dies nicht möglich zu sein, und man muß sich daher bei der Beobachtung auf specielle Fälle beschränken, aus denen die allgemeinen Gesetze bisher noch nicht haben abgeleitet werden können.

Der eine dieser Fälle hat der von Herrn Sella und mir unlängst mitgetheilten[1]) Beobachtungsreihe über die Zerreißungs-

1) A. Sella und W. Voigt, Gött. Nachr. 1892, Nr. 14, p. 494.

festigkeit des Steinsalzes zu Grunde gelegen, nämlich derjenige, bei welchem die parallel zwei Kantenrichtungen wirkenden Spannungen verschwinden. Eine Verallgemeinerung würde erhalten werden, wenn es gelänge, jene zwei Spannungen von Null verschieden, aber einander gleich und die dritte davon verschieden zu machen; dieses scheint in der That möglich zu sein, und ich bin mit den bezüglichen Versuchen beschäftigt.

Einen zweiten, ebenso speciellen Fall, wie den früher benutzten, liefert die Drillung gewisser Cylinder aus homogener isotroper oder krystallinischer Substanz.

Bei der Drillung sind jederzeit die Oberflächenelemente mehr gespannt als die inneren; es ist daher hier von vorn herein klar, daß das Zerreißen an der Oberfläche beginnen und in's Innere fortschreiten wird.

Legen wir in ein Oberflächenelement ein Axensystem NPS, dessen N-Axe parallel der Normalen, dessen P-Axe parallel der Cylinderaxe liegt und dessen S-Axe daher in die Tangente der Querschnittscurve fällt, so ist wegen der Grenzbedingungen für die freie Oberfläche *stets*

$$N_n = 0, \quad P_n = N_p = 0, \quad S_n = N_s = 0,$$

also nur S_s, P_p und $P_s = S_p$ von Null verschieden.

In gewissen wichtigen Specialfällen — nämlich stets 1) wenn der Cylinder isotrop ist, 2) wenn er zwar aus einem Krystall hergestellt ist, aber elliptischen Querschnitt besitzt, 3) wenn er rechteckigen Querschnitt hat und seine Axe normal zu einer krystallographischen Symmetrieebene steht — ist aber auch noch

$$P_p = S_s = 0,$$

also einzig $P_s = S_p$ von Null verschieden.

In diesen Fällen bilden die Spannungen ein besonders einfaches System. Die Hauptdruckaxen liegen parallel N und den beiden Halbirungslinien H und K der Winkel zwischen den Axen P und S, und zwar ist von den Hauptdrucken $N_n = 0$, $H_h = -K_k$.

Die oben angeführten Fälle der Drillung gestatten also die Festigkeit eines prismatischen Volumenelementes zu untersuchen, welches auf zweien seiner Flächenpaare entgegengesetzt gleiche, auf dem dritten aber verschwindende Normaldrucke erfährt.

Es schien mir von Interesse, bei Steinsalz in der angedeuteten Richtung einige Beobachtungen auszuführen, umsomehr, als

die Fragmente der bei den Biegungsbeobachtungen benutzten Stäbchen[1]) geeignetes Material darboten.

Die Stäbchen der beiden Gattungen *W* I und *W* II lagen mit ihren Längsrichtungen in Würfelnormalen, ihre Seitenflächen waren resp. mit Würfel- und Granatoëderflächen parallel; die Orientirung entspricht also der unter 3) gegebenen Bedingung.

Für die Beobachtung wurden die Stäbchen mit ihren Enden in rechtwinkelige, schwach conische Klötze gekittet und der eine dieser Klötze in eine geeignete Oeffnung in einer horizontal befestigten Messing-Platte gesteckt, sodaß das Stäbchen vertical stand; auf den andern Klotz wurde dann eine leichte Messingrolle vom Radius $R = 40$ mm, welche in der Axe ebenfalls eine passende Oeffnung trug, aufgelegt und gegen ihre Peripherie mittelst einer an zwei Fäden aufgehangenen Waagschale ein veränderlicher Zug ausgeübt. Die Belastung geschah, wie bei früheren Versuchen, durch langsam zufließendes Quecksilber.

Obgleich die benutzten Präparate meist eine Gesammtlänge von nur 10 mm, also eine freie Länge zwischen den Fassungen von nur 5—6 mm besaßen, so verliefen die Beobachtungen doch ganz regelmäßig; das Brechen fand niemals innerhalb der Fassungen, sondern stets auf dem freien Theil der Länge statt.

Bei den Stäbchen der Gattung *W* I fand nach dem oben Gesagten die größte Spannung in der Richtung einer Granatoëdernormalen, bei denen der Gattung *W* II wenig abweichend von einer Oktaëdernormalen statt; wenn daher nur die Größe und Richtung dieser Kraft für den Vorgang maßgebend wäre, so müßte das Zerreißen in ähnlicher Weise stattfinden, wie bei der Anwendung einseitigen Zuges auf Prismen, deren Längsaxen in den betreffenden Richtungen liegen.

Die Beobachtung ergiebt nun aber ein durchaus anderes Verhalten.

Während bei einseitigem Zug die Steinsalzprismen durchaus nach Spaltungsflächen rissen, liegen bei der Drillung die Bruchflächen senkrecht zur Richtung des größten Zuges; sie schneiden die Seitenflächen der Prismen in Geraden, welche um 45° gegen die Längsrichtung geneigt sind und sich nicht selten spiralartig über drei Seitenflächen hinweg fortsetzen, während auf der vierten meist ein verzerrter Längsspalt die Curven schließt.

Dies Resultat ist sehr merkwürdig und eröffnet die Aussicht auf interessante Aufklärungen über das Wesen der Spaltbarkeit;

---

1) l. c. p. 509.

vielleicht kann die im Eingang erwähnte Versuchsanordnung dazu beitragen, sie zu gewinnen.

Was nun die Berechnung der numerischen Resultate angeht, so ist dafür folgende Ueberlegung anzustellen.

Bei den benutzten Orientirungen der Steinsalzstäbchen reduciren sich die Gleichungen für die Torsion eines rechteckigen Prismas auf die für unkrystallinische Medien geltenden; man kann also, weil die Querdimensionen sehr nahe gleich sind, ohne weiteres die von Saint-Venant[1]) für quadratische isotrope Prismen erhaltenen Resultate auf unsere Präparate zur Anwendung bringen.

Bezeichnet M das ausgeübte Moment, L die Länge, D die Dicke des Prismas (d. h. die Seite des Querschnittsquadrates), τ den Drillungswinkel und s_{44} den Drillungsmodul, so gilt die Beziehung[2])

$$M = \frac{0{,}1405 \cdot D^4 \tau}{L s_{44}}.$$

Ferner ist der Maximalwerth von P_t, welcher in der Mitte der Seiten des Querschnittsquadrates stattfindet[3]),

$$\overline{P}_t = \frac{0{,}675 \cdot D \tau}{L s_{44}}.$$

Hieraus folgt

$$\overline{P}_t = \frac{4{,}8 \overline{M}}{D^3};$$

da aber P_t die einzige von den sechs auf das System NPS bezogenen Druckcomponenten ist, die nicht verschwindet, so werden die beiden in den Halbirungslinien der Winkel zwischen P und S wirkenden Hauptdrucke

$$\overline{p} = \pm \overline{P}_t,$$

und, da das wirkende Moment $M = PR$ ist, falls P die angebrachte Belastung und R den Hebelarm bezeichnet, so folgt schließlich

$$\overline{p} = \pm \frac{4{,}8 \cdot PR}{D^3}.$$

Nach dieser Formel sind die folgenden Beobachtungen berechnet; für D ist das Mittel aus den beiden sehr nahe gleichen Querdi-

1) Saint-Venant, Sav.-étrang. XIV, p. 233, 185.

2) l. c. p. 382.

3) l. c. p. 396.

mensionen D_1 und D_2 gesetzt. Alle Zahlen sind, der geringen Genauigkeit wegen, auf drei Stellen abgekürzt.

W I (Seitenflächen parallel Würfelflächen).

Nr.	D_1	D_2	P	$\bar{p}$
1)	1,95	1,975	114	2900
2)	1,94	1,955	103	2680
3)	1,92	1,955	103	2720
4)	1,94	1,95	106,5	2780
5)	1,94	1,96	105	2720
6)	1,92	1,95	103	2730
7)	1,92	1,95	100	2650

Im Mittel $\bar{p} = 2740$.

Die Uebereinstimmung der Resultate für $\bar{p}$ ist sehr befriedigend.

Zur Controle, ob die obige Formel den Werth der Grenzspannung $\bar{p}$ für verschieden dicke Prismen richtig angiebt, habe ich einige Präparate von ungefähr doppelten Querdimensionen gleichfalls der Beobachtung unterworfen. Die Resultate sind weniger sicher wie die vorigen, weil die benutzten Stäbchen sehr kurz waren, — ihre freie Länge übertraf nur wenig ihre Dicke, — und in einem solchen Fall die gewöhnliche Theorie der Drillung eigentlich nicht mehr anwendbar ist.

Nr.	D_1	D_2	$\bar{P}$	$\bar{p}$
8)	3,98	3,99	898	2720
9)	4,00	4,01	946	2830
10)	3,99	4,01	791	2370
11)	3,99	4,00	845	2550
12)	3,98	3,99	928	2810
13)	3,99	4,02	910	2720.

In Rücksicht auf die eben gemachte Bemerkung kann man durch diese Zahlen die Richtigkeit der Formel als erwiesen betrachten.

W II (Seitenflächen parallel Granatoëderflächen).

Nr.	D_1	D_2	$\bar{P}$	$\bar{p}$
1)	1,95	1,995	109	2730
2)	1,955	1,96	111	2840
3)	1,94	1,97	110	2830
4)	1,955	1,975	122,5	3100
5)	1,94	1,96	106	2750
6)	1,96	1,98	109	2740

Im Mittel $\bar{p} = 2830$.

Diese Beobachtungen stimmen unter einander nicht ganz so gut, als wie die vorigen; namentlich ergiebt Nr. 4) einen ungewöhnlich hohen Werth für $\bar{p}$, der irgend eine Störung am Apparat vermuthen läßt. Zieht man dies in Rücksicht, so sind die für beide Gattungen von Stäbchen erhaltenen Grenzspannungen $\bar{p}$ als sehr nahezu gleich zu bezeichnen; dies ist ein unerwartetes Resultat, wenn man bedenkt, daß bei einseitigem Zug unter sonst gleichen Verhältnissen, auch bei gleicher Lage der Begrenzungsfläche, $\bar{p}$ resp. gleich 1150 und 2000 gefunden worden ist. Auch die absolute Größe der obigen Werthe ist überraschend; da neben der Zugkraft ein gleich großer Druck in einer zur erstern normalen Richtung stattfindet, und dieser noch einen Antheil zu der durch die Zugkraft bewirkten, ihr parallelen, Längsdehnung hinzufügt, so hätte man eher kleinere Werthe $\bar{p}$ als bei blos einseitigem Zug erwarten mögen.

Es bleibt zu untersuchen — und diese Frage hoffe ich bald entscheiden zu können — ob auch unter anderen Umständen ein seitlicher Druck die Zugfestigkeit einer Substanz vergrößert. —

Von einer Ausdehnung der Drillungsbeobachtungen auf anders orientirte Steinsalzprismen habe ich zunächst abgesehen, einmal, weil mir dafür kein Material zur Hand war, und sodann, weil nur für wenige specielle Orientirungen die Theorie der Drillungsdeformation durchführbar ist; ohne eine solche ist aber eine Verwerthung der Beobachtung nicht möglich.

Göttingen, um Neujahr 1893.

Beobachtungen über die Zerreißungsfestigkeit von Bergkrystall und Flußspath.

Von

W. Voigt.

Die überraschenden Resultate, welche die von Herrn A. Sella und mir angestellten Beobachtungen[1]) über die Zerreißungsfestigkeit des Steinsalzes ergeben hatten, ließen eine Ausdehnung der Untersuchungen auf andere Krystalle als durchaus nothwendig erscheinen.

Von diesen bietet der Bergkrystall, neben der Leichtigkeit

1) Göttinger Nachr. 1892, Nr. 14, p. 494.

der Beschaffung genügenden Materiales, das besondere Interesse, daß er nur sehr unvollkommen spaltbar ist, sich hierin also beträchtlich vom Steinsalz unterscheidet. Es war daher zu erwarten, daß die der Untersuchung unterworfenen Präparate im Allgemeinen nicht nach Spaltungsflächen reißen würden, sodaß hier die Beobachtung an ganz veränderte Verhältnisse anzuknüpfen hätte.

Die Bergkrystallpräparate sind wiederum von Herrn Dr. W. Steeg und Reuter in Bad Homburg vortrefflich hergestellt worden. Ihre Form war die bei Steinsalz angewandte und früher beschriebene. Stäbchen von ca. 30 mm Länge und einem quadratischen Querschnitt von ca. 2,5 mm Seite, wurden auf allen vier Seitenflächen mittelst eines Kreiscylinders etwas hohlgeschliffen, bis in der Mitte der Länge die Querdimensionen auf ca. 2,2 mm reducirt waren; die Höhlungen wurden fein polirt, die prismatischen Endstücken aber matt belassen.

Bei der Wahl der Orientirungen waren die durch die Untersuchung des Steinsalzes gewonnenen Resultate zu benutzen. Dort hatte sich ergeben, daß die Tragfähigkeit eines Primas von der Orientirung seiner Seitenflächen abhängt, und daß daher klare Resultate nur mit Prismen erhalten werden können, deren Seitenflächen sämmtlich physikalisch gleichwerthig sind.

Physikalisch gleichwerthig sind nun jedenfalls alle krystallographisch gleichwerthigen Flächen; da die Cohäsionserscheinungen aber nothwendig ein Symmetriecentrum besitzen müssen, so ordnet sich einer jeden Fläche noch die in Bezug auf das Symmetriecentrum gegenüberliegende hinzu.

Hiernach sind bei Bergkrystall nur diejenigen rechteckigen Prismen von lauter gleichwerthigen Seitenflächen begrenzt, deren Längsrichtung senkrecht zu einer zweizähligen Symmetrieaxe steht, und deren Querdimensionen Winkel von 45° mit ihr einschließen.

Auf solche Prismen beziehen sich die meisten der von mir angestellten Beobachtungen. Legt man die Z-Coordinatenaxe in die dreizählige Hauptaxe, die X-Axe in eine der zweizähligen Nebenaxen und läßt die positive Y-Axe aus einer der drei um die positive Z-Axe gelagerten Flächen $+R$ austreten, bezeichnet man ferner den Winkel der Längsaxe des Stäbchens gegen die Z-Axe (nach der $+Y$-Axe hin positiv gerechnet) mit φ, so liegen die von mir untersuchten Präparate der beschriebenen Art mit ihrer Längsrichtung in der YZ-Ebene und entsprechen den Winkeln

$$\varphi = 0^\circ, \quad 30^\circ, \quad 60^\circ, \quad 90^\circ, \quad 120^\circ, \quad 150^\circ.$$

Außer ihnen habe ich nur noch drei Gattungen von Prismen beobachtet, bei denen sämmtliche Kanten mit Coordinatenaxen zusammenfielen. Sie sollten die Fragen entscheiden: 1) ob auch bei Prismen, deren Längsaxe in die krystallographische Hauptaxe fällt, die Tragfähigkeit von der Orientirung der Seitenflächen abhängt; 2) wie sich in dieser Hinsicht Prismen verhalten, deren Längsaxe in der *Y*-Coordinatenaxe liegt; 3) ob Prismen, deren Längsrichtungen in der *X*- resp. *Y*-Axe und deren eine Querdimension in die *Z*-Axe fällt, verschiedene Tragfähigkeiten ergeben.

Vorläufige Versuche, die Bergkrystallstäbchen, ebenso wie früher die Steinsalzstäbchen, durch eine longitudinal wirkende Zugkraft direct zu zerreissen, ergaben, daß dieser Weg hier nicht zum Ziele führt. Die Stäbchen wurden viel eher aus den Fassungen herausgerissen, als ihre Cohäsion überwunden war. Allerdings hätte man, — da der Umfang, an welchem die Befestigung angreift, langsamer abnimmt, als der Querschnitt, — durch Verkleinerung der Dicke schließlich Verhältnisse erreichen können, welche die Anwendung des früheren Verfahrens gestatteten; indessen wären dadurch andere Schwierigkeiten entstanden und wäre jedenfalls die Anfertigung neuer kostbarer Präparate nöthig geworden.

Ich entschloß mich daher, die Stäbchen durch Biegung zu zerreißen, und zwar, da die Biegung durch centrale Belastung gerade in dem kritischen mittelsten Querschnitt, wo die Zerreißung zu erwarten ist, Verhältnisse schafft, welche der Theorie nicht zugänglich sind, durch eine Biegung mittelst auf die Enden des Stäbchens ausgeübte Drehungsmomente um eine zur Längsrichtung normale Axe.

Hierzu wurden die Veranstaltungen folgendermaßen getroffen.

Auf die mattgeschliffenen prismatischen Endstücke der Quarzpräparate wurde, ähnlich wie ein Uhrschlüssel auf den Zapfen der Feder, je ein messingener Hebelarm von ca. 56 mm Länge aufgesetzt und mit Wachs-Colophonium festgekittet, so daß das Stäbchen mit den beiderseitigen Verlängerungen zusammen ein starres System von ca. 125 mm Länge bildete. Dieses System wurde auf zwei horizontale stumpfe stählerne Schneiden aufgelegt, sodaß sich zwischen diesen gerade das hohlgeschliffene mittlere Stück des Stäbchens befand; der Abstand der Schneiden betrug 12 mm. Nahe den äußeren Enden waren zwei Löcher in die Messinghebel gebohrt und darin mit zwei ca. 100 mm langen Drahthaken ein horizontaler Balken von ca. 125 mm Länge aufgehangen, welcher in seiner Mitte eine Wagschaale trug.

Ist das Gewicht eines jeden Hebels $= h$, dasjenige von Balken und Schaale $= b$, und ist auf der Schaale ein Gewicht $= g$ befindlich, so erfährt jedes Ende der gebogenen Prismas da, wo es auf der stählernen Schneide aufliegt, ein Drehungsmoment

$$M = (h + g + b)\frac{l}{2} = P\frac{l}{2}$$

worin P die ganze wirksame Belastung bezeichnet.

Auf die Querschnitte des Stäbchens zwischen beiden Schneiden wirken dann normale Spannungen, deren Größen dem Abstand von der mittelsten (neutralen) Schicht proportional sind und ihre Maxima in der obersten Schicht annehmen. Bei der gewählten Gestalt der Präparate ist der mittelste Querschnitt, weil am kleinsten, auch am stärksten gespannt, und der Werth der auf die Einheit des Querschnitts bezogenen Grenzspannung $\bar{p}$ in der obern Fläche ist hier gegeben durch

$$\bar{p} = \frac{3\bar{P}l}{BD^2},$$

falls $\bar{P}$ die Belastung bezeichnet, bei der das Brechen eintritt, und B die horizontale Querdimension (Breite), D die verticale (Dicke) des Präparates an der dünnsten Stelle bedeutet.

Nach dieser Formel sind die Beobachtungen in der folgenden Zusammenstellung berechnet.

Bezüglich der erhaltenen Resultate ist im Allgemeinen zu bemerken, daß in den bei weitem zahlreichsten Fällen das Brechen der Präparate nach mehr als einer Fläche geschah, sodaß entweder von der obern Seite des Stäbchens her zwei unter 45° gegen die Verticale geneigte unvollkommene Ebenen auftraten, oder aber neben einem vertikalen Querschnitt eine in der untern Hälfte des Stäbchens verlaufende horizontale Fläche, welche sich nach den Seiten hin bald mehr, bald weniger weit ausbreitete, und, indem sie nach oben oder unten ausbog, die eine oder alle beide Hälften des Stäbchens nochmals zerfällte.

In einigen wenigen Fällen brachen hingegen die Präparate nach nur einer, nahezu vertikalen, Fläche und dann stets bei unverhältnißmäßig (um ein Viertel bis ein Drittel) geringerer Belastung; es ist anzunehmen, daß hier Fehler des Materiales wirkten, und es sind deshalb die betreffenden Beobachtungen unterdrückt.

Die folgende Zusammenstellung enthält für jedes untersuchte Stäbchen außer der Characteristik seiner Orientirung die Größe seiner Breite B und Dicke D in Millimetern und der Belastung $\bar{P}$

in Grammen, bei welcher es brach; aus diesen Daten unter Zuziehung des Werthes $l = 56$ mm ist die Grenzspannung $\bar{p}$ berechnet.

I) $L \perp X$; $\varphi = 0^0$.

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$
1)	2,24	2,20	1092	16500
2)	2,18	2,28	1091	16900
3)	2,28	2,20	1012	14800
4)	2,24	2,20	1081	16400
5)	2,19	2,24	1041	16300.

Die Bruchflächen verliefen durchaus unregelmäßig, hatten dabei aber mehr oder weniger Aehnlichkeit mit unter 45° gegen den vertikalen Querschnitt geneigten Ebenen.

II) $L \perp X$; $\varphi = 30^0$.

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$
1)	2,24	2,27	1173	17200
2)	2,24	2,26	1107	16400
3)	2,27	2,24	844	12300
4)	2,27	2,24	857	12500
5)	2,27	2,30	1282	18100
6)	2,30	2,28	912	12700.

Die Bruchflächen hatten ungefähr den oben als zweiten beschriebenen Verlauf, zeigten aber wenig Regelmäßigkeit.

Die hier erhaltenen Werthe weichen ganz enorm von einander ab, und es ist für das extraordinäre Verhalten dieser Sorte II ein Grund nicht einzusehen.

III) $L \perp X$; $\varphi = 60^0$.

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$
1)	2,24	2,24	830	12400
2)	2,24	2,24	714	11700
3)	2,23	2,24	828	12400
5)	2,23	2,25	810	12100.

Die Bruchfläche war durchweg von einem vertikalen Querschnitt gebildet, der aber das Stäbchen nicht vollständig durchsetzte, sondern gegen eine zweite, nahezu horizontal verlaufende Fläche stieß, durch welche auf der einen horizontalen Seitenfläche des Stäbchens eine kleine Platte abgetrennt wurde.

Nr. 4 brach glatt durch und trug demgemäß nur 450 gr.

IV) $L \perp X$; $\varphi = 90^0$.

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$
1)	2,23	2,25	844	12700
2)	2,23	2,24	807	12100
4)	2,24	2,24	851	12700
5)	2,23	2,25	862	13000.

Diese Stäbchen brachen ähnlich wie die vorigen. Abweichend verhielt sich Nr. 2); es brach nach zwei sich kreuzenden, um 45° gegen einen verticalen Querschnitt geneigten Ebenen und ergab folgende Zahlen:

2)	2,25	2,23	1044	15800.

V) $L \perp X$; $\varphi = 120^0$.

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$
1)	2,25	2,26	1073	15700
2)	2,24	2,26	962	14100
3)	2,27	2,25	1073	15600
4)	2,25	2,27	1079	15900
5)	2,24	2,27	917	13500.

Die Bruchflächen verliefen ähnlich wie bei III und IV; bei Nr. 5 war der horizontale Sprung nur eben angedeutet; dem entspricht auch der besonders kleine Werth von $\bar{p}$.

VI) $L \perp X$; $\varphi = 150^0$.

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$
1)	2,23	2,20	1057	16100
2)	2,20	2,20	930	14600
3)	2,26	2,24	980	14300
5)	2,23	2,20	918	14100.

Bruchflächen, wie bei den vorigen Gattungen; ausgeschlossen ist Nr. 4 bei dem der horizontale Sprung nur eben angedeutet war, und das demgemäß $\bar{P} = 799$ ergab.

Die vorstehenden Zahlen für $\bar{p}$, welche sich, wie gesagt, ausschließlich auf Richtungen in der YZ-Ebene beziehen, zeigen, daß die Zugfestigkeit des Bergkrystalles in dieser Ebene nur sehr wenig variirt; ein Minimum scheint beiläufig in der Richtung normal zu der unvollkommenen Spaltungsfläche $+R$ zu liegen. Ersteres ist einigermaßen überraschend, wenn man in Betracht zieht, daß in der dem untersuchten Hauptschnitt im regulären System ungefähr entsprechenden Granatoëderfläche die Zugfestigkeit des Steinsalzes nahezu vom ein- bis 2,4fachen variirte, — und

zwar um so mehr überraschend, als zugleich bei Steinsalz der elastische Dehnungswiderstand nur vom ein- bis 1,3fachen, bei Bergkrystall dagegen vom einfachen bis nahe zum doppelten wechselt. Bei Steinsalz fällt ein Minimum der Zugfestigkeit mit einem Maximum des Dehnungswiderstandes, bei Bergkrystall umgekehrt nahezu mit einem Minimum des Dehnungswiderstandes zusammen.—

Ich gebe nun die Resultate, welche mit den drei letzten Gattungen von Stäben erhalten sind.

VII) $L \parallel Z$, B und $D \parallel X$ und Y.

Nr.	D	B	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	2,25	2,24	1177	17300
2)	2,25	2,26	1178	17400
4)	2,25	2,25	1037	15200
5)	2,25	2,27	1103	16300.

Ausgeschlossen ist Nr. 3, welches $\overline{P} = 846$ ergab. Bruchflächen wie früher.

Diese Resultate stimmen mit den an Sorte I erhaltenen so nahe überein, daß sie ziemlich sicher erweisen, es sei die Orientirung der Seitenfläche ohne Einfluß auf die Zugfestigkeit, wenn die Zugrichtung in die krystallographische Hauptaxe fällt.

VIII) $L \parallel Y$, B und $D \parallel X$ und Z.

Nr.	B	D	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	2,13	2,30	801	12900
2)	2,13	2,29	926	15000
3)	2,13	2,29	749	12100
4)	2,29	2,15	874	12900
5)	2,29	2,15	885	13100.

Bruchflächen wie bei den vorigen Gattungen.

Vergleicht man diese Resultate mit den für Sorte IV erhaltenen, so sieht man, daß ein etwaiger Einfluß der Orientirung der Seitenflächen bei der Lage der Längsrichtung // der Y-Axe durch die Beobachtungsfehler verdeckt wird.

IX) $L \parallel X$, B und $D \parallel Y$ und Z.

Nr.	D	B	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	2,27	2,29	883	12600
2)	2,29	2,29	963	13600
3)	2,26	2,26	869	12700
5)	2,26	2,26	890	13000.

Bei den Stäbchen dieser Gattung geschah das Brechen nach zwei um ungefähr 45° gegen den verticalen Querschnitt geneigten

unebenen Flächen, sodaß ein nahezu dreieckiges Stück heraussprang. Nur die zwei Stäbchen 4) und 6) brachen nach dem Querschnitt glatt durch und trugen demgemäß auch nur resp. 661 und 719 gr

Die oben gegebenen Zahlen für $\bar{p}$ stimmen so nahe mit den bei VIII erhaltenen, daß vollständige Gleichheit der beiden Zugfestigkeiten wahrscheinlich ist; man darf vermuthen, daß alle Richtungen senkrecht zur Hauptaxe sich gleichmäßig verhalten.

Von einer X. Sorte Stäbchen, deren Längsrichtung den Winkel zwischen der X- und Z-Axe halbirte, während eine Querdimension in die Y-Axe fiel, kann ich ausführliche Resultate nicht angeben, da sämmtliche Präparate mit Ausnahme von zweien glatt durchbrachen; diese zwei, welche sich ähnlich verhielten, wie Gattung VIII, gaben resp.

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$
2)	2,28	2,21	970	14200
7)	2,225	2,29	1016	15100

Die erhaltenen $\bar{p}$ fallen in der That zwischen die bei Sorte VII und IX, welche entsprechend orientirt waren, erhaltenen, mitten hinein.

Bildet man aus allen Werthen $\bar{p}$, die sich auf eine Zugrichtung parallel zur Hauptaxe beziehen, — es sind die Sorten I und VII, — das Mittel, so erhält man

$$\bar{p}_0 = 16300 \pm 190;$$

verfährt man ebenso mit allen Werthen, die bei Zugrichtungen senkrecht zur Hauptaxe erhalten sind, — sie entsprechen den Gattungen IV, VIII, IX, — so findet sich

$$\bar{p}_{90} = 12500 \pm 150.$$

Diese Zahlen, mit anderen erhaltenen verglichen, ergeben die größte Zugfestigkeit von Bergkrystall nicht ganz acht Mal so groß, als die größte von Steinsalz, aber an fünf Mal kleiner als die Zugfestigkeit von Krupp'schem Gußstahl, wenn von letzterem aus Gußproben geschnittene Stäbe den Versuchen unterworfen werden [1]).

Gezogene Drähte verhalten sich bekanntlich anders, als geschnittene Prismen, weil ihre Oberflächenschicht durch die mecha-

1) Herr Dr. F. Salomon in Essen, dessen Freundlichkeit ich mehrere Stücke verschiedenen Krupp'schen Guß-Stahles verdanke, giebt für zwei von ihnen die Werthe $\bar{p} = 76000$ und $\bar{p} = 90000$ an.

nische Bearbeitung dichter und fester geworden ist; ähnlich dürften Fäden aus geschmolzenem Quarz eine größere Zugfestigkeit zeigen, als die vorstehend untersuchten Präparate. —

Gegenüber den bei Steinsalz erhaltenen Zahlen zeigen die auf Quarz bezüglichen eine unerwartet große Unsicherheit, welche nur von Störungen der Krystall-Structur herrühren kann; man hätte vermuthen mögen, daß wasserheller Bergkrystall sich regelmäßiger verhalten würde.

Noch ungünstigere Resultate ergaben vorläufige Messungen an Stäbchen aus demselben farblosen, klaren Flußspath, der sich bei meinen Elasticitätsbeobachtungen[1]) so gut bewährt hatte; sie lassen eine exacte Untersuchung der Cohäsionsverhältnisse dieser Substanz nahe unmöglich erscheinen und sollen hier nur mitgetheilt werden, um eine Vorstellung von der absoluten Größe ihrer Zugfestigkeit, sowie von deren Variation mit der Richtung zu geben.

Die Festigkeit des Flußspathes ist sehr erheblich geringer als die von Bergkrystall, und Herr Dr. Sella, der diese Messungen auf meine Veranlassung angestellt hat, konnte die Stäbe, welche dieselbe Form und Größe, wie die von Bergkrystall gefertigten besaßen, direct durch longitudinalen Zug zerreißen. Das Brechen geschah stets nach mehr oder weniger regelmäßigen Spaltungsflächen.

Bezeichnet Q den kleinsten Querschnitt des Präparates, $\overline{P}$ die Belastung, bei welcher es zerriß, und setzt man $\overline{P}/Q = \overline{p}$, so schreiben sich die erhaltenen Zahlen folgendermaßen.

I. Längs- und Querrichtungen krystallographischen Hauptaxen parallel.

Nr.	Q	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	4,02	18200	4540
2)	4,19	18900	4520
3)	4,07	20000	4910
4)	4,11	16700	4060
5)	4,81	23600	4960
6)	4,86	22500	4620.

Gesammtmittel $\overline{p} = 466_0$.

Bei dieser Sorte ist die Uebereinstimmung also recht gut, was um so merkwürdiger ist, als sonst bei Zugrichtungen, die schief gegen alle Spaltungsflächen liegen, die Abweichungen besonders groß zu sein scheinen.

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1888 p. 289.

II. Längsrichtung parallel einer Granatoëdernormalen; eine Querdimension in der gleichen Würfelebene, wie die Länge.

Nr.	Q	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	4,99	16000	3200
2)	4,07	14000	3430
3)	4,13	22600	5460
4)	4,85	15500	3210
5)	4,79	20900	4360
6)	4,92	21700	4420
7)	4,83	15400	3180
8)	4,88	9500	1950.

Gesammtmittel $\overline{p}$ = **3650**.

Aus Resultaten, wie diese, kann man natürlich wenig schließen; die letzte zu kleine Zahl läßt sich zwar durch eine lokale Störung oder einen kleinen Sprung wohl erklären, der enorm große Werth bei Nr. 3 ist aber sehr bedenklich, da an eine Unregelmäßigkeit am Apparat — etwa ein einseitiges Aufliegen der Wagschaale auf einem Stützpunkt — kaum zu denken ist. Zufällig compensiren sich übrigens die beiden extremen Werthe in Bezug auf das Gesammtmittel ziemlich genau.

III. Längsrichtung in einer Octaëdernormalen: eine Querdimension um 33°, die andere um 65° gegen eine andere Octaëdernormale geneigt.

	Q	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	5,02	11000	2190
2)	4,98	9000	1810
3)	5,16	9900	1920
4)	4,98	11200	2250
5)	4,98	14500	2900.

Gesammtmittel $\overline{p}$ = **2210**.

Auch hier ist wieder der eine hervorstechend große Werth von $\overline{p}$ bedenklich und legt die Vermuthung nahe, daß die vier andern leidlich stimmenden kleineren Zahlen sämmtlich durch lokale Störungen bedingt sind und der normale Werth von $\overline{p}$ viel höher liegt.

Zu genauen Untersuchungen, die Aufklärung über die tieferen Bedingungen und Gesetze der Cohäsion liefern könnten, erscheint hiernach der Flußspath nicht brauchbar.

Immerhin hat das unzweifelhaft festgestellte Resultat, daß auch bei Flußspath die Zugcomponente normal zur Spaltungsfläche den kleinsten Widerstand findet, ein gewisses Interesse.

Göttingen, im December 1892.

Ueber die Composition der binären quadratischen Formen.

Von

F. Klein.

Bekanntlich kann man nach Gauss jede positive binäre quadratische Form $(ax^2 + bxy + cy^2)$[1]) geometrisch durch ein parallelogrammatisches Gitter interpretiren. Man construire sich nämlich ein Parallelogramm, welches die Seitenlängen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ und zwischen diesen eingeschlossen einen Winkel besitzt, dessen Cosinus gleich $\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ ist; von diesem entsteht dann das Gitter durch allseitige Aneinanderreihung congruenter Parallelogramme. Sei (x, y) derjenige Eckpunct des Gitters, welcher nach x-maliger Durchlaufung der Seite $\sqrt{a}$ und y-maliger Durchlaufung der Seite $\sqrt{c}$ erreicht wird; derselbe hat dann vom Puncte $(0, 0)$ eine Entfernung, deren Quadrat gleich $ax^2 + bxy + cy^2$ ist; eben hierin besteht die Gaussische Interpretation von f, d. h. die Interpretation aller Werthe, welche f für ganzzahlige Werthe der x, y annehmen kann. Des Weiteren werden wir jetzt die Seiten unseres Gitters wegnehmen und einzig das System seiner Eckpuncte beibehalten. Dasselbe läßt sich dann, wie man weiß, auf unendlich viele Weisen parallelogrammatisch ordnen und vertritt dadurch nicht nur die ursprüngliche Form f, sondern ebensowohl alle mit ihr aequivalente Formen. Wir werden sagen dürfen, daß die ganze Classe aequivalenter Formen durch das bezügliche Punctgitter repräsentirt sei. Endlich beziehen wir dieses Punctgitter noch auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunct in den Gitterpunct $(0, 0)$ fällt, während die Richtung seiner Axen unter irgend welchem Azimuth φ gegen das Gitter orientirt sein mag. Die einzelnen Gitterpuncte stellen uns dann complexe Zahlen der folgenden Gestalt dar:

$$e^{i\varphi} \cdot \left\{ \sqrt{a} \cdot x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}} \cdot y \right\}.$$

Bis hier enthält unser Ansatz noch nichts Neues und unterscheidet sich nur dadurch von der gewöhnlichen Einführung complexer Zahlen, daß wir durch Heranziehen der Irrationalität $\sqrt{a}$

1) In Uebereinstimmung mit den Entwickelungen von Herrn Weber lasse ich hier die 2 beim xy weg und bezeichne $b^2 - 4ac$ nicht als Determinante, sondern als Discriminante der Form.

und des beliebigen Azimuths $e^{i\varphi}$ aus dem Kreise der durch $\sqrt{b^2-4ac}$ unmittelbar gegebenen ganzen Zahlen heraustreten. Nun aber betrachte man die verschiedenen Classen primitiver Formen, welche dieselbe Discriminante besitzen, nebeneinander. Ich will deren Zahl mit h benennen und übrigens die Benennung Hauptform etc. auf die zugehörigen Punctgitter übertragen. Meine Behauptung ist, daß man die h Gitter (die alle vom Coordinatenanfangspuncte auslaufen mögen) derart durch Wahl geeigneter Azimuthe φ gegen das Coordinatensystem orientiren kann, daß die Sätze von der Composition der Formen unmittelbar geometrisch hervortreten. Irgend zwei der durch unsere Gitter vorgestellten complexen Zahlen ergeben nämlich (bei richtiger Lage der Gitter) mit einander multiplicirt immer wieder einen Gitterpunct, und zwar gehört der so entstehende Gitterpunct gerade derjenigen Formenclasse an, welche aus den beiden Classen, denen die anfänglichen Zahlen entnommen wurden, componirt ist. — Insbesondere mögen wir dabei unsere Aufmerksamkeit auf das Hauptgitter richten. Dasselbe erhält bei unserer Anordnung eine symmetrische Lage gegen das Coordinatensystem; seine complexen Zahlen sind also keine anderen, als diejenigen, die man ohnehin in der Theorie der quadratischen Körper von der Discriminante (b^2-4ac) betrachtet. Für sie gewinnt denn die Lehre von der Zerlegung in ideale Factoren ihre unmittelbare Bedeutung. Die idealen Factoren decken sich einfach mit den durch die Nebengitter vorgestellten complexen Zahlen.

Zum Beweise dieser Angaben sind nicht etwa neue Entwickelungen nöthig, vielmehr genügt es, die Formeln, welche Dirichlet und Dedekind für die Theorie der Composition gegeben haben, nach ihrer geometrischen Bedeutung aufzufassen. Trotzdem scheinen mir die vorstehenden Sätze nach mehreren Seiten einen Fortschritt vorzustellen. Ich will hier nur auf ihre Verwendung in der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen hinweisen. Indem wir in der Ebene unserer h orientirten Gitter die Werthe einer complexen Variabelen w ausgebreitet denken, definirt uns jedes der Gitter eine besondere Classe doppeltperiodischer Functionen von w, d. h. ein besonderes elliptisches Gebilde. Die „Moduln" dieser Gebilde sind selbstverständlich keine anderen, als diejenigen, die man nach Kronecker als die singulären Moduln der betreffenden Discriminante bezeichnet. So oft wir jetzt w mit irgend einer der durch die Gitterpuncte gegebenenen complexen Zahlen multipliciren, werden

nicht nur die Gitter selbst sondern auch die zugehörigen elliptischen Gebilde der Compositionstheorie entsprechend in wechselseitige Abhängigkeit gesetzt. Die Folge ist, daß wir anschauungsmäßig erkennen, was sonst nur in indirecter Weise abgeleitet zu werden pflegt, daß nämlich die Galois'sche Gruppe der Gleichung der singulären Moduln mit der Gruppe der Composition übereinstimmt. —

Wir mögen des weiteren fragen, ob sich unsere Theorie auf quadratische binäre Formen $ax^2+bxy+cy^2$ von positiver Determinante übertragen läßt. Die Antwort ist, daß dies in der That sofort gelingt, sobald wir nur erst für die einzelne derartige Form eine geometrische Interpretation haben, welche der Gaussischen Interpretation der positiven Formen durch das Parallelgitter analog ist. Dies aber erreichen wir sofort, wenn wir die bisher betrachteten Maaßverhältnisse im Parallelgitter so auffassen, wie es die projective Geometrie lehrt, nämlich als projective Beziehungen zu den beiden auf der unendlich fernen Geraden gelegenen imaginären „Kreispuncten". Alles, was wir jetzt ändern, ist, daß wir diese letzteren durch irgend zwei *reelle* Puncte der unendlich fernen Geraden ersetzen. Man nehme etwa die beiden Puncte, welche auf letzterer von den Linien $x \pm y = 0$ ausgeschnitten werden. Als „Entfernung" zweier Puncte xy und $x'y'$ erscheint dann bekanntlich der Ausdruck

$$\sqrt{(x-x')^2-(y-y')^2},$$

als „Winkel" der Verbindungslinien mit O der

$$\text{arc}\cdot\cos\cdot\frac{xx'-yy'}{\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sqrt{x'^2-y'^2}}.$$

„Drehung" um O ist eine homogene lineare Transformation von x und y, bei welcher jeder Punct der Ebene auf eines gleichseitigen Hyperbel fortschreitet, welche die Linien $x \pm y = 0$ zu Asymptoten hat. „Parallellinien" aber sind genau so zu definiren, wie bei der gewöhnlichen Maaßbestimmung, nämlich als Linien, die sich auf der unendlich fernen Geraden schneiden. — Im Sinne der so geschilderten Maaßbestimmung läßt sich nun jede indefinite Form f wieder durch ein von O auslaufendes parallelogrammatisches Gitter, jede Classe aequivalenter f durch ein Punctgitter deuten. Dabei bleibt die „Orientirung" des Gitters fürs erste natürlich noch unbestimmt. Die Existenz aber der unendlich vielen linearen Transformationen der indefiniten Form f in sich selbst findet ihr Gegenbild in dem

Umstande, daß jedes solche Parallelgitter nach einer endlichen „Drehung“ um O immer wieder in sich selbst übergeht. — Auch diese Angaben sind nur neu, was die zu Grunde gelegte Auffassung angeht. Denn in Wirklichkeit finden sich die Parallelgitter, von denen wir sprechen, bereits in Selling's berühmten Untersuchungen über indefinite Formen (Journal f. M., Bd. 76) zu Grunde gelegt. Der Unterschied ist nur, daß die Figuren dort in keine directe Beziehung zu einer verallgemeinerten Maaßbestimmung gesetzt sind, und daß in Folge dessen ihre unmittelbare Analogie zu den Gaussischen Parallelogrammnetzen nicht hervortritt. Diese Analogie ist aber hier das Wesentliche. Denn erst mit ihr ist der Schlüssel zur geometrischen Behandlung der zugehörigen Compositionstheorie gegeben. Die Sache wird dann übrigens so einfach, daß es nicht nöthig scheint, hier auf dieselbe noch näher einzugehen.

Zum Schlusse darf ich noch eine Bemerkung über componirbare Formen n^{ten} Grades machen. Bei ihnen wird man mit Parallelepipedsystemen des n-dimensionalen Raumes arbeiten müssen. Die geometrischen Methoden, deren sich Herr Minkowski neuerdings in seinen Untersuchungen über die Theorie der algebraischen ganzen Zahlen bedient (Journal f. M., Bd. 107), ordnen sich hier als specieller Fall ein.

Zur Invariantentheorie.

Von

H. Weber.

In den mannigfachen Untersuchungen über die Endlichkeit der Invariantensysteme ist, so viel ich weiß, bisher noch wenig oder nicht auf die Frage Rücksicht genommen worden, wie man für eine gegebene Form oder ein Formensystem ein vollständiges System von Grundformen bestimmen kann, durch die sich alle Invarianten und Covarianten nicht nur ganz und rational, sondern auch, wenn sie ursprünglich ganzzahlige Coëfficienten hatten, mit ganzzahligen Coeëfficienten darstellen lassen. Es ist der Zweck dieser kleinen Mittheilung, die gestellte Frage an dem einfachen Beispiel der Invarianten der binären biquadratischen Form zu beantworten.

Bei den biquadratischen Formen giebt es bekanntlich zwei unabhängige Invarianten, durch die sich alle anderen rational ausdrücken lassen; aber schon die Discriminante ist eine Invariante,

die sich zwar rational, aber nicht mit ganzzahligen Coëfficienten darstellen läßt.

Ich stütze mich in den folgenden Betrachtungen auf einen Satz, den Gauss im Art. 42 der Disq. arithm. für Functionen von einer Veränderlichen bewiesen hat, der sich aber sehr leicht auf Functionen von beliebig vielen Veränderlichen übertragen läßt, über den auch eine neuere Publication von Dedekind in der Festschrift zu Durèges Jubiläum vorliegt.

Eine ganze rationale Function von beliebig vielen Veränderlichen und ganzzahligen Coëfficienten heißt primitiv oder ursprünglich, wenn die Coëfficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, imprimitiv wenn sie einen solchen gemeinschaftlichen Theiler haben, und der größte gemeinschaftliche Theiler aller Zahlencoëfficienten heißt der Theiler der Function.

Dann hat der erwähnte Satz folgenden Ausdruck. Das Product zweier primitiver Functionen ist wieder eine primitive Function. Daraus folgt dann ohne weiteres, daß der Theiler des Productes zweier imprimitiver Functionen gleich dem Product der Theiler der beiden Factoren ist.

Um keine willkürlichen Elemente in unsere Fragestellung hineinzubringen, wollen wir hier die binären Formen ohne die üblichen Binomialcoëfficienten schreiben, also eine binäre Form 4ten Grades

$$(1) \qquad f(x, y) = a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a\ x y^3 + a_4 y^4$$

schreiben.

Unter einer Invariante wollen wir hier eine ganze rationale homogene Function mit ganzzahligen Coëfficienten

$$J(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = J(a)$$

mit der Invarianten-Eigenschaft verstehen, die darin besteht, daß, wenn für die a die Coëfficienten a' einer transformierten Form gesetzt werden und r die Substitutionsdeterminante ist

$$(2) \qquad J(a') = r^{2\mu} J(a),$$

wenn μ der Grad der Function J ist.

Die biquadratische Form (1) hat die beiden fundamentalen Invarianten

$$(3) \qquad \begin{aligned} A &= a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12 a_0 a_4, \\ B &= 2a_2^3 - 9 a_1 a_2 a_3 - 72 a_0 a_2 a_4 + 27 a_1^2 a_4 + 27 a_0 a_3^2, \end{aligned}$$

und wenn D die Discriminante bedeutet

$$(4) \qquad 27D = 4A^3 - B^2.$$

Setzt man hierin für A, B die Werthe aus (3) ein, so erhält die rechte Seite den Theiler 27. Es ist also $4A^3 - B^2$, obwohl primitiv

in A, B, nicht primitiv in den a. Ich nehme nun, indem ich zwei der Linearfactoren von $f(x, y)$ als neue Variable ξ, η einführe und die Substitutionsdeterminante $= 1$ annehme als Normalform von (1)

$$f = F(\xi, \eta) = a'_1 \xi^2 \eta + a'_2 \xi^2 \eta^2 + a'_3 \xi \eta^2,$$

was für die Invarianten A, B, D ergiebt

$$(5)\qquad \begin{aligned} A &= a'^2_2 - 3a'_1 a'_3, \\ B &= 2a'^3_2 - 9a'_1 a'_2 a'_3, \\ D &= a'^2_1 a'^2_2 a'^2_3 - a'^3_1 a'^3_3. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Elimination von $a'_1 a'_3$, daß a'_2 eine Wurzel der cubischen Gleichung

$$(6)\qquad z^3 - 3Az + B = 0$$

ist. Bei anderer Wahl der Linearfactoren ξ, η kann jede Wurzel dieser cubischen Gleichung für a'_2 genommen werden.

Nun schließen wir, da $r = 1$ ist, aus der Gleichung (2), daß $J(a)$ ganz und rational und ganzzahlig ausdrückbar ist durch a'_1, a'_2, a'_3. Da man aber, ohne a'_2 zu ändern, ξ, η durch $\lambda\xi$, $\eta : \lambda$, also a'_1, a'_3 durch $\lambda a'_1$, $a'_3 : \lambda$ ersetzen kann, wo λ ein willkürlicher Factor ist, so hängt dieser Ausdruck nur von dem Product $a'_1 a'_3$, nicht von diesen beiden Größen einzeln ab:

$$(7)\qquad J = \varphi(a'_1 a'_3, a'_2).$$

Wenn wir nun mit einer geeigneten Potenz von 3, etwa 3^ν multiplicieren, so können wir $3a'_1 a'_3$ nach (5) durch $a'^2_2 - A$ ersetzen, und erhalten

$$(8)\qquad 3^\nu J = \Phi(A, z)$$

wenn z für a'_2 gesetzt ist und Φ wieder eine ganzzahlige Function bedeutet.

Nun kann man mittelst der Gleichung (6) alle höheren Potenzen von z eliminieren und behält einen Ausdruck, der z nur noch bis zum zweiten Grad enthält, aber außerdem noch B.

Dieser Ausdruck kann sich nun nicht ändern, wenn z durch jede der drei Wurzeln von (6) ersetzt wird, die sicher von einander verschieden sind, wenn D nicht verschwindet; demnach kann dieser Ausdruck z überhaupt nicht mehr enthalten und es ergiebt sich

$$(9)\qquad 3^\nu J = \Psi(A, B),$$

worin Ψ wieder eine ganzzahlige Function bedeutet. Ersetzt man in diesem Ausdruck B^2 durch $4A^3 - 27D$, so geht er in eine der beiden Formen über

$$(10)\qquad 3^\nu J = \Phi(A, D) \text{ oder } B\Phi(A, D),$$

je nachdem der Grad von J in Bezug auf a gerade oder ungerade ist.

Die Frage ist also die:

Kann eine primitive Function $\Phi(A, D)$ durch Einsetzen der Ausdrücke von A, D durch die a imprimitiv werden und in ihrem Theiler den Factor 3 enthalten?

Dabei bemerken wir, daß wir bei Beantwortung dieser Frage in Φ alle die Glieder weglassen können, deren Coëfficient von Hause aus den Factor 3 hat. Außerdem können wir annehmen, daß Φ nicht den Factor D hat, mit Rücksicht auf den am Anfang ausgesprochenen Satz.

Hätte aber eine solche Function als Function der a den Theiler 3, so müßte eine durch drei theilbare Zahl entstehen, wenn alle a mit Ausnahme von a_2 gleich Null, $a_2 = 1$ gesetzt werden. Dann aber wird $D = 0$, $A = 1$, und es müßte also

$$\Phi(1, 0)$$

durch 3 theilbar sein, was der Annahme widerspricht, daß keiner der Factoren von Φ durch 3 theilbar und Φ nicht durch D theilbar sei.

Wir kommen also zu dem Resultat

Jede Invariante gerader Ordnung kann als ganze rationale Function mit ganzzahligen Coëfficienten durch A, D ausgedrückt werden, jede Invariante ungerader Ordnung kann als Product von B mit einer ganzen rationalen Function von A und D mit ganzzahligen Coëfficienten dargestellt werden.

Ich habe die Frage auch unter der Voraussetzung untersucht, daß die gegeben Form mit den Binomialcoëfficienten geschrieben ist

$$f(x, y) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 x y^3 + a_4 y^4,$$

und daß man unter einer ganzen Invariante eine solche versteht, die in diesen Coëfficienten a ganzzahlig ausgedrückt ist. Es erscheinen dann unter den ganzen Invarianten auch solche, die nach der ersten Darstellung als gebrochen zu betrachten sind, z. B. gerade die beiden fundamentalen Invarianten

$$i = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$
$$j = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4,$$

die mit den A und B durch die Gleichungen

$$A = 12i \qquad B = -27.\ 16j$$

zusammenhängen; und dann findet man durch ähnliche Schlüsse wie oben, daß alle ganzen Invarianten rational und mit ganzzahligen Coëfficienten durch i und j ausdrückbar sind. Es wird also hierbei ein Unterschied verwischt, der bei der ersten Darstellung hervortritt.

Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π.

Von

David Hilbert in Königsberg i/Pr.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Man nehme an, die Zahl e genüge der Gleichung n^{ten} Grades

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0,$$

deren Coëfficienten $a, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen sind. Wird die linke Seite dieser Gleichung mit dem Integral

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [(z-1)(z-2)\ldots(z-n)]^{\varrho+1} e^{-z} dz$$

multiplicirt, wo ϱ eine ganze positive Zahl bedeutet, so entsteht der Ausdruck

$$a\int_0^\infty + a_1 e \int_0^\infty + a_2 e^2 \int_0^\infty + \cdots + a_n e^n \int_0^\infty$$

und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:

$$P_1 = a\int_0^\infty + a_1 e \int_1^\infty + a_2 e^2 \int_2^\infty + \cdots + a_n e^n \int_n^\infty,$$

$$P_2 = \qquad a_1 e \int_0^1 + a_2 e^2 \int_0^2 + \cdots + a_n e^n \int_0^n.$$

Die Formel

$$\int_0^\infty z^\varrho e^{-z} dz = \varrho!$$

zeigt, daß das Integral $\int_0^\infty$ eine ganze rationale durch $\varrho!$ theilbare Zahl ist und ebenso leicht folgt, wenn man bezüglich die Substitutionen $z = z' + 1$, $z = z' + 2$, $\ldots$, $z = z' + n$ anwendet, daß $e\int_1^\infty$, $e^2 \int_2^\infty$, $\ldots$, $e^n \int_n^\infty$ ganze rationale durch $(\varrho+1)!$ theilbare Zahlen sind. Daher ist auch P_1 eine durch $\varrho!$ theilbare ganze Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho + 1$ die Congruenz

$$1) \qquad \frac{P_1}{\varrho!} \equiv \pm a (n!)^{\varrho+1}. \qquad (\varrho + 1)$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die absolut größten Werthe bezeichnet werden, welche die Functionen

$$z(z-1)(z-2)\dots(z-n)$$

bezüglich

$$(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z}$$

in dem Intervalle $z=0$ bis $z=n$ annehmen:

$$\left|\int_0^1\right| < kK^\varrho, \left|\int_0^2\right| < 2kK^\varrho, \dots, \left|\int_0^n\right| < nkK^\varrho$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\varkappa = \{|a_1 e| + 2|a_2 e^2| + \dots + n|a_n e^n|\}k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$2) \qquad |P_2| < \varkappa K^\varrho.$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl ϱ, welche **erstens** durch die ganze Zahl $a.n!$ theilbar ist und für welche **zweitens** $\varkappa\frac{K^\varrho}{\varrho!}<1$ wird. Es ist dann $\frac{P_1}{\varrho!}$ infolge der Congruenz 1) eine nicht durch $\varrho+1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da üderdies $\frac{P_2}{\varrho!}$ infolge der Ungleichung 2) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{P_1}{\varrho!}+\frac{P_2}{\varrho!}=0$$

unmöglich.

Man nehme an, es sei π eine algebraische Zahl und zwar genüge die Zahl $\alpha_1 = i\pi$ einer Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Coëfficienten. Bezeichnen wir dann mit $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ die übrigen Wurzeln dieser Gleichung, so muß, da $1+e^{i\pi}$ den Werth 0 hat, auch der Ausdruck

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\dots(1+e^{\alpha_n}) = 1+e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\dots+e^{\beta_N}$$

den Werth 0 haben und hierin sind, wie man leicht sieht, die N Exponenten $\beta_1, \dots, \beta_N$ die Wurzeln einer Gleichung N^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Sind überdies etwa die M Exponenten $\beta_1, \dots, \beta_M$ von 0 verschieden, während die übrigen verschwinden, so sind diese M Exponenten $\beta_1, \dots, \beta_M$ die Wurzeln einer Gleichung M^{ten} Grades von der Gestalt

$$f(z) = bz^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls ganze rationale Zahlen sind und in

welcher insbesondere der letzte Coëfficient $b_\varkappa$ von 0 verschieden ist. Der obige Ausdruck erhält dann die Gestalt

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_\varkappa}$$

wo a eine ganze positive Zahl ist.

Man multiplizire diesen Ausdruck mit dem Integral

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [g(z)]^{\varrho+1} e^{-z} dz,$$

wo ϱ wiederum eine ganze positive Zahl bedeutet und wo zur Abkürzung $g(z) = b^\varkappa f(z)$ gesetzt ist; dann ergiebt sich

$$a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_0^\infty + e^{\beta_2}\int_0^\infty + \cdots + e^{\beta_\varkappa}\int_0^\infty$$

und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:

$$P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty + \cdots + e^{\beta_\varkappa}\int_{\beta_\varkappa}^\infty,$$

$$P_2 = \qquad e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}\int_0^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_\varkappa}\int_0^{\beta_\varkappa},$$

wo allgemein das Integral $\int_{\beta_\iota}^\infty$ in der complexen z-Ebene vom Punkte $z = \beta_\iota$ längst einer zur Axe der reellen Zahlen parallelen Geraden bis zu $z = +\infty$ hin und das Integral $\int_0^{\beta_\iota}$ vom Punkte $z = 0$ längst der geraden Verbindungslinie bis zum Punkte $z = \beta_\iota$ hin zu erstrecken ist.

Das Integral $\int_0^\infty$ ist wieder gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ theilbaren Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho + 1$ die Congruenz

$$\frac{1}{\varrho!}\int_0^\infty \equiv b^{\varrho\varkappa+\varkappa} b_\varkappa^{\varrho+1}. \qquad (\varrho + 1)$$

Mittelst der Substitution $z = z' + \beta_\iota$ und wegen $g(\beta_\iota) = 0$ ergiebt sich ferner

$$e^{\beta_\iota}\int_{\beta_\iota}^\infty = \int_0^\infty (z' + \beta_\iota)^\varrho [g(z' + \beta_\iota)]^{\varrho+1} e^{-z'} dz' = (\varrho + 1)!\, G(\beta_\iota),$$

wo $G(\beta_\iota)$ eine ganze ganzzahlige Function von β_ι bedeutet, deren

Grad in β_i unterhalb der Zahl $\varrho M + M$ bleibt und deren Coëfficienten sämmtlich durch $b^{\varrho\varkappa+\varkappa}$ teilbar sind. Da $\beta_1, \ldots, \beta_\varkappa$ die Wurzeln der ganzzahligen Gleichung $f(z) = 0$ sind und mithin durch Multiplication mit dem ersten Coëfficienten b zu ganzen algebraischen Zahlen werden, so ist

$$G(\beta_1) + G(\beta_2) + \cdots + G(\beta_\varkappa)$$

notwendig eine ganze rationale Zahl. Hieraus folgt, daß der Ausdurck P_1 gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ theilbaren Zahl wird und zwar gilt nach dem Modul $\varrho+1$ die Congruenz

$$3) \qquad \frac{P_1}{\varrho!} \equiv ab^{\varrho\varkappa+\varkappa} b_\varkappa^{\varrho+1}. \qquad (\varrho+1)$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die größten absoluten Beträge bezeichnet werden, welche die Functionen $zg(z)$ bezüglich $g(z)e^{-z}$ auf den geradlinigen Integrationsstrecken zwischen $z = 0$ bis $z = \beta_i$ annehmen:

$$\left|\int_0^{\beta_i}\right| < |\beta_i| k K^\varrho \qquad (i = 1, 2, \ldots, M)$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\varkappa = \{|\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \cdots + |\beta_\varkappa e^{\beta_\varkappa}|\} k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$4) \qquad |P_2| < \varkappa K^\varrho.$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl ϱ, welche erstens durch $abb_\varkappa$ theilbar ist und für welche zweitens $\varkappa \frac{K^\varrho}{\varrho!} < 1$ wird. Es ist dann $\frac{P_1}{\varrho!}$ infolge der Congruenz 3) eine nicht durch $\varrho+1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da überdies $\frac{P_2}{\varrho!}$ infolge der Ungleichung 4) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{P_1}{\varrho!} + \frac{P_2}{\varrho!} = 0$$

unmöglich.

Es ist leicht zu erkennen, wie auf dem eingeschlagenen Wege ebenso einfach auch der allgemeinste Lindemannsche Satz über die Exponentialfunction sich beweisen läßt.

Königsberg i/Pr., den 5. Januar 1893.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juni 1892.

(Fortsetzung.)

c. Atti. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. Fasc. 9 u. 10. 1. Semestre. Roma 1892.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze :
Bollettino delle Pubblicazione Italiane 1892. N. 154—156. Firenze 1892.
Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College.
Bulletin. Vol. XXIII. N. 2. Cambridge U. S. A. 1892.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. XI. N. 98. 99. Baltimore 1892.
Preliminary adress of the auxiliary comittée on an African ethnological congress at Chicago in 1893.
College of Science. Imp. University Japan.
Journal. Vol. V. Part 1. Tōkyō, Japan 1892.

Nachträge.

Iconography of Australian Salsolaceons Plants by Baron F. von Mueller. Ninth Decade. Melbourne 1891.
Australian Association for Advancement of Science. Report of the third meeting at Christchurch. Sidney 1891.
Emile Lemoine:
a. Sur une transformations relative a la géométrie du triangle (extr. du Bulletin de la S. mathem. de France).
b. Sur les transformations systématiques des formules relatives an triangle (Association française pour l'avancement des sciences etc.). Congrès de Marseille. 1891.
c. Étude sur une nouvelle transformation dite transformation Continue.
d. Trois théoremès sur la géométrie du triangle. (Extrait de la Revue de mathém. speciales Dec. 1891).
ΑΘΗΝΑ. Band I. Heft 1 u. 2.
„ II. „ 1—4. 3 u. 4 doppelt.
„ III. „ 1—4.
„ IV. „ 1.

Juli 1892.

Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin:
a. Abhandlungen. 1891.
b. Sitzungsberichte. XXIX—XXXVII. 1892. Berlin 1892.
Handbuch der organischen Chemie v. Beilstein. Dritte Aufl. 4. 5. Lieferung. (Band I. Lieferung 4. 5). Hamburg 1892.
Astronomische Gesellschaft.
Vierteljahrsschrift. 27. Jahrg. 2. Heft. Leipzig 1892.
Deutsche Morgenländische Gesellschaft.
Zeitschrift. 46. Band. 1. Heft. Leipzig 1892.
Ueber Transplantation am Pflanzenkörper von Dr. Herm. Vöchting. Tübingen 1892.
Chemikerzeitung. Jahr XVI. N. 60 u. 61. Cöthen 1892.
Prospekt. Ergebnisse der in dem Atlantischen Ocean ausgeführten Plankton-Expedition der Humbold-Stiftung v. Victor Hensen. Kiel.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich.
Vierteljahrsschrift. 37. Jahrg. Erstes Heft.
Astronomische Mittheilungen v. Dr. Rud. Wolf. Seite 365—380. Zürich 1892.
Historisch-antiq. Gesellschaft von Graubunden.
XXI. Jahresbericht. Jahrg. 1891. Chur.
La société d'histoire et d'Archéologie de Genève:
a. Bulletin. Tome prem. Livr. 1.
b. Mémoires et documents. Nouv. Série. Tome troisième. Livr. 2. Genève 1892.
Oesterreichische Gesellschaft für Meteorologie und deutsche meteorologische Gesollschaft.
M. Zeitschrift. (Band IX zugleich Bd. XXVII der Zeitschrift der Oesterr. Ges. für M.) 1892. Heft 1—7. Jan.—Juli. Wien 1892.
Verein für siebenbürgische Landeskunde.
Archiv. Neue Folge. 24. Band. 2. Heft. Hermannstadt 1892.
Akademie der Wissenschaften in Krakau.
Anzeiger 1892. Juni. Krakau 1892.
Akademie der Wissenschaften in Krakau:
a. Pamiętnik akad. Matemat.-przyrod. T. XVIII, 2.
b. Rozprawy akad. Wydział histor.-filozof. Ser. 2. T. III u. IV.
c. Rozprawy akad. Wydział filolog. Ser. 2. T. I.
d. Sprawozdania komisyi do badania histor. sztuki w Polsce. T. V, 2.
e. Biblioteka pisarzów polskich. Nr. 21.
f. W. Matlakowski, Budowichwo ludowe mit Tafeln. Kraków 1892.
K. K. Sternwarte zu Prag.
Magnetische und meteorologische Beobachtungen im J. 1891. 52. Jahrg. Prag 1892.
Nature. Vol. 46. N. 1184—1187.
The Royal Society:
Proceedings. Vol. L. N. 307. Vol. LI. N. 310—312.
The London mathematical society.
Proceedings. N. 440—444.
The Royal Astronomical Society.
Monthly notices. Vol. LII. N. 8. June 1892.
The Manchester literary and philosophical Society.
Memoirs and Proceedings 1891—92. Fourth series. Vol. 5. N. 1. Manchester.
The Royal Irish Academy.
a. Transactions. Vol. XXIX. Part XVIII.
b. Cunningham memoirs. N. VII. Dublin 1892.
La société géologique de Belgique.
Annalcs. Tome XIX. 2e Livr. Liège 1891—92.
Musée Guimet:
a. Annales. Tome 18. Avadâna-Çataka.
b. Annales. Revue de l'histoire des religions. Deuxième année. Tome XXIII. N. 2. 3. Tome XXIV. N. 1. 2. Paris 1891.
Faculté des sciences de Marseille.
Annales. Tome I. Marseille 1891.
La société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg.
Mémoires. Tome XXVII. (Troisième série. Tome VII). Paris 1891.
La société Linneénne de Lyon.
Annales. Année 1888—90. Tome XXXV—XXXVII. Lyon 1889—91.
Dr. Saint-Lager:
a. La guerre des nymphes etc.
b. La priorité des noms de plantes. Paris 1890—91.
l'Académie des sciences et lettres de Montpellier:
a. Lettres. Tome IX. N. 1, 2.
b. Sciences. Tome XI. N. 2.
c. Médécine. Tome VI. N. 2.
Sur la rectification des arcs des courbes dites limaçons de Pascal par J. Marchand (Extrait de Elprogreso matematico 1892 p. 68).

La société des Antiquaires de Picardie:
a. Bulletin. Année 1891. N. 1—3.
b. Mémoires. Quatrième série. Tome I. Paris 1891.
La R. Accademia delle scienze di Torino:
a. Atti. Vol. XXVII. Disp. 9a—11a. 1891—92. Torino.
b. Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1891, all' osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1892.
L'Accademia delle scienze fisiche e matematiche. (Sezione della società R. di Napoli).
Rendiconti. Serie 2a. Vol. VI. Fasc. 6a. Napoli 1892.
La R. Accademia dei Lincei:
a. Atti in 4°. 1892. Rendiconto dell' adunanza solenne del 5. giugno 1892. onorata della presenza di S. M. il Re.
b. Atti Rendiconti. Classe di scienze fisiche matematiche e naturali. Vol. I. Fasc. 11. 12 e Indice del volume. 1. Sem. Fasc. 1. 2. Sem.
c. Rendiconti. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Serie Quinta. Vol. 1. Fasc. 5. Roma 1892.
Biblioteca Nazionale centrale di Firenze.
Bollettino delle pubblicazioni Italiane 1892. N. 157, 158. Firenze 1892.
Koninklijke Akademie van Wetenschappen gevestigt te Amsterdam:
a. Jaarboek 1891.
b. Verslagen en Mededeelingen. Afdeeling Letterkunde. Derde Reeks 8de Deel. Afdeeling Natuurkunde. Derde Reeks 8de Deel.
c. Catalogus van de Boekerig. Erste Vervolg. het Register.
d. Verhandelingen. Afd. Letterkunde 20. Deel. Afd. Natuurkunde 29. Deel. Amsterdam 1892.
Veianius Preisgedicht. Amsterdam 1892.
Kon. Institut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië.
Bijdragen. 5. Volgreeks. 7. Deel. Derde Afl. 'S Gravenhage 1892.
L'Académie Imp. des Sciences de St. Petersbourg:
Memoires. Tome XXXVIII. N. 9. 10. VII. Serie. St. Petersbourg 1892.
Academie R. des Sciences et des Lettres de Danemark Copenhague:
a. Oversigt. 1891. N. 3. 1892. N. 1.
b. Mémoires. 6me série. Classe des sciences t. VII. N. 5.
c. Regesta Diplomatica. Series 2. Tomus posterior I. Ab Anno 1537—1558. Copenhague 1891—1892.
Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College:
a. Bulletin. Vol. XXIII. N. 3.
b. Memoirs. Vol. XIV. N. 2. Vol. XVII. N. 2. Cambridge U. S. A. 1892.
United States Naval Observatory:
a. Report of the Superintendent for the year ending 1891. June 30.
b. Washington Observations 1887. Washington 1891—92.
U. S. Department of Agriculture:
a. Experiment Station Bulletin N. 10.
b. Weather Bureau Bulletin N. 1. Washington 1892.
Astronomic Papers. Vol. II. Part VI. Vol. III. Part V. Washington 1891.
Smithsonian Institution United States National Museum:
a. Report. 1889.
b. Bulletin. N. 41. 42. Washington 1891.
American Philosophical Society:
a. Proceedings. Vol. XXIX. N. 136. Vol. XXX. N. 137.
b. List of surviring Members. Philadelphia 1891. 1892.
Scientific Laboratories of Denison University.
Bulletin. Vol. VI. Pars 1—2. Granville, Ohio 1892.
Academy of Natural Sciences of Philadelphia.
Proceedings. Part I, January—March. Philadelphia 1892.
Observatory of Yale University.
Report for the year 1891—92.
The Journal of Comparative Neurology. Vol. II. Pages 21—88. Mai 1892. Granville Ohio.

American Geographical Society.
Bulletin. Vol. XXIV. N. 2. New-York 1892.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. XI. N. 100. Baltimore 1892.
Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio.
Mittheilungen. 48. Heft. Band V. Seite 349—398. Yokohama.

Nachträge.

Royal Irish Academy.
Proceedings. Third Series. Vol. II. N. 2.
Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Vol. X. N. 6. Coimbra 1892.

August, September und Oktober 1892.

a. Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XXXVIII. XXXIX—XL. Berlin 1892.
b. Acta Borussica. Die preussische Seidenindustrie im 18. Jahrhundert und ihre Begründung durch Friedrich den Grossen. Herausgeg. v. G. Schmoller und O. Hintze. 3 Bände. Berlin 1892.
Königl. Sächsische Ges. der Wissenschaften zu Leipzig:
a. Berichte und Verhandlungen. Mathematisch-physische Classe. 1892. II.
b. Abhandlungen des XVIII. Bandes der mathematisch-physischen Classe. N. VII. Leipzig 1892.
Deutsche Morgenländische Gesellschaft.
Zeitschrift. Band 46. 2. Heft. Leipzig 1892.
Neue Grundlage einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Von Dr. A. Krager und Dr. F. Prym. Leipzig 1892.
Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. 5. Stück.
Zone $+ 50^0$ bis $+ 55^0$ etc. Leipzig 1892.
Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. 65. Band. Erstes und 2. Heft. Drittes Heft. Leipzig 1892.
K. b. Akademie der Wissenschaften zu München. Sitzungsberichte:
a. philosophisch-philologisch und historische Classe 1892. Heft I, II.
b. mathematisch-physikalische Classe 1892. Heft II. München 1892.
Naturforschende Gesellschaft in Emden.
76. Jahresbericht pro 1890—91. Emden 1892.
Historischer Verein von Oberpfalz und Regensburg.
Register zu den Verhandlungen. Band 1—40. 1832—86. Regensburg 1892.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg.
a. Verhandlungen. N. F. XXVI. Band. Heft 4, 5.
b. Sitzungsberichte. Jahrg. 1892. N. 4, 5, 6.
Ueber den Ursprung des Oculomotorius beim Menschen v. Kölliker. (Aus den Sitzungsberichten der Würzb. phys. und med. Ges. XIII. Sitzung 1892).
Ueber die geologischen Verhältnisse des Untergrundes der Städte Braunschweig und Wolfenbüttel von Prof. Dr. Kloos. Braunschweig 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 2.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

8. Februar. №. 3. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. December 1892.

Die automorphen Formen von beliebigem Geschlechte.

Von

E. Ritter in Frankfurt a. M.

Vorgelegt von F. Klein.

In meiner Dissertation[1]), sowie in einer in diesen Nachrichten erschienenen Note[2]), habe ich eine gewisse allgemeine formentheoretische Behandlungsweise der Poincaré'schen Θ-Functionen vom Geschlechte Null durchgeführt, indem ich dieselben als automorphe Formen zweier Variablen ζ_1, ζ_2 betrachtete. Ich habe nun die entsprechende Betrachtungsweise auf die automorphen Formen von beliebigem Geschlechte angewandt, und will in dieser Note die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung mitteilen.

Der Kernpunkt der ganzen Betrachtung ist die Aufstellung gewisser einfachsten automorphen Formen, welche nur an je einer Stelle jedes Fundamentalbereichs verschwinden, derselben Formen,

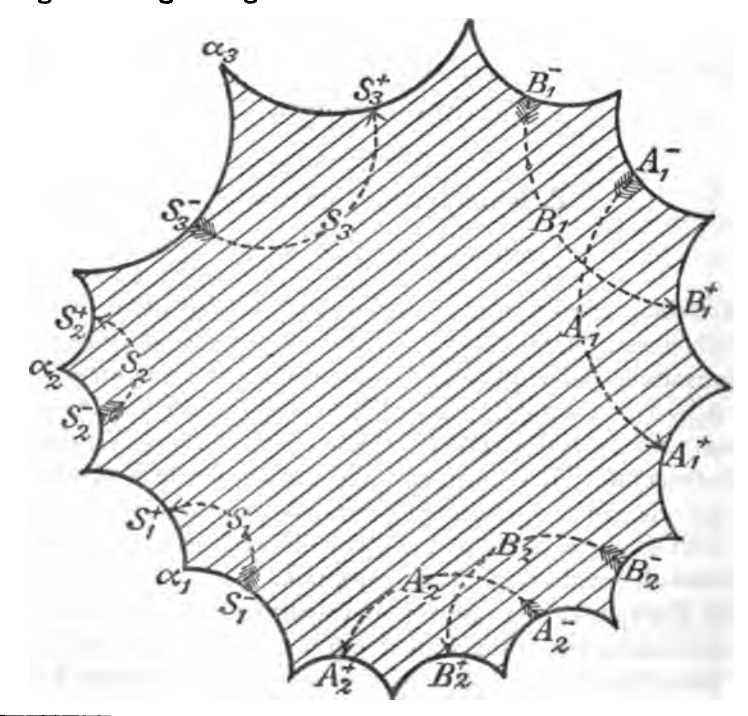
1) Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null. (Math. Ann. Bd. 41).

2) 1892 Nr. 8.

welche ich für $p = 0$ in meiner Dissertation „Grundformen" genannt habe, und die Darstellung der allgemeinsten automorphen Form als Product solcher Grundformen. Endsprechend der Ausdrucksweise, welche Hr. Schlesinger in einer neuerdings veröffentlichten Arbeit verwendet[1]), sowie in Uebereinstimmung mit der Terminologie, welche Hr. Klein in den Fällen $p > 0$ ohnehin gebraucht[2]), werde ich diese Formen weiterhin allgemein als „Primformen" bezeichnen. Allerdings weichen, bei $p > 0$, meine Primformen von den bei Herrn Klein aufgestellten noch um eine Potenz der (nirgends verschwindenden) sog. „Mittelform" ab; ich werde dieselben daher mit Rücksicht auf ihre enge Beziehung zu den algebraischen Formen der Deutlichkeit halber als „algebraische Primformen" bezeichnen.

I. Gruppentheoretisches.

Der Fundamentalbereich einer automorphen Function vom Geschlechte p läßt sich stets so wählen, wie es für $p = 2$, $n = 3$ in folgender Figur angedeutet ist.



1) Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen. (Crelle's Journ. Bd. 110).

2) Zur Theorie der Abel'schen Functionen. (Math. Ann. Bd. 36).

Die erzeugenden Substitutionen genügen dabei den Relationen:

$$S_1 . S_2 . S_n \ldots B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_1 \ldots B_p A_p^{-1} B_p^{-1} A_p = 1$$
$$S_i^{l_i} = 1,$$

wozu noch gewisse „secundäre Relationen" kommen können.

Die Gruppe gestattet stets eine „monodimorphe"[1]) Spaltung in eine unimodulare homogene Gruppe mit den Erzeugenden:

$$\mathsf{S}_i) \quad \begin{aligned} (\zeta' \alpha_i) &= e^{+\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \alpha_i), \\ (\zeta' \beta_i) &= e^{-\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \beta_i), \end{aligned}$$

$$\mathsf{A}_\varkappa) \quad \begin{aligned} (\zeta' \alpha_\varkappa) &= \varrho_\varkappa^{+1} (\zeta \alpha_\varkappa), \\ (\zeta' \beta_\varkappa) &= \varrho_\varkappa^{-1} (\zeta \beta_\varkappa), \end{aligned} \qquad \mathsf{B}_\varkappa) \quad \begin{aligned} (\zeta' \alpha'_\varkappa) &= \varrho_\varkappa'^{+1} (\zeta \alpha'_\varkappa), \\ (\zeta' \beta'_\varkappa) &= \varrho_\varkappa'^{-1} (\zeta \beta'_\varkappa), \end{aligned}$$

für welche die primären Relationen folgendermaßen lauten:

$$\mathsf{S}_1 . \mathsf{S}_2 \ldots \mathsf{S}_n . \mathsf{B}_1 \mathsf{A}_1^{-1} \mathsf{B}_1^{-1} \mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{B}_p \mathsf{A}_p^{-1} \mathsf{B}_p^{-1} \mathsf{A}_p = (-1)^n,$$
$$\mathsf{S}_i^{l_i} = -1.$$

Die Multiplicatoren

$$e^{\frac{\lambda_i}{l_i} i\pi}, \quad e^{\sigma_\varkappa . 2i\pi}, \quad e^{\sigma'_\varkappa . 2i\pi}$$

einer automorphen Form müssen, wenn die Form eindeutig sein soll, gewissen Relationen genügen, diejenigen der Formen von geradzahligem Grade R denselben, wie die nichthomogenen Erzeugenden, diejenigen der Formen von ungeradzahligem Grade denselben Relationen, wie die homogenen Erzeugenden. Beide Arten von Relationen lassen sich in die Congruenzen zusammenfassen:

$$Rn + \sum \frac{\lambda_i}{l_i} \equiv 0 \pmod{2},$$
$$R + \lambda_i \equiv 0 \pmod{2}.$$

Es ergibt sich zugleich derselbe Satz, wie für $p = 0$: Jedem Multiplicatorsysteme für Formen von ungeradzahligem Grade entspricht eine isomorphe Spaltung der nichthomogenen Gruppe und umgekehrt.

II. Geschlossene Riemann'sche Fläche. Primformen.

Der oben beschriebene Fundamentalbereich mit seiner Kan-

1) Wegen dieser Ausdruckweise vergl. meine Dissertation S. 22 Anmerkung.

tenzuordnung bildet eine geschlossene Mannigfaltigkeit im Sinne von Herrn Klein[1]), und kann als solche vermittelst des Schwarz-Neumann'schen Grenzverfahrens conform auf eine Riemann'sche Fläche von endlicher Blätterzahl abgebildet werden. Diese Fläche setze ich — was immer möglich ist — als eine kanonische Fläche voraus[2]), welche über der Ebene einer Variablen s mit der Blätterzahl $m = \frac{2p-2}{d}$ sich ausbreitet. Diese geschlossene Fläche heiße Q. Den Rändern $A_\varkappa^-$, $A_\varkappa^+$, $B_\varkappa^-$, $B_\varkappa^+$ des Fundamentalbereichs der ζ-Ebene entsprechen die negativen und positiven Ufer eines Systems von $2p$ Rückkehrschnitten, welche die Fläche in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandeln, welches Q' genannt werden soll.

Auf der Fläche Q sind $2p$ unabhängige Periodenwege möglich. Es ist für das später folgende zweckmäßig, dieselben nicht allein ihrem Sinne, sondern auch ihrer Lage nach genau festzulegen, nämlich so, daß sie den Substitutionswegen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ entsprechen, und daß die zerschnittene Fläche Q' ganz zur Rechten eines jeden der Periodenwege liegt. Es sollen also p Periodenwege $A_\varkappa$ längs $B_\varkappa^+$ von $A_\varkappa^-$ nach $A_\varkappa^+$, und p Periodenwege $B_\varkappa$ längs $A_\varkappa^-$ von $B_\varkappa^-$ nach $B_\varkappa^+$ verlaufen.

Auf der Fläche Q existiren p linear unabhängige überall endliche Integrale w^{z}, mit den Perioden $\omega_{\alpha\varkappa}$, $\omega'_{\alpha\varkappa}$ längs der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$.

Für diese Integrale lege ich gewisse Ausgangszweige $\bar{w}_\alpha^{z}$ durch die Bestimmung fest, daß der Integrationsweg ganz innerhalb Q' verlaufen soll.

Ferner bedeute $P_{\xi,\eta}^{z,w}$ ein Integral 3. Gattung, welches der Einfachheit halber so ausgewählt sein möge, daß es Vertauschung von Argument und Parameter gestattet.

Der Ausgangszweig $\bar{P}_{\xi,\eta}^{z,w}$ sei so gewählt, daß beide Integrationswege ganz innerhalb Q' verlaufen und einander nicht überkreuzen.

Die Perioden der den w_α^{z}, $P_{\xi,\eta}^{z,w}$ entsprechenden Normalcombinationen von Integralen 2. Gattung heißen $-\eta_{\alpha\varkappa}$, $-\eta'_{\alpha\varkappa}$.

Zwischen den Größen $\omega_{\alpha\varkappa}$, $\omega'_{\alpha\varkappa}$, $\eta_{\alpha\varkappa}$, $\eta'_{\alpha\varkappa}$ bestehen gewisse Relationen, die Verallgemeinerung der Legendre'schen Relation im Falle $p = 1$.

---

1) Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. (Math. Ann. Bd. 21).

2) F. Klein: Zur Theorie der Abel'schen Functionen § 8—9. (Math. Ann. Bd. 36).

Durch die Spaltung $z = \frac{z_1}{z_2}$ gelangt man zu den „algebraischen Formen“ der Fläche, insbesondere zu den „ganzen Formen“.

Von diesen sind besonders hervorzuheben:

1) die Verzweigungsform $G(z_1, z_2)$ vom Grade $d + 2$, welche an den Verzweigungsstellen der kanonischen Fläche je mit der Multiplicität derselben verschwindet,

2) die p linear unabhängigen Formen $d$ten Grades von z_1, z_2, welche sich so auswählen lassen, daß

$$\varphi_1(z_1, z_2) : \varphi_2(z_1, z_2) : \ldots : \varphi_p(z_1, z_2) = dw_1^{z} : dw_2^{z} : \ldots : dw_p^{z}.$$

Ferner ist besonders wichtig die überall endliche und von 0 verschiedene Differentialform $(-d)$ten Grades

$$d\omega_z = -\frac{(z, dz)}{G(z_1, z_2)} = \frac{dw_\alpha^z}{\varphi_\alpha(z_1, z_2)}.$$

Von hier aus gelangt man durch die Formel

$$\Omega(z, e) = \sqrt{-d\omega_z \,.\, d\omega_e \,.\, e^{-P_{z,e}^{z+dz, e+de}}}$$

zu der von Herrn Klein[1]) eingeführten Primform. Dieselbe ist in z_1, z_2 vom Grade

$$-\frac{d}{2} = -\frac{p-1}{m}.$$

Der mit $\overline{P}_{z,e}^{z+dz, e+de}$ gebildete Ausgangszweig heiße $\overline{\Omega}(z, e)$.

Läßt man z_1, z_2, und damit z irgend welche auf der Fläche Q geschlossene Wege beschreiben, so multiplicirt sich die transcendente Primform mit gewissen Exponentialfactoren, die von Herrn Klein nur erst in unzureichender Weise bestimmt sind. Es ist sowohl an sich, wie für meine Zwecke dringend notwendig, nicht allein den Multiplicator selbst samt seinem noch unbestimmt gebliebenen Vorzeichen, sondern auch den Zuwachs von $\log \Omega(z, e)$ genau, nicht nur, wie bisher geschehen, bis auf Vielfache von πi anzugeben. Das Ergebnis meiner Untersuchung in dieser Richtung ist folgendes:

Es sei

$$(n_\varkappa + 1)\,2\pi i \text{ bezw. } (n'_\varkappa + 1)\,2\pi i$$

der Zuwachs von

1) Zur Theorie der Abel'schen Functionen § 4 (Math. Ann. Bd. 36).

$$\log(s_2^{\lambda}.d\omega_s) = \log\left(\frac{s_2^{\lambda+2}}{G(s_1, s_2)}\,ds\right)$$

längs des Periodenweges A_x bezw. B_x, wenn man ds immer in der Richtung der Bewegung gerichtet denkt.

Es lasse sich nun der Weg von $s = \frac{s_1}{s_2}$ durch Verschiebung auf Q' in eine Reihenfolge von je μ_x Periodenwegen A_x, μ'_x Periodenwegen B_x, q' Umkreisungen der m Punkte $s = \infty$ und in r Umkreisungen des Punktes e deformiren. Zugleich sei q_2 die Anzahl der Umläufe des Wertes von s_2 um $s_2 = 0$.

Ich führe die Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha &= \begin{array}{l} \mu_1\omega_{\alpha 1} + \mu_2\omega_{\alpha 2} + \cdots + \mu_p\omega_{\alpha p} \\ + \mu'_1\omega'_{\alpha 1} + \mu'_2\omega'_{\alpha 2} + \cdots + \mu'_p\omega'_{\alpha p} \end{array} \\
\eta_\alpha &= \begin{array}{l} \mu_1\eta_{\alpha 1} + \mu_2\eta_{\alpha 2} + \cdots + \mu_p\eta_{\alpha p} \\ + \mu'_1\eta'_{\alpha 1} + \mu'_2\eta'_{\alpha 2} + \cdots + \mu'_p\eta'_{\alpha p} \end{array} \\
n &= \begin{array}{l} \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \cdots + \mu_p n_p \\ + \mu'_1 n'_1 + \mu'_2 n'_2 + \cdots + \mu'_p n'_p. \end{array}
\end{aligned}$$

Ferner sei ν eine von der Reihenfolge der Periodenwege A_x, B_x abhängige ganze Zahl. Behufs Bildung dieser Zahl hat man für jedes Mal, daß ein Weg B_x später als der entsprechende Weg A_x durchlaufen wird, $\Delta\nu = +1$, dagegen so oft A_x später als B_x durchlaufen wird $\Delta\nu = -1$ zu setzen, umgekehrt, wenn einer der beiden Wege in negativem Sinne durchlaufen wird, und schließlich die Summe $\nu = \Sigma\Delta\nu$ zu bilden.

Dann lautet der Zuwachs von $\log\bar{\Omega}(s, e)$:

$$r.2\pi i - \frac{p-1}{m}(q_2 - q')\,2\pi i + (n + \nu)\pi i + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \eta_\alpha(\overline{w}_\alpha^{s_0} + \tfrac{1}{2}\omega_\alpha).$$

Mit Hülfe der transcendenten Primform construirt man nach Herrn Klein eine Mittelform; ich wähle die folgende aus:

$$\bar{\mu}(s_1, s_2) = \left\{\frac{\bar{\Omega}(s\infty')\,\bar{\Omega}(s\infty'')\ldots\bar{\Omega}(s\infty^{(m)})}{s_2}\right\}^{\frac{1}{m}},$$

wo unter ∞', ∞'', $\ldots$ $\infty^{(m)}$ die m bis $s = \infty$ übereinanderliegenden Punkte der Riemann'schen Fläche verstanden sind.

Die Mittelform ist in s_1, s_2 vom Grade $-\frac{p}{m}$.

Dem oben beschriebenen geschlossenen Wege von s_1, s_2 entspricht folgender Zuwachs von $\log\bar{\mu}(s_1, s_2)$:

$$-\frac{p}{m}(q_2-q')\,2\pi i+(n+\nu)\pi i+\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p}\eta_\alpha(\overline{W}_\alpha^z+\tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\overline{w}^{z\alpha'}+\overline{w}^{z\alpha''}+\cdots+\overline{w}^{z\alpha^{|m|}}=m\overline{W}_\alpha^z.$$

Die Definition der Functionen $\overline{W}_\alpha^z$ ist übrigens von der Wahl des unendlich fernen Punktes innerhalb gewisser Grenzen unabhängig, wie man mit Hülfe des Abel'schen Theorems leicht einsieht.

Die $\overline{W}_\alpha^z$ sind ebenso, wie die $\overline{w}_\alpha^{z}$ Integrale 1. Gattung, doch sind die untern Grenzen nicht bei allen p Integralen dieselben.

Ich thue nun einen Schritt über die im 36ten Annalenbande von Herrn Klein getroffenen Begriffsbestimmungen hinaus, indem ich an Stelle der Klein'schen Primform $\Omega(z, e)$ eine gewisse modificirte Primform der Betrachtung zu Grunde lege, welche ich die „algebraische Primform“ nenne und folgendermaßen definire:

$$\overline{P}(z,e)=\overline{\Omega}(z,e)\cdot\frac{\overline{\mu}(e_1,e_2)}{\overline{\mu}(z_1,z_2)}.$$

Dieselbe ist in z_1, z_2 vom Grade $\frac{1}{m}$, und ihr Logarithmus vermehrt sich bei Durchlaufung des oben beschriebenen Periodenweges um

$$r.2i\pi+\frac{1}{m}(q_2-q')\,2i\pi-\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p}\eta_\alpha\overline{W}_\alpha^z,$$

also um eine von z unabhängige Constante, welche zudem noch den Vorzug hat, von der Reihenfolge der einzelnen Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ unabhängig zu sein.

Die algebraische Primform ist die einfachste bei geschlossenen Umläufen auf der Fläche sich multiplicativ verhaltende unverzweigte Form von z_1, z_2. Sie verschwindet nur an einer Stelle der Mannigfaltigkeit, und zwar von der ersten Ordnung, und wird nirgends unstetig.

Die allgemeinste Form von z_1, z_2, welche sich auf Periodenwegen, sowie auf Umläufen um gewisse Punkte $e_1, e_2 \ldots e_n$ multiplicativ verhält, und welche keine wesentlich singulären Stellen besitzt, hat die Gestalt:

$$\prod_{\iota=1}^{\iota=n} \overline{P}(ze_\iota)^{\frac{\varepsilon_\iota}{l_\iota}} \frac{\overline{P}(za_1)\,\overline{P}(za_2)\ldots\overline{P}(za_{\delta+s})}{\overline{P}(zb_1)\,\overline{P}(zb_2)\ldots\overline{P}(zb_s)} \cdot e^{k_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} k_\alpha \overline{W}_\alpha^z},$$

worin k_0, k_α irgend welche Constanten bedeuten.

Insbesondere haben alle ganzen algebraischen und Wurzelformen die Gestalt:

$$\overline{P}(za_1)\,\overline{P}(za_2)\;\ldots\;\overline{P}(za_\delta)\,e^{k_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} k_\alpha \overline{W}_\alpha^z}$$

Infolge dieser Darstellung ordnen sich die algebraischen Formen einer Fläche zugleich mit den Wurzelformen als Specialfälle in eine weit allgemeinere Formenclasse ein, nämlich in die „multiplicativen Formen" d. h. die Formen, welche bei Umläufen sich mit gewissen Constanten multipliciren. Zu diesen multiplicativen Formen gehören auch die Formen $P(z, e)$.

Ich bemerke beiläufig, daß die Gesamtheit der multiplicativen Formen von der speciellen Riemann'schen Fläche unabhängig ist, daß aber die Verteilung der einzelnen Multiplicatorsysteme auf die einzelnen Formen mit der Riemann'schen Fläche wechselt, und daß daher, wenn man von einer Riemann'schen Fläche zur andern übergeht, andere und andere multiplicative Formen die Rolle der algebraischen übernehmen.

Ich füge hinzu, daß in der Theorie dieser allgemeineren Formenclasse auch die algebraischen Functionen auf algebraischen Gebilden mit speciellen Moduln, z. B. die 2wertigen Functionen und Formen der hyperelliptischen Gebilde, welche eben nur bei den speciellen Moduln zu existiren scheinen, ihre Sonderstellung verlieren, indem sie bei beliebiger Abänderung der Moduln als multiplicative Functionen bezw. Formen erhalten bleiben.

III. Automorphe Formen von ζ_1, ζ_2.

Wie in meiner Dissertation werde ich zwischen der Spaltung von ζ in ζ_1 und ζ_2, sowie der Spaltung von z in z_1 und z_2 eine gewisse Beziehung festsetzen müssen, d. h. ζ_1, ζ_2 zweckmäßig als Formen von z_1, z_2 bestimmen.

An diese zu treffende Festsetzung sind zwei Forderungen zu stellen:

I) Geschlossenen Wegen des Wertsystems z_1, z_2 sollen ganze binäre lineare Substitutionen von ζ_1, ζ_2 entsprechen,

2) Erlaubten Wertsystemen von ζ_1, ζ_2 sollen nur erlaubte Wertsysteme z_1, z_2 entsprechen und umgekehrt.

Aus der ersten Forderung folgt, daß $\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\omega_z}$ auf der z Fläche sich nur multiplicativ verhält, aus der zweiten Forderung, daß dieser Quotient nur an denjenigen Stellen e_i, welche den Ecken α_i des Fundamentalbereichs entsprechen, unstetig wird, und zwar wie

$$\overline{P}(ze_i)^{-(1-\frac{1}{l_i})},$$

sonst aber nirgends verschwindet oder unendlich wird. Es ist also:

$$(\zeta, d\zeta) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{-(1-\frac{1}{l_i})} \cdot e^{c_0 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=p} c_\alpha \overline{W}_\alpha^z} \cdot d\omega_z,$$

unter c_0, c_α irgend welche noch willkürliche Constanten verstanden. Hieraus folgt ohne weiteres:

$$\zeta_1 = \zeta \left(\frac{d\zeta}{d\omega_z}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{l_i})} \cdot e^{c_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} c_\alpha \overline{W}_\alpha^z},$$

$$\zeta_2 = \left(\frac{d\zeta}{d\omega_z}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{l_i})} \cdot e^{c_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} c_\alpha \overline{W}_\alpha^z},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\zeta_1 = \zeta \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{l_i})} \cdot e^{c_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} c_\alpha \overline{W}_\alpha^z} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{G(z_1, z_2)}},$$

$$\zeta_2 = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{l_i})} \cdot e^{c_0 + \sum_{\alpha-1}^{\alpha=p} c_\alpha \overline{W}_\alpha^z} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{G(z_1, z_2)}}.$$

Diese so gefundenen ζ_1, ζ_2 sind in den Primformen $\overline{P}$ vom Grade

$$q = -p + 1 - \sum_{i=1}^{i=n} \tfrac{1}{2}(1 - \frac{1}{l_i}),$$

in z_1, z_2 vom Grade $q' = \frac{q}{m}$.

Der Einfachheit halber nehme ich weiterhin die willkürlichen Constanten c_0, c_α sämtlich $= 0$ an.

Die weitere Entwicklung geht nun denselben Gang, wie im Falle $p = 0$.

Es zeigt sich:

z_1, z_2 und alle bei Umläufen von z_1, z_2 sich multiplicativ oder invariant verhaltenden Formen von z_1, z_2 sind automorphe Formen von ζ_1, ζ_2.

Insbesondere sind die Formen

$$P(za) = \overline{P}(za) \cdot e^{k_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} k_\alpha \overline{W}_\alpha^a},$$

$$P(ze_i)^{\frac{1}{l_i}} = \overline{P}(ze_i)^{\frac{1}{l_i}} \cdot e^{k_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} k_\alpha \overline{W}_\alpha^a}$$

diejenigen automorphen Formen, welche den „Grundformen“ des Falles $p = 0$ entsprechen.

Die allgemeinste eindeutige automorphe Form mit dem Multiplicatorsysteme

$$e^{\frac{\lambda_i}{l_i} i\pi}, \quad e^{\sigma_x \cdot 2i\pi}, \quad e^{\sigma'_x \cdot 2i\pi}$$

ist notwendig von ganzzahligem Grade R, und hat die Gestalt:

$$F_R(\zeta_1, \zeta_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \frac{\overline{P}(za_1)\,\overline{P}(za_2)\ldots\overline{P}(za_{\delta+\varepsilon})}{\overline{P}(zb_1)\,\overline{P}(zb_2)\ldots\overline{P}(zb_\varepsilon)} \cdot e^{k_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} k_\alpha \overline{W}_\alpha^a}$$

wo die Constanten a, b, k und die ganzen Zahlen ε_i, δ folgenden Gleichungen zu entnehmen sind:

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} = \frac{\lambda_i + R}{2l_i} - E\left[\frac{\lambda_i + R}{2l_i}\right],$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{i=n} E\left[\frac{\lambda_i + R}{2l_i}\right] - R(p-1) - \frac{Rn + \Sigma \frac{\lambda_i}{l_i}}{2},$$

$$\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b = c_\alpha = \begin{matrix} N_1 \omega_{\alpha 1} + N_2 \omega_{\alpha 2} + \cdots + N_p \omega_{\alpha p} \\ + N'_1 \omega'_{\alpha 1} + N'_2 \omega'_{\alpha 2} + \cdots + N'_p \omega'_{\alpha p} \end{matrix} +$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=p} (\sigma'_x \omega_{\alpha x} - \sigma_x \omega'_{\alpha x}) - \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)\right) \overline{W}_\alpha^{e_i},$$

$$k_\alpha = \begin{matrix} N_1 \eta_{\alpha 1} + N_2 \eta_{\alpha 2} + \cdots + N_p \eta_{\alpha p} \\ + N'_1 \eta'_{\alpha 1} + N'_2 \eta'_{\alpha 2} + \cdots + N'_p \eta'_{\alpha p} \end{matrix} +$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=p} (\sigma'_x \eta_{\alpha x} - \sigma_x \eta'_{\alpha x}),$$

unter N_x, N'_x gewisse ganze Zahlen verstanden.

Es ergibt sich als Verallgemeinerung eines entsprechenden Satzes von $p = 0$ jetzt der Satz:

Stehen die Grade R, R' sowie die den Erzeugenden S_i entsprechenden Multiplicatoren ρ_i zweier automorphen Formen F, F' in der Beziehung:

$$R + R' = -2, \quad \rho_i \rho'_i = 1,$$

so ist stets

$$\delta + \delta' = 2p - 2, \quad \frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{\varepsilon'_i}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i}.$$

Eine besondere Wichtigkeit besitzen die eigentlich automorphen Formen vom Grade -2. Ihr allgemeiner Ausdruck lautet:

$$F_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{1-\frac{1}{l_i}} \cdot \varphi(z_1, z_2) \cdot Alg(z),$$

unter φ eine der p ganzen Formen δten Grades von z_1, z_2 verstanden, unter $Alg(z)$ eine algebraische Function der Fläche. Insbesondere sieht man;

Es gibt p linear unabhängige holotypische eigentlich automorphe Formen vom Grade -2, welche den p linear unabhängigen φ-Formen proportional sind.

Es gelten ferner dieselben Sätze, wie im Falle $p = 0$, z. B.:

Die Summe der Coefficienten der einfach ∞ werdenden Entwickelungsglieder aller incongruenten ∞-Stellen einer eigentlich automorphen Form -2ten Grades ist $= 0$.

Ferner aber:

Die Integrale der eigentlich automorphen Formen vom (-2)ten Grade sind die Abel'schen Integrale des Bereichs.

Es ist nämlich

$$\int F_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)(\zeta, d\zeta) = \int Alg(z) \,.\, \varphi(z_1, z_2) \,.\, d\omega_{\cdot} = \int Alg(z)\, dw'.$$

IV. Anzahl der willkürlichen Constanten.

In Betreff der Anzahl und Lage der beweglichen 0- und ∞-Stellen zeigen alle diejenigen Formen ein genau gleiches Verhalten, welche sich nur um Exponentialfactoren

$$e^{k_0+\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=p} k_\alpha \overline{W}'_\alpha}$$

von einander unterscheiden. Solche automorphe Formen will ich „verwandte Formen" nennen, die zugehörigen Multiplicatorsysteme „verwandte Multiplicatorsysteme."

Zwei Multiplicatorsysteme sind dann und nur dann verwandt, wenn die Zahlen λ_i übereinstimmen, und die $\sigma_\varkappa$, $\sigma'_\varkappa$ ev. nach Hinzufügung geeigneter ganzer Zahlen zu gleichen Summen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} (\sigma'_\varkappa \omega_{\alpha\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega'_{\alpha\varkappa})$$

Anlaß geben.

Sind zwei Multiplicatorsysteme verwandt, so ist jede Form des einen Multiplicatorsystems mit je einer Form des andern Multiplicatorsystems verwandt.

Alle Sätze über die Anzahl der 0-Stellen ∞-Stellen, und der willkürlichen Constenten gelten in gleicher Weise für alle verwandten Formen.

Die wichtigsten derartigen Sätze sind die folgenden:

Wenn $R \leqq -2$ ist, so enthalten die automorphen Formen eines bestimmten Multiplicatorsystemes mit s vorgegebenen ∞-Stellen (wobei ∞-Stellen höherer Ordnung mehrfach zu zählen sind) $s+\delta-p+1$ wilkürliche Constanten linear und homogen.

Ausgenommen sind die holotypischen eigentlich automorphen und verwandten Formen vom Grade -2, welche nicht $p-1$, sondern p willkürliche Constanten enthalten.

Wenn $R \geqq 0$ ist, so enthalten die automorphen Formen eines bestimmten Multiplicatorsystems mit s vorgegebenen ∞-Stellen $s+\delta-p+1+\tau$ willkürliche Constanten linear und homogen, unter τ die Anzahl der linear unabhängigen Formen $\varphi(z_1, z_2)$ verstanden, welche an den sämtlichen beweglichen 0-Stellen einer der automorphen Formen verschwinden.

Die eben ausgesprochenen Sätze, insbesondere der letztere, der die beiden andern umfaßt, basiren auf dem bekannten Riemann-Rochschen Satze über die Constantenzahl einer algebraischen Function. Es folgen ferner folgende Sätze:

Ist $R \geqq 0$, so ist die Mindestanzahl *allgemein gelegener* ∞-Stellen einer automorphen Form von bestimmtem Multiplicatorsysteme $p-\delta$.

Eine Ausnahme bilden die eigentlich automorphen und verwandten Formen vom Grade $R = 0$, insofern bei ihnen außerdem noch eine Form ohne ∞-Stellen (dann auch ohne 0-Stellen) möglich ist.

Sollen weniger als $p-\delta$ ∞-Stellen vorhanden sein, so müssen dieselben noch $p-\delta-\varepsilon$ Relationen genügen.

Die Mindestanzahl der ∞-Stellen überhaupt ist bei *allgemein vorgegebenem Multiplicatorsysteme* $\frac{p-\delta}{2}$ oder $\frac{p-\delta+1}{2}$, je nachdem $p-\delta$ gerade oder ungerade ist.

Eine Ausnahme bilden wieder die eigentlich automorphen und verwandten Formen vom Grade $R = 0$, indem bei ihnen die Mindestanzahl abgesehen von $\varepsilon = 0$ nicht $\frac{p}{2}$ bezw. $\frac{p+1}{2}$, sondern $\frac{p}{2}+1$ bezw. $\frac{p+1}{2}+1$ ist.

Für specielle Multiplicatorsysteme sinkt die Mindestanzahl der ∞-Stellen unter die angegebene Grenze hinab; insbesondere kann man das Multiplicatorsystem stets so wählen, daß die Mindestanzahl der ∞-Stellen den kleinstmöglichen Wert $-\delta$ erhält.

Im Allgemeinen vergleiche ich nur die verschiedenen Formen auf einem gegebenen algebraischen Gebilde, dessen Moduln ich als constant ansehe. Es ist jedoch auch nicht uninteressant, die Moduln selbst variiren zu lassen. Dabei werden natürlich immer andere und andere Multiplicatorsysteme specielle Multiplicatorsysteme im Sinne des eben ausgesprochenen Satzes. Dann sind aber — wenn ich mich der Einfachheit halber auf den Fall $n = 0$ beschränke —

die singulären algebraischen Gebilde, auf denen es solche algebraische Functionen gibt, die auf den allgemeinsten Gebilden nicht als solche existiren, einfach dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen das Multiplicatorsystem $\varrho_x = 1$, $\varrho'_x = 1$ ein specielles Multiplicatorsystem ist.

Man vergleiche hierzu die Schlußbemerkung in Abschnitt II.

Eine Quelle weiterer Sätze ist der Begriff der „reciproken automorphen Formen."

Ich nenne zwei automorphe Formen reciprok, wenn ihr Product eine eigentlich automorphe Form (-2)ten

Grades ist, d. h. wenn ihre Grade R, R' und ihre Multiplicatoren ϱ, ϱ' in der Beziehung stehen:

$$R + R' = -2 \qquad \varrho\varrho' = 1.$$

Es finden sich folgende auf reciproke Formen bezügliche Sätze:

Die Mindestanzahl allgemein gelegener ∞-Stellen einer automorphen Form positiven Grades ist um 1 größer, als die Anzahl der linear unabhängigen holotypischen reciproken Formen.

Die Anzahl der linear unabhängigen φ, welche an den $s + \delta$ beweglichen 0-Stellen einer automorphen Form positiven Grades verschwinden, ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen holotypischen reciproken Formen, welche an den s ∞-Stellen verschwinden.

Aus diesem und dem früheren Satze über die Constantenzahl einer automorphen Form positiven Grades folgt die Verallgemeinerung des Riemann-Roch'schen Satzes auf die automorphen Formen:

Eine automorphe Form vom Grade $R \geqq 0$ mit s vorgegebenen ∞-Stellen enthält $s + \delta - p + 1 + \tau$ willkürliche Constanten, wenn τ die Anzahl derjenigen linear unabhängigen holotypischen reciproken Formen ist, welche an den s vorgegebenen ∞-Stellen verschwinden.

Dieser verallgemeinerte Riemann-Roch'sche Satz ist in einer nur unwesentlich verschiedenen Fassung für den speciellen Fall $R = 0$, $R' = 2$, $\lambda_i = 0$ bereits im Februar 1892 von Herrn Hurwitz in diesen Nachrichten mitgeteilt worden. Denn beim Uebergang von Herrn Hurwitz' Riemann'scher Fläche zum ζ-Bereich gehen seine Functionen

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \ldots & A_p & B_p \\ \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \alpha_p & \beta_p \end{pmatrix}$$

in uneigentlich automorphe Formen $F_0(\zeta_1, \zeta_2)$ vom Grade 0 über, seine Differentiale dJ in $F'_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)(\zeta, d\zeta)$, unter $F'_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ die holotypischen zu $F_0(\zeta_1, \zeta_2)$ reciproken Formen verstanden.

Von dieser Note des Herrn Hurwitz, die auch sonst Berührungspunkte mit meinen Entwicklungen darbietet, habe ich jedoch erst nachträglich Kenntnis erhalten, als ich bereits selbst unabhängig auf den Satz in der allgemeineren hier mitgeteilten Gestalt gelangt war.

V. Die Elementarformen.

Genau, wie im Falle $p = 0$, lassen sich „Elementarformen" construiren, und zwar, wie ich ausdrücklich hervorhebe, ohne sich auf die Existenz der Poincaréschen Reihen stützen zu müssen. Der allgemeine Ausdruck derselben ist:

$$\Lambda(\overbrace{\zeta_1, \zeta_2}^{R};\ \overbrace{\xi_1, \xi_2}^{R'}) =$$

$$\frac{1}{\overline{P}(zx)} \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{\frac{s_i}{l_i}} \overline{P}(xe_i)^{\frac{s_i'}{l_i}} \frac{\overline{P}(za_1)\ldots\overline{P}(za_{\delta+1})}{\overline{P}(xa_1)\ldots\overline{P}(xa_{\delta+1})} e^{\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=p} k_\alpha(\overline{W}_\alpha^z - \overline{W}_\alpha^x)},$$

wo die Punkte $a_1, a_2 \ldots a_{\delta+1}$ mit dem Punkte x durch die p-Gleichungen

$$\sum \overline{W}_\alpha^a = c_\alpha + \overline{W}_\alpha^x$$

zusammenhängen, also im Falle $p > 0$ notwendig Functionen von x sein müssen [1]).

Wie bei $p = 0$ dienen die Elementarformen zur Zusammensetzung sowohl der automorphen Formen negativen Grades R von ζ_1, ζ_2, wie der reciproken Formen vom positiven Grade R' von ξ_1, ξ_2 aus ihren ∞-Stellen:

$$1)\quad F_s(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu \Lambda(\zeta_1, \zeta_2;\ \xi_1^{|\nu|}, \xi_2^{|\nu|}) + \sum_{\mu=1}^{\mu=\delta-p+1} B_\mu \Phi_s^{|\mu|}(\zeta_1, \zeta_2).$$

$$2)\quad F_{s'}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=s'} A_\nu \Lambda(\zeta_1^{|\nu|}, \zeta_2^{|\nu|};\ \xi_1, \xi_2).$$

Dabei sind die Coefficienten der Darstellung 1) ganz willkürlich, diejenigen der Darstellung 2) dagegen noch folgenden $\delta - p + 1$ Bedingungen unterworfen:

$$A_1 \Phi_s^{|\mu|}(\zeta_1', \zeta_2') + A_2 \Phi_s^{|\mu|}(\zeta_1'', \zeta_2'') + \cdots + A_{s'} \Phi_s^{|\mu|}(\zeta_1^{|s'|}, \zeta_2^{|s'|}) = 0.$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots \delta - p + 1).$$

Von diesen Gleichungen sind jedoch τ identische Folge der übrigen, wenn es τ linear unabhängige Combinationen der $\Phi_s^{|\mu|}(\zeta_1, \zeta_2)$ gibt, die an den s' Stellen $\zeta', \zeta'', \ldots \zeta^{|s'|}$ verschwinden.

1) Setzt man für die Elementarform eine Darstellung durch eine Poincaré'sche Reihe voraus, wie Math. Ann. 41 S. 72, so sind auch im Falle $p = 0$ die Werte $a_1, \ldots a_{\delta+1}$ notwendig Functionen von x, und zwar immer von äußerst complicirtem Character.

Damit ist dann zugleich der verallgemeinerte Riemann-Roch'sche Satz von neuem, und zwar, anders als im vorigen Abschnitt, unabhängig von dem gewöhnlichen Rieman-Rochschen Satze bewiesen.

Der verallgemeinerte Riemann-Roch'sche Satz geht, wenn es sich um eigentlich automorphe und verwandte Formen vom Grade $R = 2$ bezw. $R' = 0$ handelt, unmittelbar in den gewöhnlichen Riemann-Roch'schen Satz über. Jedoch verliert gerade für diesen Fall der soeben gegebene Beweis seine Gültigkeit.

Denn die obige Definition der Elementarform gilt nur für $R \leqq 2$, $R' \geqq 0$, und versagt im Falle $R = 2$, $R' = 0$ dann, wenn man es mit eigentlich automorphen oder verwandten Formen zu thun hat; dann treten Integrale 2. Gattung von x an die Stelle der Elementarformen.

Trotzdem aber infolgedessen der Beweis dieses Abschnittes für den verallgemeinerten Riemann-Roch'schen Satz denjenigen für den gewöhnlichen Riemann-Roch'schen Satz nicht ohne Weiteres als Specialfall enthält, so kann doch der gewöhnliche R.-R. Satz leicht aus dem verallgemeinerten hergeleitet werden, indem man den Beweis des vorigen Abschnittes, der vom gewöhnlichen zum verallgemeinerten Satze führte, einfach umkehrt.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1892.

(Fortsetzung.)

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft zu Königsberg in Pr.
Schriften. Zweiunddreissigster Jahrg. 1891. Königsberg 1891.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. C. Orthmann. Band XXI. Jahrg. 1889. Heft 3. Berlin 1892.
Acta mathematica. 16 1—3. Stockholm. Berlin. Paris 1892.
Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur:
a. 69. Jahresbericht über das Jahr 1891.
b. Litteratur der Landes- und Volkskunde der Provinz Schlesien. Heft 1. Breslau 1892.
Naturhistorische Gesellschaft zu Nürnberg.
Abhandlungen. Jahresbericht. IX. Band. Nürnberg 1892.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: H. Sauppe, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

22. Februar. № 4. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. Februar.

Liebisch legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Ramsay, Docenten der Mineralogie in Helsingfors, vor: „Ueber isomorphe Schichtung und Stärke der Doppelbrechung im Epidot“.

Sauppe legt eine ihm von Herrn Professor Holtz in Greifswald, Korresp. der Gesellschaft in der physikal. Klasse, zugesendete Mittheilung vor: „Ueber den unmittelbaren Größeneindruck in seiner Beziehung zur Entfernung und zum Contrast«.

Voigt: „Bestimmung der Konstanten der thermischen Dilatation und des thermischen Druckes für einige quasi-isotrope Metalle“.

Klein legt Mittheilungen vor
des Herrn Professor Hurwitz in Zürich, Korresp. in der physikal. Klasse: „Beweis der Transcendenz der Zahl e“;
des Privatdocenten Dr. Burkhardt: „Ueber Functionen von Vectorgrößen, welche selbst wieder Vectorgrößen sind, eine Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik“.

Weber: Zweite Mittheilung: „Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiete der elliptischen Functionen“.

Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiete der elliptischen Functionen.

Zweite Mittheilung

von

H. Weber.

§ 7.

Die Dirichlet'sche Summenformel.

Wir bezeichnen mit

$$(\mathfrak{K})\qquad (a, b, c),\ (a', b', c'),\ (a'', b'', c''),\ \ldots$$

ein vollständiges Repräsentantensystem der Classen primitiver Formen der Discriminante $D = \varDelta Q^2$ und setzen in alle Ausdrücke

$$(1)\qquad a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$

für α, γ alle Systeme ganzer Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben und dem Ausdruck einen zu Q theilerfremden Werth geben, die wir für den Fall einer positiven Discriminante noch der Bedingung unterwerfen

$$(2)\qquad 0 \leqq \gamma < \frac{2aU}{T - bU}\alpha,$$

wenn T, U die kleinste positive Lösung der Pellschen Gleichung

$$(3)\qquad T^2 - DU^2 = 4$$

bedeutet. Wir fragen, wie oft wird eine gewisse Zahl A auf diese Weise aus dem System $(\mathfrak{K})$ entstehen. Vorab ist zu bemerken, daß nur positive Zahlen A in Betracht kommen, die zu Q relativ prim sind, wenn wir für den Fall negativer Discriminanten uns auf positive Formen beschränken, und im Falle positiver Discriminanten die Repräsentanten so wählen, daß die ersten Coëfficienten $a, a', a'', \ldots$ positiv sind.

Denn aus (2) und (3) folgt:

$$4aU^2(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2) = (2a\alpha + b\gamma)^2 U^2 - DU^2\gamma^2$$
$$> (T^2 - DU^2)\gamma^2 = 4\gamma^2.$$

Haben wir eine Darstellung einer Zahl A in der Form (1)

(4) $$a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = A,$$

so bestimme man zwei Zahlen aus der Gleichung

(5) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

und transformiere (a, b, c) durch die Substitution

$$S = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$$

in

$$(A, B, C),$$

dann ist

(6) $$B^2 \equiv D \pmod{4A}.$$

Ersetzt man β, δ durch $\beta+\lambda\alpha$, $\delta+\lambda\gamma$, so geht B in $B+2\lambda A$ über, d. h. wir bekommen keine neue Wurzel von (6) im Sinne des § 4.

Haben wir umgekehrt eine Lösung der Congruenz (6), so leiten wir daraus eine primitive Form

(7) $$(A, B, C)$$

der Discriminante D ab, die einer Form des Systems $(\mathfrak{K})$ aequivalent ist; denn ein gemeinsamer Primtheiler von A, B, C müßte nothwendig in Q aufgehen, und da A relativ prim zu Q ist, so muß (A, B, C) primitiv sein. Die Form (7) ist aequivalent mit einer Form des Systems $(\mathfrak{K})$, etwa mit (a, b, c) und es giebt τ Transformationen von (A, B, C) in (a, b, c), worin

(8) $$\begin{aligned} \tau &= 1, \text{ wenn } D > 0,\\ \tau &= 6, \quad „ \quad D = -3,\\ \tau &= 4, \quad „ \quad D = -4,\\ \tau &= 2, \quad „ \quad D < -4, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, daß bei positiven Discriminanten die beiden Transformationszahlen α, γ der Bedingung (2) unterworfen sind.

Also: Aus jeder Darstellung von A durch eine Form des Systems $(\mathfrak{K})$, leitet man e i n e Lösung von (6) her und: aus e i n e r Lösung von (6) erhält man τ Darstellungen von A durch diese Formen. Die Anzahl dieser Darstellungen ist also das τ-fache der Anzahl der Lösungen von (6) oder nach der Bezeichnung des § 4

$$\tau\psi(D, A).$$

Wir nehmen nun eine Function $F(z)$ an (die übrigens nur für ganzzahlige Werthe des Arguments definiert zu sein braucht), von der wir voraussetzen wollen, daß die unendliche Summe

$$\sum^{x,y} F(ax^2+bxy+cy^2)$$

eine unbedingt convergente sei, wenn x, y über alle (oder einen Theil) der ganzzahligen Werthe erstreckt wird, die bei positiver Discriminante der Bedingung

$$(9) \qquad 0 \leqq y < \frac{2Ua}{T-bU}x$$

genügen.

Wir haben dann nach den oben abgeleiteten Resultaten

$$(10) \qquad \sum^{k}\sum^{\alpha,\gamma} F(a\alpha^2+b\alpha\gamma+c\gamma^2) = \tau\sum^{A}\psi(D, A)F(A),$$

worin sich die erste Summe auf alle primitiven Formenclassen k der Discriminante D erstreckt.

Ersetzen wir $F(z)$ durch $F(n^2 z)$ und nehmen nochmals die Summe über alle positiven ganzen Zahlen n, die zu Q theilerfremd sind, so erhalten wir, wenn wir $n\alpha = x$, $n\gamma = y$ setzen, so daß für x, y nicht mehr die Forderung gilt, daß sie keinen gemeinsamen Theiler haben:

$$(11) \qquad \sum^{k}\sum^{x,y} F(ax^2+bxy+cy^2) = \tau\sum^{A}\sum^{n}\psi(D, A)F(An^2),$$

wo nun die Summationszahlen x, y, außer den Bedingungen (9) nur noch der Bedingung unterworfen sind, daß $ax^2+bxy+cy^2$ relativ prim zu Q sei, und daß sie also auch nicht beide verschwinden.

Die Summe auf der rechten Seite können wir nun durch die Formel (B) § 4 umformen. Setzen wir nämlich $An^2 = m$, so durchläuft für ein feststehendes m die Zahl n^2 alle quadratischen Theiler von m und daher ist nach (B)

$$\sum^{A}\sum^{n}\psi(D, A)F(An^2) = \sum^{m}\sum^{n}\psi\left(D, \frac{m}{n^2}\right)F(m)$$
$$= \sum^{m}\sum^{n}\left(D, \frac{m}{n}\right)F(m).$$

In der letzten Summe durchläuft bei feststehendem m die Zahl n alle Theiler von m und bei feststehendem n die Zahl m alle Vielfachen von n. Ersetzen wir also m durch mn, so können wir für die letzte Summe auch

$$\sum^{m}\sum^{n}(D, m)F(mn)$$

setzen, wo nun m und n von einander unabhängig alle positiven Werthe annehmen, die zu Q relativ prim sind.

Dadurch erhalten wir die gesuchte Formel

$$\text{(C)} \qquad \sum^{k}\sum^{x,y} F(ax^2+bxy+cy^2) = \tau\sum^{m,n}(D,m)F(mn).$$

Dies ist die Formel, die den Dirichlet'schen Untersuchungen über Classenzahlen und über die Genera der quadratischen Formen und manchem anderen zu Grunde liegt. Bei Dirichlet ist sie zunächst für den Fall bewiesen, daß $F(x)$ eine Potenz von z, z^{-s} ist, und aus der Identität beider Ausdrücke wird dann geschlossen, daß sie allgemein gilt, und ähnlich schließt Kronecker[1]).

Eine Verallgemeinerung dieser Formel, die auf anderem Wege schon von Kronecker a. a. O. abgeleitet ist, ergiebt sich, wenn wir

$$F(z) \text{ durch } \chi(\delta, z)F(z)$$

ersetzen, worin $\chi(\delta, z)$ die in § 6 der ersten Mittheilung definierte Function ist. Dann ergiebt sich nach der in § 6 bewiesenen Gleichung 18)

$$\chi(\delta, m)\sum^{e}(D, e) = \sum^{e}(\delta, e)(\delta', e'),$$

worin $ee' = m$ ist aus (C) die Formel

$$\text{(D)} \quad \sum^{k}\chi(\delta, k)\sum^{x,y}F(ax+bxy+cy^2) = \tau\sum^{m,n}(\delta, m)(\delta', n)F(mn).$$

Darin ist δ irgend ein Stammtheiler von D, δ' der complementäre Stammtheiler, m, n und $ax+bxy+cy^2$ sind relativ prim zu Q. Wenn $\chi(\delta, k)$ nicht der Hauptcharakter ist, also δ weder $= 1$ noch $= \Delta$ ist und $F(0)$ einen endlichen Werth hat, so ist hier nicht mehr nöthig, die Werthe $x = 0$, $y = 0$ auszuschließen, da $\sum^{k}\chi(\delta, k) = 0$ ist.

Wir wollen zunächst in der durch die gewählte Bezeichnungsweise ermöglichten Vereinfachung die Dirichlet'schen Resultate ableiten, was theilweise schon von Kronecker geschehen ist.

§ 8.

Classenzahlen.

Wir machen jetzt, indem wir unter $F(z)$ eine Potenz z^{-s}, in in der $s > 1$ verstehen, von den bekannten Formeln Gebrauch, über deren Ableitung wir auf Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie verweisen:

---

1) Dirichlet, Recherches sur div. Applic. etc. Kronecker, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 30. Juli 1885.

$$(1)\quad \operatorname*{Lim}_{s=1}\sum^{x,y}\frac{s-1}{ax^2+bxy+cy^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{-D}}\Pi\left(1-\frac{1}{r}\right),\quad D<0,$$
$$=\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\Pi\left(1-\frac{1}{\gamma}\right),\ D>0,$$

wo die Summation in Bezug auf x, y so zu verstehen ist, wie in § 7, und wo $\Pi\left(1-\frac{1}{r}\right)$ das Product bedeutet, das man erhält, wenn man für r alle in Q aufgehenden Primzahlen setzt. Die Wurzeln $\sqrt{-D}$, $\sqrt{D}$ sind positiv.

Der Grenzwerth ist also endlich und nicht von der individuellen Form, sondern nur von der Discriminante D abhängig.

Die rechte Seite der Gleichung (C) giebt, wenn wir $F(z) = z^{-s}$ setzen

$$(2)\qquad \tau\sum\frac{(D,m)}{m^s}\sum\frac{1}{n^s},$$

worin n relativ prim zu Q sein muß; geben wir diese Forderung aber auf, so ist

$$(3)\qquad \sum\frac{1}{n^s}\ \text{durch}\ \Pi\left(1-\frac{1}{r^s}\right)\sum\frac{1}{n^s}$$

zu ersetzen. Ebenso ist, wenn wir

$$(4)\qquad D=\varDelta Q^2$$

setzen, und für m die Forderung fallen lassen, daß es zu Q relativ prim sein soll

$$(5)\qquad \sum\frac{(D,m)}{m^s}\ \text{durch}\ \Pi\left(1-\frac{(\varDelta,r)}{r^s}\right)\sum\frac{(\varDelta,n)}{n^s}$$

zu ersetzen.

Nun ist

$$(6)\qquad \operatorname*{Lim}_{s=1}\sum_{1,\infty}^{n}\frac{s-1}{n^s}=1,\quad \operatorname*{Lim}_{s=1}\sum_{1,\infty}^{n}\frac{(\varDelta,n)}{n^s}=\sum^{n}\frac{(\varDelta,n)}{n},$$

worin in der letzten Summe die Zahlen n der Größe nach geordnet sein müssen.

Multiplicieren wir also die Formel (C) mit $s-1$ und gehen zur Grenze $s = 1$ über, so ergiebt jedes Glied der nach k genommenen Summe denselben durch (1) bestimmten Grenzwerth und wenn wir also mit h die Anzahl der Glieder dieser Summe, d. h. die Classenzahl für die Discriminante D bezeichnen, so folgt aus (1), (3), (5) und (6)

$$(7)\quad \begin{aligned} D<0, \quad h &= \tau\frac{\sqrt{-D}}{2\pi}\prod\left(1-\frac{(\Delta,r)}{r}\right)\sum^{n}\frac{(\Delta,n)}{n}, \\ D>0, \quad h &\doteq \frac{\sqrt{D}}{\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}}\prod\left(1-\frac{(\Delta,r)}{r}\right)\sum^{n}\frac{(\Delta,n)}{n}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit h_0 die Classenzahl für die Discriminante Δ, so folgt hieraus für negative Discriminanten (da, sobald $Q>1$ ist, $\tau = 2$ ist)

$$(8)\quad \tau_0 h = 2Q\prod\left(1-\frac{(\Delta,r)}{r}\right)h_0,$$

worin $\tau_0 = 6$, wenn $\Delta = -3$, $= 4$, wenn $\Delta = -4$ und $= 2$ in den übrigen Fällen.

Für positive Discriminanten muß man, wenn T_0, U_0 die kleinste positive Lösung von

$$T_0^2 - \Delta U_0^2 = 4$$

ist, den positiven Exponenten λ, möglichst klein, so bestimmen, daß in

$$\left(\frac{T_0+U_0\sqrt{\Delta_0}}{2}\right)^{\lambda} = \frac{T+U\sqrt{D}}{2}$$

der Coëfficient UQ von $\sqrt{\Delta}$ durch Q theilbar wird und erhält

$$\lambda h = Q\prod\left(1-\frac{(\Delta,r)}{r}\right)h_0.$$

Setzen wir D selbst als Stammdiscriminante voraus, und schreiben demnach Δ dafür, so ergiebt sich also

$$(9)\quad \begin{aligned} h &= \tau\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\pi}\sum^{n}\frac{(\Delta,n)}{n}, \quad \Delta<0, \\ h &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\log\frac{T+U\sqrt{\Delta}}{2}}\sum^{n}\frac{(\Delta,n)}{n}, \quad \Delta>0. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Summe

$$(10)\quad \sigma = \sum_{1,\infty}^{n}\frac{(\Delta,n)}{n}$$

können wir auf folgende einfache Weise ausführen. Nach der Formel (A) (§ 3, erste Mittheilung) können wir für $\sqrt{\Delta}\,(\Delta, n)$ die Summe setzen

$$(11 \qquad \sum^{s}(\Delta, s)\, e^{-\frac{2 n s \pi i}{\Delta}},$$

worin s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul Δ durchläuft, oder auch, indem wir s in $-s$ verwandeln und § 2. 6) benutzen

$$(12) \qquad \pm \sum^{s}(\Delta, s)\, e^{\frac{2 n s \pi i}{\Delta}},$$

wo das obere Zeichen bei positivem, das untere bei negativem Δ gilt. Nehmen wir das arithmetische Mittel aus den Werthen (11), (12), so erhalten wir für σ

$$D<0, \quad \sigma = \frac{-1}{\sqrt{-\Delta}} \sum^{s}(\Delta, s) \sum^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{2 n s \pi}{\Delta},$$

$$D>0, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum^{s}(\Delta, s) \sum^{n} \frac{1}{n} \cos \frac{2 n s \pi}{\Delta}.$$

Die Summen der unendlichen Reihen, die hier auf der rechten Seite noch vorkommen, sind aber sehr bekannt und finden sich z. B. schon bei Abel in der Abhandlung über die Binomialreihe. Ihr Werth wird gefunden, wenn man in der bekannten Potenzreihe für $\log(1-z)$ den absoluten Werth von z gegen 1 convergieren läßt, oder auch nach der Fourierschen Reihe. Darnach ist, wenn s positiv und zwischen 0 und $\pm\Delta$ genommen wird:

$$\sum^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{2 n s \pi}{\Delta} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{2s}{\Delta}+1\right),$$

$$\sum^{n} \frac{1}{n} \cos \frac{2 n s \pi}{\Delta} = -\log\left(2 \sin \frac{s \pi}{\Delta}\right)$$

und darnach also, da $\sum^{s}(\Delta, s) = 0$ ist

$$\Delta<0, \quad h = \frac{\tau}{2\Delta} \sum^{s}(\Delta, s)\, s,$$

$$\Delta>0, \quad h \log \frac{T+U\sqrt{\Delta}}{2} = -\sum^{s}(\Delta, s) \log\left(\sin \frac{s\pi}{\Delta}\right).$$

Der Ausdruck für h bei negativer Discriminante läßt sich so vereinfachen

I. Ist $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, so besteht das System s aus den Zahlen

$$\nu, \quad -\Delta-\nu$$

oder $\qquad 0<\nu<-\frac{\Delta}{2},$

$$2\nu \quad -\Delta-2\nu,$$

wenn ν die Reihe der Zahlen zwischen 0 und $-\frac{\varDelta}{2}$ durchläuft. Demnach ist, wenn wir die Fälle $\varDelta = -3$, $\varDelta - 4$ bei Seite lassen, also $\tau = 2$ setzen,

$$h = \frac{2}{\varDelta}\sum^{\nu}(\varDelta, \nu)\nu + \sum^{\nu}(\varDelta, \nu),$$

$$h = \frac{4}{\varDelta}\sum^{\nu}(\varDelta, 2\nu)\nu + \sum^{\nu}(\varDelta, 2\nu),$$

und wenn man die erste dieser Gleichungen mit 2, die zweite mit $(\varDelta, 2)$ multipliciert

$$(11) \qquad \big(2-(\varDelta, 2)\big)\, h = \sum^{\nu}(\varDelta, \nu)$$

II. Ist $\varDelta \equiv 0 \pmod 4$ also, da es Stammdiscriminante sein sollte $\equiv 8, 12 \pmod{16}$ so besteht das System s aus den Zahlen

$$\nu, \quad -\frac{\varDelta}{2}+\nu,$$

und da nun

$$(\varDelta, \; -\frac{\varDelta}{2}+\nu) = -(\varDelta, \nu)$$

ist, wie sich aus § 2, I, II ergiebt, wenn man $\varDelta$ in seine Primdiscriminanten zerlegt, so folgt

$$h = \frac{1}{2}\sum^{\nu}(\varDelta, \nu),$$

oder wenn μ die Zahlen durchläuft, die zwischen 0 und $\frac{-\varDelta}{4}$ liegen, wenn man ν in

$$\mu, \quad -\frac{\varDelta}{2}-\mu$$

zerlegt:

$$(12) \qquad h = \sum^{\mu}(\varDelta, \mu).$$

Für die positiven Discriminanten erhält man, wenn man mit α, β die unter den Zahlen s versteht, für die

$$(\varDelta, \alpha) = +1, \quad (\varDelta, \beta) = -1$$

ist.

$$(13) \qquad \left(\frac{T+U\sqrt{\varDelta}}{2}\right)^{h} = \frac{\prod^{\beta}\sin\frac{\beta\pi}{\varDelta}}{\prod^{\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{\varDelta}}.$$

Wir wollen noch einen anderen Ausdruck für die Classenzahlen ableiten, den wir später brauchen werden. Ich benutze dabei die Gauss'schen Functionen

$$(14)\quad \Pi(u) = \lim_{m=\infty} \frac{1\cdot 2\cdots m}{(u+1)(u+2)\cdots(u+m)} m^u,$$

$$(15)\quad \Psi(u) = \frac{\Pi'(u)}{\Pi(u)} = \lim_{m=\infty}\left(\log m - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2} \cdots - \frac{1}{u+m}\right).$$

Wenn wir in dem Ausdruck (10) für die Summe σ für n setzen

$$\pm m\Delta - s,$$

$$s = 1, 2, \cdot\cdot, \pm\Delta - 1,$$

so erhalten wir (§ 2. 6)

$$\sigma = \lim_{m=\infty} \pm \sum^{s} (\Delta, s) \sum_{1,m}^{\nu} \frac{1}{\pm\nu\Delta - s}.$$

Hier können wir, da $\sum^{s}(\Delta, s) = 0$ ist, unter den Summenzeichen nach s das Glied $-\log m : \pm\Delta$ hinzufügen und erhalten nach (15)

$$(16)\quad \sigma = \frac{-1}{\Delta} \sum^{s} (\Delta, s)\, \Psi\left(\frac{s}{\pm\Delta}\right),$$

wo immer die oberen Zeichen für positives, die unteren für negatives Δ gelten. Darnach bekommen wir folgende Ausdrücke für die Classenzahlen:

$$(17)\quad \Delta < 0, \quad h = \frac{\tau}{2\pi\sqrt{-\Delta}} \sum^{s} (\Delta, s)\, \Psi\left(\frac{s}{\Delta}\right),$$

$$(18)\quad \Delta > 0, \quad h \log \frac{T + U\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta}} \sum^{s} (\Delta, s)\, \Psi\left(-\frac{s}{\Delta}\right).$$

Zerlegen wir die Zahlenreihe s in

$$\nu \text{ und } \pm\Delta - \nu, \quad 0 < \nu < \frac{\pm\Delta}{2}.$$

und machen von den bekannten Formeln Gebrauch

$$(19)\quad \Pi(u)\,\Pi(-1-u) = \frac{\pi}{\sin \pi u},$$

$$(20)\quad \Psi(u) - \Psi(-1-u) = -\pi \operatorname{cotg} \pi u,$$

so kann man auch setzen

$$(21)\quad \Delta < 0, \quad h = \frac{-\tau}{2\sqrt{-\Delta}} \sum^{\nu} (\Delta, \nu) \operatorname{cotg} \frac{\pi\nu}{\Delta},$$

$$(22)\quad \Delta > 0, \ h \log \frac{T + U\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta}} \sum^{\nu} (\Delta, \nu) \left(\Psi\left(-\frac{\nu}{\Delta}\right) + \Psi\left(-1 + \frac{\nu}{\Delta}\right)\right)$$

Setzt man in (21) $\Delta = -m$, und nimmt m ungerade, also $\equiv 3 \pmod 4$ an, so läßt sich, indem man ein vollständiges Restsystem nach dem Modul m aus den Zahlen ν^2 und $-\nu^2$ zusammensetzt, der Formel (21) auch die Gestalt geben

$$h = \frac{\pi}{2\sqrt{m}} \sum^{\nu} \operatorname{cotg} \frac{\pi \nu^2}{m}. \tag{23}$$

§ 9.

Genera der Formen.

Man vereinigt in ein Genus oder Geschlecht alle die Formenclassen k, die in ihren sämmtlichen Charakteren übereinstimmen. Haben alle Charaktere einer Classe k den Werth $+1$, so gehört k dem Hauptgeschlecht an. Das Hauptgeschlecht existiert sicher, denn die Hauptform

$$\left(1,\ 0,\ -\frac{1}{4} D\right)$$

bei geradem und

$$\left(1,\ 1,\ \frac{1-D}{4}\right)$$

bei ungeradem D gehört ihm an.

Durchläuft k_0 die Classen des Hauptgeschlechtes, so durchläuft die zusammengesetzte Classe

$$k = k_0 k_1,$$

wenn k_1 eine feste Classe bedeutet, die sämmtlichen Classen eines durch k_1 charakterisierten Geschlechtes (§ 6. (9)), woraus folgt, daß jedes Geschlecht gleich viel Formenclassen umfaßt. Können wir also die Anzahl der Classen des Hauptgeschlechtes, die wir mit g bezeichnen wollen, bestimmen, so erhalten wir damit zugleich nicht nur die Anzahl der Classen jedes anderen Geschlechtes, sondern auch die Anzahl der Geschlechter, die gleich dem Quotienten $h:g$ ist.

Die Zahl g läßt sich aber leicht nach Dirichlet aus der Formel (D) § 7 bestimmen. Man erhält sie, wenn man $F(z) = z^{-s}$ setzt, mit $s-1$ multipliciert und zur Grenze $s = 1$ übergeht.

Wenn δ weder $= 1$ noch $= \Delta$ ist, so geht die linke Seite der Formel (D) für $s = 1$ in

$$\tau \sum \frac{(\delta, m)}{m} \sum \frac{(\delta', n)}{n}$$

über, also in das Product zweier endlicher Werthe, die sich nach § 8 durch Classenzahlen ausdrücken lassen. Mit $s-1$ multipliciert wird also der Ausdruck $= 0$, und daraus folgt

$$(1) \qquad \sum^{k} \chi(\delta, k) = 0,$$

d. h. wenn δ nicht $= 1$ oder $= \Delta$ ist, so ist für die Hälfte der Formenclassen $\chi(\delta, k) = +1$ und für die andere Hälfte $\chi(\delta, k) = -1$. Ist aber $\delta = 1$ oder $= \Delta$, so ist für jede Classe $\chi(\delta, k) = +1$, also

$$(2) \qquad \sum^{k} \chi(\delta, k) = h.$$

Gehört k_0 dem Hauptgeschlecht an, so ist $\chi(\delta, k_0) = +1$ für jeden Stammtheiler δ von D, folglich, wenn 2^{ν} die Anzahl der Stammtheiler ist

$$(3) \qquad \sum^{\delta} \chi(\delta, k_0) = 2^{\nu}.$$

Worin sich die Summe auf alle Stammtheiler δ von D bezieht.

Gehört aber k nicht dem Hauptgeschlecht an, so giebt es wenigstens ein δ, etwa δ_1, wofür $\chi(\delta_1, k) = -1$ ist.

Dann ist

$$\chi(\delta_1, k) \sum^{\delta} \chi(\delta, k) = -\sum^{\delta} \chi(\delta, k),$$

andererseits aber, da $\delta\delta_1$ zugleich mit δ die sämmtlichen Stammtheiler durchläuft,

$$\chi(\delta_1, k) \sum^{\delta} \chi(\delta, k) = \sum^{\delta} \chi(\delta\delta_1, k) = \sum^{\delta} \chi(\delta, k),$$

woraus folgt

$$(4) \qquad \sum^{\delta} \chi(\delta, k) = 0.$$

Wenn wir nun mit Rücksicht auf (1), (2), (3), (4) die Doppelsumme

$$\sum^{k} \sum^{\delta} \chi(\delta, k)$$

bestimmen, so hat, nach (3), (4) die nach δ genommene Summe nur für die g Classen des Hauptgeschlechtes einen von Null verschiedenen Werth 2^{ν} und der Werth der Doppelsumme ist also

$$g\, 2^{\nu}.$$

Andererseits hat die bei feststehendem δ nach k genommene Summe

nach (1), (2) nur für die beiden Werthe $\delta = 1$, $\delta = \varDelta$ einen von Null verschiedenen Werth k und der Werth der Doppelsumme ist daher auch

$$2h.$$

Die Vergleichung ergiebt

$$h = 2^{\nu-1} g.$$

Die Anzahl der Geschlechter ist also

$$2^{\nu-1}.$$

Der Werth von ν ist in § 6 angegeben.

§ 10.

Anwendung auf Theta-Functionen.

Wir können in der Formel (C) § 7 unter $F(z)$ die Function q^{2z} verstehen, worin q eine beliebige reelle oder imaginäre Größe ist, von der nur vorausgesetzt werden muß, daß ihr absoluter Werth < 1 ist. Dann gehen die einzelnen Glieder der linken Seite der Formel (C) in Theta-Functionen zweier Argumente, sogenannte Rosenhain'sche Theta-Functionen, über, wenigstens in dem Fall, auf den wir uns aber nicht beschränken wollen, daß die Discriminante negativ ist; dagegen wollen wir hier die Beschränkung einführen, daß D eine Stammdiscriminante sei, und wollen demnach $\varDelta$ dafür setzen. Da dann $Q = 1$ ist, so sind in der Formel (C) die Summationsbuchstaben x, y keiner weiteren Beschränkung unterworfen als, für positive Discriminanten, den Bedingungen § 7 (9); und das einzige Werthpaar $x = 0$, $y = 0$ ist auszuschließen; m und n sind nur an die Bedingung gebunden, positiv zu sein. Wir erhalten dann aus (C)

$$(1) \qquad \sum^{k} \sum^{x,y} q^{2(ax^2+bxy+cy^2)} = \tau \sum^{m,n} (\varDelta, m)\, q^{2mn}.$$

Wenn wir für $(\varDelta, m)$ nach der Formel (A) § 3 den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{\varDelta}} \sum^{s} (\varDelta, s)\, e^{\frac{-2m\pi i s}{\varDelta}}$$

einführen, so ergiebt sich

$$(2) \qquad \tau \sum^{m,n} (\varDelta, m)\, q^{2mn} = \frac{\tau}{\sqrt{\varDelta}} \sum^{s} (\varDelta, s) \sum^{m,n} q^{2mn}\, e^{\frac{-2m\pi i s}{\varDelta}},$$

worin s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $\varDelta$ durchläuft. Die Ausführung der Summation nach m ergiebt

$$(3) \qquad \sum^{m,n} q^{2mn} e^{\frac{-2m\pi i s}{\Delta}} = \sum^{n} \frac{q^{2n} e^{\frac{-2\pi i s}{\Delta}}}{1 - q^{2n} e^{\frac{-2\pi i s}{\Delta}}}.$$

Es soll nun eine Function $\zeta(u)$ eingeführt werden durch die Definition

$$(4) \qquad \zeta(u) = \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n} e^{-2\pi i u}),$$

so daß, wenn $\vartheta_{11}(u)$ die ungerade elliptische Theta-Function bedeutet

$$(5) \qquad 2 q^{\frac{1}{4}} \prod (1 - q^{2n}) \sin \pi u \, \zeta(u) \zeta(-u) = \vartheta_{11}(u)$$

ist. Es wird dann

$$(6) \qquad \frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} = 2\pi i \sum_{1,\infty}^{n} \frac{q^{2n} e^{-2\pi i u}}{1 - q^{2n} e^{-2\pi i u}},$$

$$(7) \qquad \frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - \frac{\zeta'(-u)}{\zeta(-u)} = -\pi \operatorname{cotg} \pi u + \frac{\vartheta'_{11}(u)}{\vartheta_{11}(u)}.$$

Dann ergiebt sich aus (1)

$$(8) \qquad \sum^{k} \sum^{x,y} q^{2(ax^2 + bxy + cy^2)} = \frac{\tau}{2\pi i \sqrt{\Delta}} \sum^{s} (\Delta, s) \frac{\zeta'\left(\frac{s}{\Delta}\right)}{\zeta\left(\frac{s}{\Delta}\right)}.$$

Zerlegt man wieder das Zahlensystem s in ν und $\pm \Delta - \nu$, so folgt

$$(9) \qquad \sum^{k} \sum^{x,y} q^{2(ax^2 + bxy + cy^2)} = \frac{\tau}{2\pi i \sqrt{\Delta}} \sum^{\nu} (\Delta, \nu) \left\{ \frac{\zeta'\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)}{\zeta\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)} \pm \frac{\zeta'\left(\frac{-\nu}{\Delta}\right)}{\zeta\left(\frac{-\nu}{\Delta}\right)} \right\}.$$

Für positive Discriminanten läßt sich also diese Summe nicht auf elliptische Theta-Functionen zurückführen. Es bleibt die Function $\zeta(u)$ das einzige Ausdrucksmittel, die zu den elliptischen Theta-Functionen in einer ähnlichen Beziehung steht, wie die Gauss'sche Π-Function zu den trigonometrischen Functionen[1]).

1) Auf diese Function $\zeta(u)$ hat schon mehrfach die Analysis geführt, ohne daß es gelungen wäre, besonders einfache Eigenschaften von ihr zu entdecken. Zuerst findet sie sich bei Betti „La theorica delle funzioni ellitiche". Annali di matematica t. III. 1860. Vgl. auch Heine, Handbuch der Kugelfunctionen I. p. 107.

Ist aber die Discriminante negativ, so wird die rechte Seite von (9) nach (7)

$$\frac{\tau}{2\sqrt{-\Delta}}\sum^{\nu}(\Delta, \nu)\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu}{\Delta} - \frac{\tau}{2\pi\sqrt{-\Delta}}\sum^{\nu}(\Delta, \nu)\frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)},$$

wo die erste Summe nach § 8 (21) den Werth $-h$ hat. Dies $-h$ kann man dadurch aufheben, daß man auf der linken Seite in jedem Glied der h-gliedrigen Summe noch eine Einheit, d. h. das dem Werthpaar $x = 0$, $y = 0$ entsprechende Glied der Summe nach x, y zufügt, und man erhält so,

$$\text{(E)} \qquad \sum^{k}\sum^{xy} q^{2(ax^2+bxy+cy^2)} = \frac{-\tau}{2\pi\sqrt{-\Delta}}\sum^{\nu}(\Delta, \nu)\frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)},$$

wo nun die Summationsbuchstaben x, y keiner Beschränkung unterliegen, während ν die Reihe der ganzen Zahlen zwischen 0 und $-\frac{1}{2}\Delta$ durchläuft.

Die hier auf der linken Seite stehenden Functionen

$$\sum^{xy} q^{2(ax^2+bxy+cy^2)}$$

sind nicht von der individuellen Form (a, b, c), sondern nur von der Classe abhängig, zu der diese Form gehört; bezeichnen wir diese Classe mit k und setzen

$$q = e^{\pi i \omega},$$

so daß ω eine complexe Variable ist, deren imaginärer Theil positiv ist, so können wir also ein Functionzeichen Θ einführen, und setzen

$$\text{(10)} \qquad \sum^{x,y} q^{2(ax^2+bxy+cy^2)} = \Theta(k, \omega),$$

wodurch die Formel (E) die Gestalt erhält

$$\text{(F)} \qquad \sum^{(k)}\Theta(k, \omega) = \frac{-\tau}{2\pi\sqrt{-\Delta}}\sum^{\nu}(\Delta, \nu)\frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)}.$$

Die algebraischen Eigenschaften dieser Function sowie der Quo-

tienten $\vartheta'_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right) : \vartheta_{11}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)$ sollen in einem folgenden Aufsatz untersucht werden.

In derselben Weise läßt sich nun auch die Formel (D) benutzen. Setzen wir auch hier

$$F(s) = q^{2s},$$

und benutzen die Bezeichnung (10), so folgt

$$\sum^{k} \chi(\delta, k)\Theta(k, \omega) = \tau \sum^{m,n} (\delta, m)(\delta', n) q^{2mn};$$

darin ersetzen wir (δ, m), (δ', n) durch ihre Ausdrücke nach der Formel § 3 (A)

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum^{s} (\delta, s) e^{\frac{-2\pi i m s}{\delta}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\delta'}} \sum^{s'} (\delta', s) e^{\frac{-2\pi i n s'}{\delta'}},$$

wodurch sich ergiebt

$$(11) \quad \sum^{k} \chi(\delta, k)\Theta(k, \omega) = \frac{\tau}{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta'}} \sum^{s,s'} (\delta, s)(\delta', s') \sum^{m,n} q^{2mn} e^{-2\pi i \left(\frac{sm}{\delta} + \frac{s'n}{\delta'}\right)}$$

worin s, s' vollständige Restsysteme nach den Moduln δ, δ' durchlaufen.

Es ist darin

$$\sqrt{\delta}\sqrt{\delta'} = \pm\sqrt{\Delta},$$

wo das untere Zeichen nur dann gilt, wenn δ, δ' beide negativ sind.

Ersetzen wir in (11) s, s' durch $-s$, $-s'$, so folgt durch Addition des erhaltenen Resultates zu (11) für negative Discriminanten Δ

$$(12) \quad \sum^{k} \chi(\delta, k)\Theta(k, \omega) = \frac{-\tau}{\sqrt{-\Delta}} \sum^{s,s'} (\delta, s)(\delta', s') \sum^{m,n} q^{2mn} \sin 2\pi \left(\frac{sm}{\delta} + \frac{s'n}{\delta'}\right)$$

und für positive Discriminanten Δ

$$(13) \quad \sum^{k} \chi(\delta, k)\Theta(k, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum^{s,s'} (\delta, s)(\delta', s') \sum^{m,n} q^{2mn} \cos 2\pi \left(\frac{sm}{\delta} + \frac{s'n}{\delta'}\right).$$

Nach einer in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommenden Entwicklung ist [1])

---

1) Diese Art der Entwicklungen von ϑ-Quotienten findet sich zuerst bei Jacobi in der berühmten Abhandlung über die Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt. Man vgl. auch Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie vom 22. Dez. 1881 und Hermite, Annales de l'école normale 1885.

$$4\sum q^{2mn}\sin 2\pi(mu+nv) = -\operatorname{cotg}\pi u - \operatorname{cotg}\pi v + \frac{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(u+v)}{\pi\vartheta_{11}(u)\vartheta_{11}(v)},$$

und daraus folgt für negative Discriminanten

$$\text{(G)}\quad \sum^{k}\chi(k)\Theta(k,\omega) = \frac{-\tau}{4\pi\sqrt{-\Delta}}\sum^{s,s'}(\delta,s)(\delta',s')\frac{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}\left(\frac{s}{\delta}+\frac{s'}{\delta'}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s}{\delta}\right)\vartheta_{11}\left(\frac{s'}{\delta'}\right)}.$$

Die bei positiven Discriminanten auftretende Function

$$\sum^{m,n} q^{2mn}\cos 2\pi(mu+nv)$$

läßt sich nicht auf elliptische Functionen zurückführen. Eine functionentheoretische Untersuchung dieser Functionen von zwei Veränderlichen wäre auch abgesehen von dieser Anwendung nicht ohne Interesse.

Beweis der Transcendenz der Zahl e.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Einer brieflichen Mittheilung von Herrn Hilbert verdanke ich die Kenntniß seines neuen, überaus einfachen Beweises für die Transcendenz der Zahl e.

Ich habe nun bemerkt, daß man bei diesem Beweise die Benutzung der Integrale ganz vermeiden kann, so daß der Beweis sich nur noch auf die ersten Elemente der Differentialrechnung stützt. In den folgenden Zeilen möchte ich mir erlauben, diese Modification des Hilbert'schen Beweises kurz mitzutheilen [1]).

Bezeichnet $f(x)$ eine ganze rationale Function $r$ten Grades von x, und setzt man zur Abkürzung

$$1)\qquad F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x),$$

1) Herr Hilbert hat übrigens, wie ich von ihm neuerdings erfahre, auch schon gelegentlich eines Vortrages Andeutungen gegeben, wie man die Integrale (und zugleich das Differenziren) bei seinem Beweise vermeiden kann, indem man die Integrale durch Grenzwerthe ersetzt.

so ist der Differentialquotient von $e^{-x}F(x)$ gleich $-e^{-x}f(x)$. Zufolge des bekannten Satzes:

$$\varphi(x)-\varphi(0) = x\varphi'(\vartheta x)\ (0 < \vartheta < 1),$$

besteht daher die Gleichung

$$e^{-x}F(x)-F(0) = -xe^{-\vartheta x}f(\vartheta x),$$

oder

$$F(x)-e^{x}F(0) = -xe^{(1-\vartheta)x}f(\vartheta x),\quad (0 < \vartheta < 1). \tag{2}$$

Angenommen nun, die Zahl e genüge der Gleichung

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n = 0, \tag{3}$$

wobei $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die erste C_0, unbeschadet der Allgemeinheit, als von Null verschieden und positiv vorausgesetzt werde.

Ich wende nun die Gleichung (2) auf die Function

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}\, x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p$$

an, wo p eine Primzahl bedeutet, die größer als die größere der beiden Zahlen n und C_0 ist. Setzt man dann der Reihe nach $x = 1, 2, \ldots n$, so ergiebt sich

$$\left\{\begin{array}{l} F(1)-eF(0) = \varepsilon_1, \\ F(2)-e^2F(0) = \varepsilon_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ F(n)-e^nF(0) = \varepsilon_n, \end{array}\right. \tag{4}$$

wo

$$\varepsilon_k = -k \,.\, e^{(1-\vartheta)k}\frac{(\vartheta k)^{p-1}(1-\vartheta k)^p \ldots (n-\vartheta k)^p}{(p-1)!}\ (k = 1, 2, \ldots n)$$

mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt. Man erhält aber nach (1) den Werth von $F(k)$ offenbar, indem man $f(k+h)$ nach Potenzen von h entwickelt, und sodann die Potenzen $h, h^2, h^3, \ldots$ bezüglich durch $1!, 2!, 3!, \ldots$ ersetzt. Daher sind

$$F(1),\ F(2),\ \ldots\ F(n)$$

ganze Zahlen, die durch p theilbar sind, $F(0)$ eine durch p nicht theilbare ganze Zahl.

Aus den Gleichungen 4) folgt nun mit Rücksicht auf 3):

$$C_1F(1) + C_2F(2) + \cdots + C_nF(n) + C_0F(0) = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt, die linke Seite aber stets eine ganze Zahl ist, so muß

$$5) \qquad C_1 F(1) + C_2 F(2) + \cdots + C_n F(n) + C_0 F(0) = 0$$

sein, wenn man die Primzahl p genügend groß wählt. Die Gleichung 5) ist aber unmöglich, da auf der linken Seite eine durch p nicht theilbare ganze Zahl steht. Die Annahme e genüge einer Gleichung der Gestalt 3), führt also auf einen Widerspruch, die Annahme ist also unzulässig; mit anderen Worten: e ist eine transcendente Zahl.

Zürich, den 18. Januar 1893.

Ueber Functionen von Vectorgrößen, welche selbst wieder Vectorgrößen sind; eine Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein.

Herr P. Drude ist durch seine vergleichende Untersuchung der verschiedenen Lichttheorien [1]) auf folgende Frage geführt worden.

Gegeben seien eine beliebige Anzahl von Vectorgrößen, Functionen der Lage eines oder mehrerer Puncte; man soll auf die allgemeinste Weise Functionen derselben und ihrer Differentialquotienten bestimmen, welche selbst wieder Vectorgrößen sind.

Beschränkt man diese Aufgabe auf die Bestimmung „rationaler ganzer Vectorfunctionen", d. h. solcher Vectoren, deren Componenten rationale ganze Functionen der Componenten der gegebenen Vectoren sind, so gestattet sie eine einfache Lösung mit Hilfe gewisser invariantentheoretischer Methoden, welche bis jetzt wol noch nirgends in den Dienst der mathematischen Physik getreten sind; diese Lösung erlaube ich mir der Gesellschaft vorzulegen, indem ich für den Beweis, sowie für Litteraturangaben auf die

1) Dieser Nachrichten Jahrg. 1892, p. 366.

demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende ausführlichere Darstellung verweise.

Zunächst gilt der Satz:

Nimmt man zu den n gegebenen Vectoren:

$$u_1, v_1, w_1; \quad u_2, v_2, w_2; \; \ldots \; u_n, v_n, w_n$$

einen $(n+1)^{\text{ten}}$ Vector u_0, v_0, w_0 hinzu und bildet eine rationale ganze scalare Function dieser $(n+1)$ Vectoren, welche die Componenten des hinzugefügten Vectors nur linear enthält, so sind die Coefficienten der letzteren rationale ganze Vectorfunctionen der gegebenen Vectoren; und alle solche Functionen können auf diesem Wege erhalten werden.

Von diesen Scalarfunctionen aber gilt, daß sie sich rational und ganz durch die Functionen der beiden Typen:

$$1) \qquad S_{ik} = u_i u_k + v_i v_k + w_i w_k$$

und:

$$2) \qquad D_{hik} = \begin{vmatrix} u_h & v_h & w_h \\ u_i & v_i & w_i \\ u_k & v_k & w_k \end{vmatrix}$$

ausdrücken lassen. Zwischen diesen bestehen die Relationen:

$$3) \qquad D_{hik} D_{lmn} = \begin{vmatrix} S_{hl} & S_{hm} & S_{hn} \\ S_{il} & S_{im} & S_{in} \\ S_{kl} & S_{km} & S_{kn} \end{vmatrix}$$

und:

$$4) \qquad D_{hik} S_{lm} - D_{ikl} S_{hm} + D_{klh} S_{im} - D_{lhi} S_{km} = 0;$$

infolge dessen kann der letzte Satz noch wie folgt praecisirt werden:

Jede rationale ganze Scalarfunction von geradem Gesamtgrad läßt sich rational und ganz durch die S_{ik} allein ausdrücken, jede solche Function von ungeradem Gesamtgrade als eine Summe von Produkten, deren jedes außer Factoren S einen Factor D hat. Dabei kann in letzterem Falle in Bezug auf einen bestimmten Vector die Verfügung getroffen werden, daß dieser in den D vorkommen soll.

Treffen wir diese Verfügung in Bezug auf den Hilfsvector (u_0, v_0, w_0), so können wir weiter schließen:

Alle rationalen ganzen Vectorfunctionen gegebener Vectoren lassen sich darstellen als Summen von Gliedern entweder der Form:

$$5) \qquad u_i S, \quad v_i S, \quad w_i S$$

oder der Form:

6) $$(v_i w_k - w_i v_k) S, \quad (w_i u_k - u_i w_k) S, \quad (u_i v_k - v_i u_k) S,$$

je nachdem ihr Gesamtgrad ungerade oder gerade ist; unter S ist dabei ein Produkt von Functionen S_{ik} (in allen drei Componenten dasselbe) verstanden.

Oder anders ausgedrückt:

Die allgemeinste Art, rationale ganze Vectorfunctionen aus gegebenen Vectoren abzuleiten, besteht in Wiederholung und Combination der folgenden drei Operationen:

1. Geometrische Addition zweier Vectoren nach dem Parallelogrammgesetz;

2. Geometrische Multiplication zweier Vectoren (d. i. Auftragen des Flächeninhalts des Parallelogramms, von welchem sie Seiten sind, auf einer zu ihrer Ebene senkrechten Axe);

3. Multiplication eines Vectors mit der aus zweien zu bildenden scalaren Größe S.

Dabei braucht die zweite dieser Operationen nur mit den gegebenen (nicht mit aus ihnen abgeleiteten) Vectoren vorgenommen zu werden, und auch die unter 3) erwähnten Größen S sind nur aus den gegebenen Vectoren zu bilden.

Von diesen Resultaten aus gelangt man zur Bestimmung derjenigen Vectorfunctionen, welche auch die Differentialquotienten gegebener Vectoren nach den Coordinaten enthalten, mit Hilfe des folgenden Satzes:

Ersetzt man in einer Scalarfunction von Vectoren die Componenten eines Vectors durch Differentialsymbole

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

und entwickelt den erhaltenen Ausdruck nach den für das Operiren mit solchen Symbolen geltenden Regeln [1]), so erhält man eine Scalarfunction von Vectoren und ihren Ableitungen, welche diese Ableitungen nur linear enthält; und umgekehrt, jede solche Function kann auf diese Weise erhalten werden.

Functionen, welche Produkte und Potenzen von Differentialquotienten enthalten, werden dann bekanntermaßen dadurch gewonnen, daß man zuerst mehrere Reihen unabhängiger Variabler

---

1) $\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}$, u. s. f.

einführt und nach der Differentiation die entsprechenden Variabeln aller dieser Reihen einander gleichsetzt.

Läßt man diesen allgemeinen Fall bei Seite und beschränkt sich auf den für die Anwendungen wichtigen einfachen Fall, daß nur Differentialquotienten nach den Variabeln einer Reihe und diese nur in erster Potenz vorkommen, so kann man über den Kreis der möglichen Bildungen noch weiteren Aufschluß bekommen durch folgenden Satz:

Alle rationalen ganzen Vectorfunctionen beliebig vieler gegebener Vectoren und ihrer Differentialquotienten nach den Coordinaten, welche die letzteren nur linear enthalten, werden erhalten durch Wiederholung und Combination der folgenden Operationen[1]):

1. Geometrische Addition zweier Vectoren;
2. Geometrische Multiplication zweier Vectoren;
3. Bildung einer der Scalarfunctionen S_{ik} (Gleich. 1) und

$$\sigma_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} \tag{7}$$

und Multiplication eines Vectors mit einer dieser Größen;

4. Bildung der folgenden Größen aus einem Vector:

$$\frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial z} \quad ; \tag{9}$$

$$\Delta u_k \quad , \quad \Delta u_k \quad , \quad \Delta w_k \quad . \tag{10}$$

5. Bildung folgender Größen aus zwei Vectoren:

$$\begin{aligned} &u_i \frac{\partial u_k}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x} + w_i \frac{\partial w_k}{\partial x}, \\ &u_i \frac{\partial u_k}{\partial y} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial y} + w_i \frac{\partial w_k}{\partial y}, \\ &u_i \frac{\partial u_k}{\partial z} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial z} + w_i \frac{\partial w_k}{\partial z}. \end{aligned} \tag{11}$$

---

1) Die für den ersten Satz geltende Beschränkung einzelner der erwähnten Operationen auf die gegebenen Vectoren gilt für diesen Satz nicht.

Alle diese Functionen sind ja in der mathematischen Physik wolbekannt; aber das Wesentliche an dieser Lösung der von Herrn Drude aufgeworfenen Frage ist, daß alle Vectorfunctionen beliebig vieler Vectoren mit linear vorkommenden Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung durch Operationen gewonnen werden können, von welchen jede einzelne höchstens zwei Vectoren in Verbindung setzt und höchstens zweimalige Differentiation verlangt.

Zum Schlusse sei es noch gestattet, auf zwei interessante Verallgemeinerungen der vorgelegten Frage hinzuweisen, deren Lösung wesentlich mit denselben Mitteln gelingen muß. Man kann einmal solche Functionen in Betracht ziehen, welche sich wie die Potenzen und Producte von Vectorcomponenten verhalten; man kann andererseits die Frage, statt für Vectoren, für Schrauben (Dynamen) stellen.

Göttingen, Januar 1893.

Ueber den unmittelbaren Größeneindruck in seiner Beziehung zur Entfernung und zum Contrast.

Von

W. Holtz.

Wir haben beim Anblick eines Gegenstandes sofort einen bestimmten Größeneindruck, der voraussichtlich einer unbewußten Schätzung entspringt und deshalb nicht ausdrückbar ist, da jener kein wirklicher Maaßstab, sondern nur eine Reihe ähnlicher, zum Theil älterer Eindrücke zu Grunde liegt. Ich möchte diesen Eindruck die „empfundene" Größe nennen, da man mit scheinbarer Größe, wie er früher treffend hieß, jetzt allgemein den Sehwinkel oder die Größe des Netzhautbildes zu bezeichnen pflegt. Ganz verschieden hiervon ist die „geschätzte" Größe, wenn man darunter die Größe versteht, die man einem Gegenstande bei bewußter Schätzung zuerkennt; sie ist durch Zahlen ausdrückbar und nähert sich der wirklichen Größe um so mehr, je richtiger die Schätzung ist. Beide Größen sind völlig heterogen; die erste ist eine Maaßempfindung, die zweite ein wirkliches Maaß; sie sind deshalb, wie schon Klügel in seiner Uebersetzung von Pristley's Geschichte der Optik sagt, so wenig vergleichbar, als man

Worte mit den durch sie bezeichneten Sachen vergleichen kann[1]). Gleichwohl werden sie häufiger verwechselt, wie man auch die Frage, wie groß uns ein Körper erscheint, leicht mit der Frage vertauscht, für wie groß wir denselben halten. Auf Grund solcher Verwechselung muß man dann selbstredend zu irrigen Schlüssen gelangen.

Eine „empfundene" Größe ist, wie gesagt, nicht ausdrückbar; ich kann deshalb auch Niemandem begreiflich machen, wie groß mir dieser oder jener Gegenstand erscheint. Ich könnte wohl sagen, die Sonne erscheine mir eben so groß als ein Markstück in 2 m Entfernung gesehn, aber dann bliebe doch wieder zu erklären, wie groß mir ein solches Stück in solcher Entfernung erscheint. Ich kann „empfundene" Größen also nur mit einander vergleichen, aber dabei annährend das Verhältniß ausdrücken, in welchem beide zu einander stehn. Und wenn dies zwei Personen thun unter sonst gleichen Bedingungen, so werden sie annähernd zu gleichem Resultate gelangen. Dies beweist nun, mögen auch Alle nach besonderem Maaße messen und so von demselben Gegenstande ungleiche Eindrücke empfangen, daß doch die Methode dieser unbewußten Schätzung bei Allen der Hauptsache nach die gleiche ist.

Wie wir Größen bewußt schätzen, ist allgemein bekannt. Wir ziehn den Sehwinkel und zugleich die Entfernung in Betracht und halten bei gleichem Sehwinkel einen Körper für um so größer, je größer uns die Entfernung dünkt, wobei eine bessere Ueberlegung oder Belehrung sofort unser Urtheil über die Größe modificirt. Bei unbewußter Schätzung verfahren wir anders. Die „empfundene" Größe hängt zwar auch vom Sehwinkel und der Entfernung ab, aber nach besondern Regeln, die wir mechanisch befolgen, so daß Ueberlegung oder Belehrung an dem fraglichen Eindrucke Nichts ändern kann. Außerdem wirkt neben Sehwinkel und Entfernung noch in gewisser Weise der Contrast oder der Hintergrund mit.

Manche Einzelheit ist hierüber schon bekannt. Eine vertikale erscheint größer, als eine horizontale Dimension; eine Linie, eine Fläche, ein Raum größer, wenn sie eingetheilt sind oder mehr Einzelheiten enthalten[2]). Ein Gegenstand erscheint größer für sich, als wenn wir ihn neben einem größeren sehn, desgleichen

---

1) Priestley, Geschichte der Optik, übersetzt v. Klügel, S. 493, Anmerk.

2) Oppel, geometrisch-optische Täuschungen, Jahrb. d. physik. Vereins zu Frankf. a. M. 1854—55 S. 37; 1856—57 S. 47; 1860—61 S. 26.

größer, wenn wir ihn in einem enger begrenzten Raume erblicken. Bekannt war auch längst, daß ein Körper in Augenhöhe uns größer dünkt, als wenn wir nach oben blicken müssen, ist aber neuerdings durch vergleichende Versuche nach gewisser Richtung noch klarer gestellt[1]). Am wichtigsten ist die Beziehung zur Entfernung. Hier ist bekannt, daß wir diese ganz ignoriren, wenn Körper genau hinter einander stehn; der Sehwinkel entscheidet dann ausschließlich, und sie erscheinen somit gleich groß, wenn sie gleichen Sehwinkel haben. Wie sonst aber bei gleichem Sehwinkel die Entfernung wirkt, oder wie sich ein Gegenstand scheinbar verkleinert, wenn die Entfernung wächst, darüber liegt nichts Genaueres vor, abgesehn von Angaben, welche dafür sprechen, daß man „empfundene" Größen mit „geschätzten" verwechselt hat.

Ich hielt es daher für geboten, diese Beziehung durch eine besondere Reihe von Beobachtungen zu prüfen. Bevor ich das Ergebniß mittheile, möchte ich in kurzen Worten die Methode skizziren.

Ich verfuhr der Hauptsache nach folgendermaaßen. Ich stellte in verschiedenen Abständen vom Auge zwei runde Cartonscheiben auf und variirte die Größe der ferner gestellten so lange, bis beide gleich groß erschienen. Ich verfuhr so, weil es sehr schwer ist, im Falle der Ungleichheit das richtige Verhältniß zu finden, während sich die Gleichheit eher constatiren läßt, aus dieser aber das Verhältniß der Ungleichheit herzuleiten ist. Das Letztere nämlich nach dem Grundsatze, daß ein Gegenstand unter sonst gleichen Bedingungen so viel größer erscheinen muß, als er größer ist. So ergab sich z. B. Gleichheit des Eindrucks, als eine 4 cm große Scheibe in 1 und eine 6 cm große in 2 m Entfernung stand. In letzterer aber muß eine 8 cm große $\frac{8}{6}$ mal so groß erscheinen als eine 6 cm große. Ich schloß demnach: Eine Scheibe doppelter Größe erscheint in doppelter Entfernung (also bei demselben Sehwinkel) $\frac{8}{6}$ mal so groß. Nach demselben Grundsatze konnte ich aber auch schließen: Ein und dieselbe Scheibe erscheint in doppelter Entfernung $\frac{4}{6}$ mal so groß. So ergab sich ferner Gleichheit des Eindrucks, als eine 8 cm große Scheibe in 1 und eine 12 cm große in 4 m Entfernung stand. In letzterer aber muß eine 32 cm große $\frac{32}{12}$ mal so groß erscheinen als eine 12 cm große. So schloß ich dann: Eine Scheibe vierfacher Größe erscheint in vierfacher Entfernung (also bei gleichem Sehwinkel)

---

1) Stroobant, über die scheinbare Vergrößerung d. Gestirne, Bull. de l'Acad. de Belg. III, 8 p. 719 und 10, p. 815.

$\frac{38}{12}$ mal so groß. Ebenso konnte ich schließen: Ein und dieselbe Scheibe erscheint in vierfacher Entfernung $\frac{8}{12}$ mal so groß. Hiergegen ließ sich vielleicht einreden, daß der obige Grundsatz wohl für eine einzelne Scheibe richtig sei, nicht jedoch, wegen des Contrastes, wenn wir neben dieser noch eine zweite sehn. War dies so, dann mußte der gleiche Eindruck zweier Scheiben durch nachträgliche Aufstellung einer dritten gleichfalls geändert werden. Versuche bestätigten dies, aber die Aenderung war so unbedeutend, daß ich meine Schlußweise deshalb nicht zu beanstanden brauchte.

Nun ergab sich jedoch bald, daß die Gleichheit des Eindrucks neben der relativen Entfernung noch von verschiedenen Factoren abhängig war, nämlich von der absoluten Entfernung, dem monocularen oder binocularen Sehen und dem seitlichen Abstande der Scheiben. Hiernach mußte ich meine Beobachtungen vervielfältigen und jenen Factoren gemäß in besondere Gruppen theilen, indem ich neben der relativen Entfernung zunächst die absolute, dann die Sehweise, dann den seitlichen Abstand variirte. Natürlich mußte ich gleiche Beobachtungen auch wiederholt anstellen, um richtigere Zahlen zu gewinnen, zumal bei großer relativer Entfernung, wo die Gleichheit des Eindrucks nur schwer zu constatiren ist. Den seitlichen Abstand betreffend habe ich mich auf zwei Lagen beschränkt, welche ich kurz durch „seitlich nah“ und „seitlich fern“ bezeichnen will. In der ersten sah ich beide Scheiben gleichhoch und soweit von einander, als der scheinbare Durchmesser der einen betragen mochte, in der zweiten 13—15° von einander und die nähere tiefer um 40—45°. Es ergab sich nämlich, daß die nähere seitlich ferner gestellt mehr und mehr, aber von 15° an nur noch wenig kleiner erschien, während die gleichzeitige Verkleinerung durch Senkung bei 45° etwa ihr Maximum erreichte. Von den zahlreichen Scheiben, die ich von 1—60 Cent. Größe besaß, wurden die kleineren möglichst für kleine, die größeren möglichst für große Entfernungen angewandt, doch mußten selbstredend bei sehr großen relativen Entfernungen die kleinsten zugleich neben der größten fungiren. Im Uebrigen benutzte ich Stative von solcher Höhe, daß die fernere Scheibe stets in Augenhöhe lag, und suchte sie, soweit es die Verhältnisse erlaubten, so zu stellen, daß der Hintergrund möglichst derselbe blieb. Das Resultat der Beobachtungen führe ich nun zunächst in folgender Tabelle vor.

Eine Scheibe m facher Größe in m facher Entfernung erscheint x mal so groß, als die einfache in der einfachen Entfernung.

Die Tabellenzahlen bedeuten x.

Entfern. beider Scheiben vom Auge in meter	monocular gesehn		binocular gesehn	
	seitlich fern	seitlich nah	seitlich fern	seitlich nah
	$m = 2$			
$\frac{1}{4}$ u. $\frac{1}{2}$	1,54	1,20	1,82	1,56
$\frac{1}{2}$ u. 1	1,46	1,17	1,67	1,47
1 u. 2	1,38	1,14	1,55	1,40
2 u. 4	1,31	1,12	1,46	1,31
4 u. 8	1,24	1,10	1,37	1,26
8 u. 16	1,18	1,07	1,30	1,20
16 u. 32	1,12	1,05	1,23	1,14
32 u. 64	1,08	1,03	1,16	1,10
	$m = 3$			
$\frac{1}{2}$ u. $\frac{3}{2}$	2,00	1,50	2,50	2,10
1 u. 3	1,60	1,30	2,20	1,60
8 u. 24	1,40	1,20	1,60	1,70
	$m = 4$			
$\frac{1}{2}$ u. 2	2,40	1,60	3,00	2,40
1 u. 4	1,80	1,40	2,60	1,80
8 u. 32	1,70	1,10	1,80	1,70
	$m = 6$			
$\frac{1}{2}$ u. 3	2,70		3,50	
1 u. 6	2,40		3,00	
	$m = 8$			
$\frac{1}{2}$ u. 4	3,30		4,70	
1 u. 8	2,90		3,50	
	$m = 10$			
$\frac{1}{2}$ u. 5	5,00		5,30	
1 u. 10	4,00		4,60	
	$m = 100$			
$\frac{1}{2}$ u. 50			9,00	
	$m = 1000$			
$\frac{1}{2}$ u. 500			14,00	

Die Zahlen dieser Tabelle, mögen die letzten Reihen, welche großer relativer Entfernung entsprechen, auch weniger zuverlässig sein, verrathen doch durchgehends eine gewisse Gesetzmäßigkeit, welche sich etwa in folgende Worte kleiden läßt.

Zwei ungleich entfernte Gegenstände erscheinen bei gleichem Sehwinkel am ehesten gleich groß bei monocularem Sehn, sonst um so eher, je kleiner die relative und je größer die absolute Entfernung ist, desgleichen um so eher, je mehr man sie seitlich neben einander und in derselben Horizontalen sieht. Ich könnte noch hinzufügen: oder in derselben Vertikalen, wenn ich einige Beobachtungen, deren Ergebnisse in der Tabelle fehlen, noch mit berücksichtigen wollte, obwohl die horizontale Gleichstellung stärker als die vertikale in gedachtem Sinne wirkt. Alles was hier-

nach aber die Gleichheit des Eindrucks begünstigt, sind Verhältnisse, welche die Beurtheilung der Entfernung erschweren, so daß man auch kürzer sagen könnte: Sie erscheinen um so eher gleich groß, je schwieriger die Beurtheilung der Entfernung ist.

Hieraus schließe ich, daß überhaupt bei der unbewußten Schätzung der Hauptsache nach der Sehwinkel entscheidet, den wir in der Größe des Netzhautbildes empfinden, und daß die Entfernung diese Empfindung nur nebensächlich modificirt und um so weniger, je schwerer sie zu beurtheilen ist. Langjährige Erfahrung lehrte uns, solche Beurtheilung zu mißtrauen, weil wir uns oft genug überzeugen konnten, daß wir hierbei großen Täuschungen unterworfen waren, und so gewöhnten wir uns, die Entfernung überhaupt weniger zu berücksichtigen zumal unter Verhältnissen, wo wir am häufigsten eine Täuschung erfahren hatten. Seitdem befolgen wir diese Gewohnheitsregel mechanisch, d. h. wir befolgen sie auch, wo sie garnicht berechtigt ist, ich meine in Fällen, wo wir die Entfernung ganz gut beurtheilen können, und selbst, wo wir sie gemessen haben. Ganz anders bei bewußter Größenschätzung, wo wir Sehwinkel und Entfernung als gleichwerthig anerkennen und unser Urtheil genauer den Verhältnissen anpassen und nach besserer Belehrung modificiren.

Man könnte noch einwenden, daß es sich bei allen Größenschätzungen weit eher um die scheinbare als um die wirkliche Entfernung handelt, und daß somit die Zahlen der Tabelle, weil aus der wirklichen abgeleitet, keine große Bedeutung haben können. Ich bemerke hiergegen, daß innerhalb kleiner Entfernungen die scheinbare sehr nahe mit der wirklichen stimmt, und daß alle Zahlen der Tabelle dieselbe Gesetzmäßigkeit verrathen, so daß der fragliche Unterschied nicht sehr in die Wage fallen kann. Gleichwohl wollte ich durch einige Beobachtungen feststellen, welches Resultat sich bei großen scheinbaren Entfernungen ergeben möchte. Ich verfuhr hierbei so, daß ich von einem erhöhten Standpunkte aus, welcher einen freien Blick bis zum Horizonte gewährte, mit Hülfe eines Romershausen'schen Distanzmessers Gegenstände aussuchte, die unter gleichem Sehwinkel erschienen, und zwar paarweise immer so, daß der eine in großer, der andere in $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{8}$ dieser Entfernung zu liegen schien, wonach ich schätzungsweise bestimmte, wie viel größer ich den ferneren sah. Es ergaben sich bei doppelter, dreifacher und achtfacher scheinbarer Entfernung der Reihe nach die Zahlen 1,2; 1,3 und 1,7. Diese Zahlen sind freilich mit den früheren wenig vergleichbar wegen der sehr großen absoluten Entfernung, welche hier zur

Geltung kam, und mehr noch wegen des erhöhten Standpunktes, welcher die Beurtheilung der Entfernung erleichtert und somit die „empfundene“ Größe modificirt. Aber das zeigen sie doch eben so gut, als die früheren, daß diese bei gleichem Sehwinkel auch nicht näherungsweise der Entfernung proportional wächst.

Daß diese Meinung gleichwohl hie und da Vertreter findet, möchte ich an einem Versuche erläutern, welcher zwar schon aus älterer Zeit datirt, aber doch noch heutigen Tages in Lehrbüchern erwähnt wird, obwohl er das garnicht beweist, was er beweisen soll. Desagutiers stellte zwei gleich große Kerzen auf, die eine 2 die andere 4 m von seinen Zuhörern entfernt. Hierauf entführte er, während diese ihre Augen schließen mußten, die fernere und stellte neben die nähere eine andre, die nur halb so groß war[1]). Er meinte nun, daß seine Zuhörer noch denselben Anblick hätten, weil ihnen die kleinere, da sie dieselbe in der doppelten Entfernung wähnten, doppelt so groß erscheinen müsse. Nach unserer Tabelle aber erscheinen Körper bei gleichem Sehwinkel in 4 m Abstand höchstens 1,4 mal so groß, als sie in 2 m Abstand erscheinen, wenn wir dem ferneren auch bei bewußter Schätzung die doppelte Größe zuerkennen mögen.

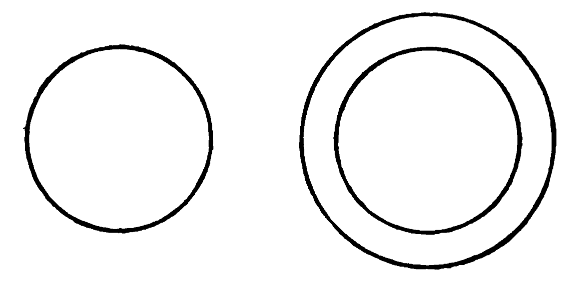
Wie die Zahlen der Tabelle auch die scheinbare Verkleinerung eines Gegenstandes geben, wenn die Entfernung wächst, ist früher schon angedeutet worden. Wir brauchen nur die betreffende Tabellenzahl durch die ihr zugehörige relative Entfernung zu dividiren. So erscheint, wenn wir die dritte Columne berücksichtigen, ein Gegenstand von 1 auf 2 m Abstand gebracht $\frac{1,55}{2} = 0,77$ mal so groß, von 1 auf 3 m aber $\frac{2,20}{3} = 0,73$, von 1 auf 4 m endlich $\frac{2,60}{4} = 0,65$ mal so groß. Da die Zahlen der Tabelle nur näherungsweise gelten, so können natürlich auch diese Zahlen nur näherungsweise richtig sein.

Bei Alledem drängt sich wohl die Frage auf, wie ein Maler zu verfahren habe, wenn er recht natürlich malen will. Man möchte meinen, daß er nur den Sehwinkel zu berücksichtigen habe, weil die entfernteren Gegenstände seines Bildes dann von selber entsprechend größer erscheinen würden. Universell wird er auch nicht anders verfahren können, aber im Einzelnen wird er entferntere Gegenstände doch vielleicht etwas größer malen, weil die Entfernung auf Bildern, wie diejenige in der Natur bei monocularem Sehen, weniger vergrößernd wirkt.

1) Philos. Transact. V. XXXIX, p. 390 u. 392.

Ich möchte nun dieser Erörterung über den Einfluß der Entfernung noch einige Bemerkungen über den Einfluß des Contrastes folgen lassen, Erscheinungen betreffend, welche sich zwar nach bekannten Grundsätzen erklären, aber meines Wissens bisher noch nicht zur Sprache gekommen sind.

Sehen wir einen Kreis an für sich, so erscheint er uns erheblich kleiner, als wenn wir denselben Kreis im Innern eines größeren sehn. Die hier stehenden Figuren bezeugen dies. Ebenso



erscheint uns eine Cartonscheibe kleiner auf der Tischfläche, als wenn wir sie auf ein Papierstück legen. Am kleinsten aber erscheint uns eine Cartonscheibe, wenn sie an einem dünnen Stiele frei in der Luft gehalten wird. Dies erklärt sich nun nach der allgemeinen Regel, daß wir einen Gegenstand dann kleiner sehn, wenn er einen größern Hintergrund hat. Für den Kreis im Innern eines größern Kreises nehmen wir die Fläche des letztern als Hintergrund an, während für den Kreis, welchen wir allein sehn, das ganze Papierstück als Hintergrund gilt. Für die frei in der Luft gehaltene Cartonscheibe ist der Hintergrund am größten, es ist der Zimmerboden oder die Zimmerwand.

So erklärt sich nun auch eine andre Thatsache, die zwar allgemein bekannt ist, die aber, soviel ich weiß, noch keine Erklärung gefunden hat, daß nämlich eine Kugel oder ein Cylinder viel kleiner als die auf ein Papierstück gebrachten Umrisse erscheinen. In der That nimmt scheinbar schon ihre Größe zu, sobald wir ein Papierstück hinter sie bringen; halbirt aber und so auf Papier gelegt, erscheinen sie eben so groß als ihre Umrisse auf einem gleichen Stück. Nur deshalb also, weil sie gewöhnlich einen großen Hintergrund haben, erscheinen sie kleiner als die entsprechenden Durchschnittsfiguren. Ganz ähnlich verhält es sich mit Folgendem. Beschreibt man gleiche Kreise längs der Halbirungslinie eines Winkels, so erscheinen sie successive kleiner, je ferner sie dem Scheitelpunkte liegen. Stellt man Körper in der Halbirungslinie einer Zimmerecke auf, so erscheinen sie

auch kleiner, je ferner sie der Ecke stehn. Ebenso erscheint ein Tisch in der Mitte des Zimmers viel kleiner als in der Nähe der Wand.

Wieweit sich scheinbare Entfernung und Contrast an der scheinbaren Größenänderung von Sonne und Mond betheiligen, darüber möchte ich meine Meinung an einer andern Stelle sagen.

Ueber die isomorphe Schichtung und die Stärke der Doppelbrechung im Epidot.

Von

Wilhelm Ramsay aus Helsingfors.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.)

Als ich im mineralogischen Institut der hiesigen Universität Epidote verschiedener Fundorte für eine neue Untersuchung der Absorptionsverhältnisse dieses Minerals auf ihre Homogeneität prüfte, wurde meine Aufmerksamkeit auf den isomorphen Schichtenbau und die damit zusammenhängenden Aenderungen in der Stärke der Doppelbrechung gelenkt. Ueber diese Erscheinungen finden sich schon einige vereinzelte Angaben. So hat C. Klein[1]) auf die Inhomogeneitäten der Sulzbacher Epidote hingewiesen. Der chemische Unterschied zwischen der hellfarbigen Hülle und dem dunklen Kern des Zöptauer Vorkommens ist von M. Bauer[2]) untersucht worden. A. Michel-Lévy[3]) und A. Lacroix[4]) fanden sehr schwankende Werthe für $\gamma-\alpha$ in aufgewachsenen und in gesteinsbildenden Epidoten.

Die von mir auf ihre Structur geprüften Krystalle stammen

---

1) C. Klein: Mineralogische Mittheilungen IV. 12. Die optischen Eigenschaften des Sulzbacher Epidots. N. Jahrb. f. Min. 1874. 1.

2) M. Bauer: Beiträge zur Mineralogie. I. Reihe. 3. Parallelverwachsung verschiedener Epidotvarietäten. N. Jahrb. f. Min. 1880. II. 78.

3) A. Michel-Lévy: Note sur la biréfringence de quelques minéraux; applications à l'étude des roches en plaques minces. Bull. soc. min. de France VII. 43. 1883.

4) A. Lacroix: Étude pétrographique des éclogistes de la Loire inférieure. Bull. soc. des sc. nat. de l'Ouest de la France I. 81. 1891.

von folgenden Fundorten: Sulzbachthal in Salzburg; Zöptau in Mähren; Arendal in Norwegen; Haddam in Connecticut; Traversella, Brosso und Ala in Piemont. Außer einfachen Krystallen lagen Zwillinge nach (100) vor. Ihre optische Orientirung entspricht den Angaben von C. *Klein* für die Sulzbacher Epidote; $\mathfrak{b} = \bar{b}$, $\mathfrak{a}$ weicht ca. 3° von $\acute{c}$ im spitzen Winkel ($\grave{a} : \acute{c}$) ab. In allen gefärbten Varietäten wurde die Absorption: $\mathfrak{b} > \mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ gefunden.

Bekanntlich lassen einige Epidote (Arendal, Zöptau) schon makroskopisch einen zonaren Bau wahrnehmen. Die große Verbreitung dieser Structur tritt jedoch erst bei der Prüfung auf Pleochroismus in genügend dicken Epidotschnitten nach (010) und besonders deutlich im Na-Lichte zwischen gekreuzten Nicols an beliebig dicken Schnitten von dieser Richtung hervor; bei diesem Verfahren offenbaren sich die *Schwankungen in der Stärke der Doppelbrechung* und alle Einzelheiten des inneren Baues, welche im weißen Lichte nicht sichtbar werden. Man sieht in Schnitten nach (010) in der Regel einen *großen Kern* mit einer *aus isomorphen Schichten zusammengesetzten* Hülle. Im Allgemeinen ist der centrale Theil mit krystallographisch bestimmten Umrissen gegen die umgebenden Schichten abgegrenzt. Doch kommen auch unregelmäßig begrenzte Kerne vor; diese Ausbildung deutet auf partielle Zerstörung oder Auflösung hin. Der Kern zeigt oft eine *Theilung in Felder*, welche sich durch die Stärke ihrer Doppelbrechung von einander unterscheiden. Ihre Grenzen folgen in manchen Fällen bestimmten krystallographischen Richtungen und scheinen dann von Begrenzungsflächen in einem frühen Stadium des Wachsthums herzurühren. In anderen Krystallen sind die Feldergrenzen nur annähernd gerade und parallel mit Krystallflächen. Die Hülle wird *in den Ecken* meist von *radialverlaufenden Grenzen* durchzogen. Die dadurch hervorgerufene Theilung erinnert an die bekannten Sectoren in anderen isomorph geschichteten und optisch anomalen Mineralien, insbesondere an die von der äußeren Form abhängige Theilung des Granat. Zuweilen (Zöptau) bilden die Schichten der Hülle zusammenhängende Rinden ohne Unterbrechungen in den Ecken des Schnittes. Die Auslöschungsschiefen der Kernfelder und Hüllenschichten zeigen unter einander nur geringe Abweichungen, die kaum einen Grad übersteigen.

Die Messungen der Stärke der Doppelbrechung wurden mit einem *Babinet*'schen Compensator im Na-Lichte ausgeführt. Da dieser Compensator nur Gangunterschiede bis zu fünf Wellenlängen direct zu ermitteln gestattete, so mußten die Epidotschnitte mit

Gypsplatten in der Subtractionsstellung combinirt werden. Die Dicke l der Präparate wurde mit einem Sphärometer gemessen. In den meisten Fällen erwiesen sich die Platten schwach keilförmig. Dann wurde die Dicke an allen Stellen bestimmt, an denen die Doppelbrechung gemessen werden sollte.

In den folgenden Tabellen ist der Gangunterschied $\mathfrak{G}$ in Wellenlängen λ des Na-Lichtes angegeben. Die Differenz der Hauptbrechungsindices γ und α ergiebt sich aus:

$$\gamma - \alpha = \frac{\mathfrak{G}\lambda}{l}.$$

1. Sulzbachthal.

	Dicke in mm	Gangunterschied für Na	$\gamma-\alpha$
Kernfelder	0,176	14,7	0,049
Kernfelder	0,175	14,4	0,048
Kernfelder	0,172	14,1	0,048
Hülle bei 101	0,182	15,4	0,049
„ „ $00\bar{1}$	0,167	14,2	0,050
„ „ $\bar{1}00$	0,173	15,0	0,051
„ „ $\bar{1}01$	0,174	15,2	0,052
„ „ $10\bar{2}$	0,167	14,5	0,051
„ „ $\bar{1}03$	0,179	15,7	0,052

Mittel: $\gamma-\alpha = 0{,}050$.

Die Doppelbrechung ist durchschnittlich in der Hülle stärker als im Kern. Ihr Mittelwerth ist höher als die aus C. Klein's Messungen der Brechungsindices γ und α für rothes Licht berechnete Zahl 0,039 und als der von A. Michel-Lévy gefundene Werth 0,047. Zur Controle bestimmte ich die Stärke der Doppelbrechung in einer aus demselben Krystall geschnittenen, 0,702 mm dicken Platte nach (010); der mit dicken Quarzkeilen ermittelte Gangunterschied betrug 59,5; daraus folgt:

$$\gamma-\alpha = 0{,}050.$$

2. Zöptau.

	Dicke in mm	Gangunterschied für Na	$\gamma-\alpha$
Kern	0,198	14,9	0,044
	0,197	14,3	0,043
Hülle bei 100 innere Schicht	0,198	15,5	0,046
„ „ „ äußere „	0,199	13,0	0,038
„ „ $\bar{1}00$ innere „	0,197	14,0	0,041
„ „ „ äußere „	0,197	14,9	0,045
„ „ 001 innere „	0,197	14,6	0,044
„ „ „ äußere „	0,197	11,4	0,035
„ „ $00\bar{1}$	0,198	15,3	0,046
An der Ecke 001:100			
innere Schicht	0,198	14,4	0,043
mittlere „	0,198	14,7	0,044
äußere „	0,199	15,3	0,045

Mittel: $\gamma-\alpha = 0{,}043$.

Die kleinsten Werthe für $\gamma-\alpha$ ergaben einige Schichten in der Hülle.

3. Arendal.

	Dicke in mm	Gangunterschied für Na	$\gamma-\alpha$
Centrum des Kernes	0,153	13,0	0,050
Rand „ „	0,149	12,6	0,050
Hülle bei 001	0,153	12,9	0,050
„ „ 100	0,147	13,5	0,054

Mittel: $\gamma-\alpha = 0{,}051$.

4. Haddam (Zwilling).

	Dicke in mm	Gangunterschied für Na	$\gamma-\alpha$
Kern des Individuums I	0,171	9,8	0,032
	0,162	9,3	0,034
„ „ Individuums II	0,171	9,8	0,034
Hülle bei 102 I: innere Schicht	0,184	11,4	0,036
„ „ „ „ mittlere Schicht	0,184	11,2	0,036
„ „ „ „ äußere Schicht	0,190	11,6	0,036
„ bei 001 I: innere Schicht	0,171	10,7	0,037
„ „ „ „ äußere Schicht	0,171	11,2	0,039
„ bei 101 II	0,150	9,0	0,035
„ bei 100 II	0,150	9,0	0,035
Zwillingsgrenze	0,160	9,0	0,035

Mittel: $\gamma-\alpha = 0{,}051$.

Hier ist die Hülle stärker doppelbrechend als der Kern.

5. Traversella.

	Dicke in mm	Gangunterschied für Na	$\gamma-\alpha$
Kern	0,203	20,9	0,061
	0,203	20,6	0,060
Hülle bei 001	0,201	19,3	0,057
„ „ $00\bar{1}$	0,205	19,5	0,056
„ „ 100	0,215	21,2	0,059
„ „ $\bar{1}00$	0,201	19,2	0,056
„ „ $\bar{1}01$	0,199	19,3	0,057
„ „ $10\bar{2}$	0,197	18,6	0,056

Mittel: $\gamma-\alpha = 0{,}057$.

6. [illegible]

	Dicke in mm	Gangunterschied für Na	$\gamma-\alpha$
	1,145	7,7	0,018
Verschiedene Stellen im Kern	„	7,1	0,017
	„	7,7	0,018
	„	8,0	0,019
Hülle bei 001	„	8,0	0,019
„ „ 100	„	8,3	0,021
„ „ „	„	9,6	0,023
„ „ $\bar{1}00$	„	8,6	0,022

Mittel: $\gamma-\alpha = 0,020$.

7. Ala.

Dicke der Platte: 0,252 mm. Gangunterschied für Na-Licht: 5,83.

$\gamma-\alpha = 0,014$.

Aus den angeführten Beobachtungen geht hervor, daß ein zonarer Aufbau aus einem Kern und isomorphen Schichten eine häufige Erscheinung im Epidot ist. Die Inhomogeneitäten in diesem Mineral lassen sich in der Regel durch Unterbrechungen im Wachsthume der Krystalle und durch Aenderungen der chemischen Zusammensetzung der später angelagerten Schichten erklären. Gewisse Unregelmäßigkeiten können auf partielle Wiederauflösung oder auf mechanische Störungen während des Wachsens zurückgeführt werden.

Die erheblichen Schwankungen der Werthe von $\gamma-\alpha$ in demselben Schnitte und noch mehr in Epidoten verschiedener Fundorte sind ohne Zweifel in erster Linie durch die Aenderungen der chemischen Zusammensetzung bedingt. Zur Erforschung dieser Abhängigkeit sind neue chemische Analysen an optisch geprüftem Material erforderlich. Nur in einem Falle ist bisher die isomorphe Schichtung des Epidots bei der Analyse berücksichtigt worden. Am Epidot von Zöptau wurden der dunkle Kern und die helle Hülle getrennt analysirt [1]). Jener enthielt 40%, diese nur 20% Eisensilikat dem Thonerdesilikat beigemischt. Nach den auf S. 170 angeführten

1) M. Bauer a. a. O.

Beobachtungen ist der Kern stärker doppelbrechend als die hellfarbigen Schichten in der Hülle. Wenn man hiernach auch im Epidot vom Sulzbachthal der tiefgrünen Hülle einen höheren Eisengehalt zuschreiben darf, als dem bräunlichen Kern, so würde wieder die Stärke der Doppelbrechung mit dem Gehalt an Eisensilikat zunehmen. Nach A. Michel-Lévy findet sich auch im Epidot von Cabre die stärkste Doppelbrechung (0,056) in den gefärbten Partieen, die schwächste (unter 0,016) in den farblosen.

Vergleicht man die verschiedenen Epidotvorkommen unter einander, so bewährt sich im Großen und Ganzen der angenommene Zusammenhang zwischen der Farbe, d. h. dem Gehalt an Eisensilikat, und der Stärke der Doppelbrechung. Von den untersuchten Epidoten hat der von Traversella die dunkelste Farbe und den größten Werth für $\gamma-\alpha$, nämlich 0,057. Darauf folgen die Epidote von Arendal (0,051) und vom Sulzbachthal (0,050). Blasser gefärbt sind schon die Krystalle von Zöptau (0,043) und Haddam (0,035). Sehr hellfarbig ist der Epidot von Brosso (0,020) und fast farblos der von Ala (0,014). Die Annahme einer Zunahme der Stärke der Doppelbrechung mit dem Eisensilikat scheint mir mit den veröffentlichten Analysen nicht im Widerspruch zu stehen; sie entspricht auch der thatsächlich sehr geringen Doppelbrechung des Zoisit.

Göttingen, min.-petr. Institut, 1. Februar 1893.

Preisaufgabe für 1895.

Von dem Verlangen nach einer dem heutigen litterarhistorischen Bedürfniß entsprechenden Ausgabe der schönwissenschaftlichen Schriften Abraham Gotthelf Kästner's geleitet, wünscht die Kgl. Gesellschaft nach dem Antrag der historisch-philologischen Klasse eine Arbeit, die die Schriften Kästner's, welche nicht in den Bereich seiner eigentlichen Berufswissenschaft fallen, vollständig verzeichnet, ordnet und kritisch untersucht.

Zur Vollständigkeit verlangt die Gesellschaft eine Berücksichtigung der handschriftlichen Ueberlieferung, eine Verzeichnung der Briefe, der gedruckten wie etwa ungedruckter, eine Aufnahme der selten gewordenen Drucke einzelner kleiner Abhandlungen und Aufsätze und Nachweis ihrer Standorte, und eine Heranziehung der Recensionen Kästner's, sowie der in seinen berufswissenschaftlichen Werken befindlichen Vorreden, sofern sie

interessantes litterarhistorisches Material darbieten. Die **Ordnung** der Schriften soll einmal chronologisch sein und sich auf die zeitliche Feststellung der einzelnen Stücke erstrecken; ein zweites Verzeichniß die Schriften nach den litterarischen Arten, denen sie angehören, gliedern. Die **kritische Untersuchung** hat außer der Scheidung zwischen ächtem und unächtem Material auch der Art der Ueberlieferung der einzelnen Stücke nachzugehen, die gedruckten Schriften an der Hand handschriftlicher Vorlagen, soweit solche vorhanden sind, zu prüfen und besonders bei den Gedichten etwaige Abweichungen der Lesarten verschiedener Ausgaben zu verzeichnen.

Die Gesellschaft wünscht die Arbeit in solcher Gestalt, daß eine neue Ausgabe der bezeichneten Schriften Kästner's unmittelbar darauf gegründet werden kann.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1892.

(Fortsetzung.)

Sächs. meteorolog. Institut:
Jahrbuch 1891. I. Hälfte. Abth. 1 und 2. IX. Jahrg. 1891. Chemnitz 1892.
Astrophysikalisches Observatorium zu Potsdam:
Publicationen. Band 7. I. Theil. Potsdam 1892.
Leopoldina. Heft XXVIII. N. 11—12. 13—14 (doppelt). Halle a. S. 1892.
Die Arabischen Handschriften der Herz. Bibliothek zu Gotha. Band 5. Gotha 1892.
Pollichia. Festschrift zur 50jährigen Stiftungsfeier. Dürkheim a. d. Hart 1892.
Handbuch der Organischen Chemie von Dr. F. Beilstein. 3. Aufl. Band I. 6—9. Lieferung. Hamburg und Leipzig 1892.
Naturforschende Gesellschaft in Zürich:
Vierteljahrsschrift. 37. Jahrgang. 2. Heft. Zürich 1892.
Historischer Verein der 5 Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden und Zug:
Der Geschichtsfreund. Mittheilungen. XLVII. Band. Einsiedeln 1892.
Kaiserlich königl. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus:
Jahrbücher. Jahrgang 1890. N. F. XXVII. Band. Wien 1892.
K. K. Geologische Reichsanstalt:
a. Jahrbuch. Jahrg. 1892. XLII. Band. 1. Heft.
b. Abhandlungen. Band XVII. Heft 1 u. 2. Wien 1892.
c. Verhandlungen. 1892. N. 6—10.
K. k. zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:
Verhandlungen. Jahrgang 1892. XLII. Band. I. II. Quartal. Wien 1892.
Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
Mittheilungen. XXIX. Jahrg. N. 1—4. XXX. Jahrg. N. 1—4. Prag 1891—92.
Oesterreichische Gesellschaft für Meteorologie und Deutsche M. Gesell.
Meteorologische Zeitschrift 1892. Heft 8 u. 9. Wien 1892.

Ungarische Revue 1892. VI—VII. VIII—IX. Heft. Zwölfter Jahrg. Budapest 1892.

43 Hefte und Bände in ungarischer Sprache.

Magyar Tudományos Akadémie Budapest:

a) Almanach. 1892.
b) Simonyi Zs, A magyar határozók. (Die Bestimmungsworte im Ungarischen). II, 1. 1892.
c) Nyelotardománye Közlemények. (Philologische Mittheilungen). XIII, 3/4. 1891.
d) Munkácse Bernát, Vogul népköltési gyüjtemény. (Sammlung Vogulischer Volksdichtungen). I. II. 1892.
e) Magyarországi tanulók külföldön. (Ungarländische Studierende im Auslande). II. 1892.
f) Történettudományi Értekezések. (Historische Abhandlungen). XV, 2—6. 1891—92.
g) Társadalmi Értekezések. (Socialwissenschaftliche Abhandlungen). XI, 5—6. 1891—92.
h) Codex diplomaticus Hungaricus Andegavensis. VI. 1891.
i) Karácsonyi J., Szent István király oklevelei. (Urkunden d. Königs Stefan d. Heiligen). 1891.
k) Szilágyi S., Erdély eś az eszakkeleti háború. (Siebenbürgen und der Krieg im Nord-Osten). II. 1891.
l) Körösi J., Megyei Monographiák. (Comitats-Monographien). I. 1891.
m) Archaeologiai Értesitö. (Archaeologische Mittheilungen). N. F. XI, 4—5 und XII, 1—2. 1891—92.
n) Természettudomanyi Értekezések. (Naturwissenschaftliche Abhandlungen). XXI, 4 u. XXII, 1—3. 1891—92.
o) Mathematikai Értekezések. (Mathematische Abhandlungen). XIV, 5 und XV, 1. 1891—92.
p) Mathematikai eś természettudományi Közlemények. (Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen). XXIV, 8—10. 1891.
q) Mathematikai eś természettudományi Értesitö. (Naturwissenschaftlicher u. mathematischer Anzeiger). X, 1—7. 1891—92.
r) Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. IX. 1892.
s) Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroire des sciences en 1891.
t) Daday J., A Magyar allatani irodalom ismertetése 1881—90. (Verzeichniss d. zool. Literatur 1881—90). 1891.
u) Pungur Gyula, A Magyarországi tücsökfélék természetrajza. (Histoire naturelle des gryllides de Hongrie). 1891.
v) Értesitö az Erdélyi Muzeum-Egylet Orvos-természettudományi szakosztályaból. XVII (1892), I, 1; II, 1 u. 2; III, 1. Kolosvárt 1892.

J. S. v. Petényj, Ein Lebensbild 1799—1855 v. O. Herman. Erinnerungszeichen an den 2ten Ornithologischen Congress. Budapest 1891.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger 1892. Juli. Krakau 1892.

a) Biblioteka pisarzoŕ polskich. Nr. 22. w Kràkowie 1892.
b) Archivum do dziejów literatury i oświaty w Polsce. Tom VII. ib. 1892.
c) Rozprawy Akademii umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. 2. Serya. Tom II. ib. 1892.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens:

Månadsblad. Nitonde Argangen 1890. Stockholm 1890—92.

Sveriges offentliga Bibliotek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. C. 1891. Stockholm 1892.

Stavanger Museum:

Aars beretning for 1891. Stavanger 1892.

Kongelige Norske Videnskabers Selskab:

Skrifter 1888—90. Throndhjem 1892.

Académie Imp. des sciences de St. Petersbourg. VII. Série:

Mémoires. Tome XXXVIII. N. 11—13. St. Petersbourg 1892.

Meteorologische Beobachtungen in Dorpat 1891:

Sechsundzwanzigster Jahrg. VI. Band. 1. Heft. Dorpat 1892.

Finlands Geologiska Undersökning:
Beskrifning till Kartbladet N. 18—21. Helsingfors 1890—92.
Societatis Scientiarum Fennicae:
a. Acta. Tomns XVIII.
b. Öfversigt af Förhandlinger. XXXIII. 1890—1891.
Fennia 5. Société de Geographie de Finlande:
Bulletin. Helsingfors 1892.
Flora Batava. 297e 298e Aflevering. Leiden.
Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool Onderzoekingen. Vierde Reeks II. 1. Utrecht 1892.
La Société Hollandaise des sciences a Harlem:
Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXV. 5me livraison. XXVI. 2me livraison. Harlem 1892.
'École Polytechnique de Delft:
Annales. Tome VII. 1891. 2me, 3me et 4me livraison. Leide 1892.
Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië:
a. Natuurkundige Tijdschrift. Deel LI. Achtste Serie. Deel XII. 'S Gravenhage 1892.
b. Boekwerken gedurende het Jaar 1891.
Koninkligk Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië:
Bijdragen. Vijfde Volgreeks. Zevende Deel. 4. Afl. 'S Gravenhage 1892.
The Royal Society of London:
a. Philosophical Transactions. A. B. for the year 1891. Vol. 182.
b. List of members. 30. Nov. 1891.
c. Proceedings. Vol. LI. N. 313. 314. Vol. LII. N. 315.
d. Exchange List of Duplicates and Deficiencies. London 1892.
Zoological Society of London:
Proceedings 1892. Part. II, III. London 1892.
Royal Microscopical Society:
Journal 1892. Part 4. 5. London 1892.
London Mathematical Society:
Proceedings. N. 445—448. London 1892.
Linnean Society:
a. Journal Botany. Vol. XXVI. N. 176. Vol. XXIX. N. 194—201.
b. Journal Zoology. Vol. XXIII. N. 148. Vol. XXIV. N. 149—151.
c. List. 1891—92.
d. Proceedings from Nov. 1888—June 1890. London.
e. Transactions Botany. Vol. III. Part 4—7.
Liverpool Biological Society:
Proceedings and transactions. Vol. VI. Session 1891—92. Liverpool 1892.
Royal Society of Edinburgh. Vol. XXXVII. Part I. N. 4.
Transactions. Edinburgh 1892.
Cambridge philosophical Society:
a. Proceedings. Vol. VII. Part VI.
b. Transactions. Vol. XV. Part III.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

22. März. № 5. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. Februar.

Bestimmung der Constanten der thermischen Dilatation und des thermischen Druckes für einige quasi-isotrope Metalle.

Von

W. Voigt.

Die im Folgenden mitgetheilten Messungen bilden ein Glied in einer längeren Reihe von Beobachtungen, deren Ziel ist, an denselben möglichst gut definirten Metallstücken eine größere Anzahl von physikalischen Constanten zu bestimmen. Nur so gefundene Zahlen können theoretisch verwerthet werden, insbesondere zur Beantwortung der Frage, ob zwischen den auf dieselbe Substanz bezüglichen verschiedenartigen Constanten numerische Beziehungen stattfinden.

Die untersuchten Metallstäbe sind dieselben, für welche ich bereits die Constanten der Elasticität und der inneren Reibung mitgetheilt habe [1]), ausgesägt aus vorsichtig gegossenen, im Uebrigen unbearbeiteten Blöcken. Die Bestimmung ihrer thermischen

---

1) Vergl. W. Voigt, Bestimmung der Constanten der Elasticität etc. Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Bd. XXXVIII, 1892.

Dilatation geschah mit Hülfe des früher beschriebenen Apparates [1]), der schon zur Beobachtung einiger Krystalle gedient hat. Ich gebe hier nur kurz sein Constructionsprincip an.

An der Wand des Beobachtungsraumes ist ein Gestell befestigt, welches eine vertikal herabhängende messingene Schiene trägt. Das untere Ende des zu untersuchenden Stäbchens wird mittelst einer feinen Körnervertiefung auf eine Messingspitze aufgelegt, welche sich am untersten Theil der Schiene befindet; auf dem oberen Ende des Stäbchens liegt in einer ähnlichen Vertiefung eine kleine Wippe, die ihren zweiten Stützpunkt an der Schiene hat und einen vertikal gestellten Spiegel trägt. In demselben wird mit einem Fernrohr eine entfernte vertikal aufgestellte Scala beobachtet. Ein zweiter an der Schiene selbst befestigter Spiegel gestattet, etwaige Veränderungen in deren Stellung in Rechnung zu ziehen.

Besteht Stab und Schiene aus verschiedener Substanz, so ändert sich die Neigung des beweglichen Spiegels mit der Temperatur; und zwar wird die einer Temperaturdifferenz ϑ entsprechende Verschiebung σ der von unten nach oben nummerirten Millimeterscala im Fernrohr gegeben sein durch

$$\sigma = \frac{2LE}{H}(\alpha - \alpha_m)\vartheta = \beta\vartheta, \tag{1}$$

falls L die Länge des Stabes, H den Hebelarm der Wippe, E die Entfernung der Scala vom Fernrohr, α den thermischen Dilatationscoefficienten des Stabes, α_m denjenigen der Messingschienen bezeichnet.

Die Beobachtungs-Temperatur wurde dadurch geändert, daß der ganze Apparat mit der Wippe bis hart unter den beweglichen Spiegel abwechselnd in ein kaltes und ein warmes Bad von Paraffinöl getaucht wurde; diese Bäder konnten, ohne den Apparat zu erschüttern, durch eine geeignete mechanische Vorrichtung — einen auf Rollen längs der Wand vertikal verschiebbaren Schlitten — von unten her dem Apparat entgegengehoben und in der gewünschten Lage durch ein Gegengewicht festgehalten werden. Die Flüssigkeit wurde durch Turbinenrührer in mäßiger Circulation erhalten; da das kältere Bad meist eine nur wenig tiefere Temperatur besaß, als die Luft des Beobachtungsraumes, das wärmere sich über einer kleinen Gasflamme befand, außerdem die kupfernen Gefäße mit Filz überzogen waren, so gelang es leicht, die Temperaturen längere Zeit bis auf 0,1° C. constant zu halten. Eine größere Genauigkeit war nicht nöthig, weil sich bald zeigte, daß die ver-

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. XLIII, p. 831, 1891.

schiedenen Stäbe aus derselben Substanz keineswegs sehr genau übereinstimmendes Verhalten zeigten, die ganze Bestimmung also nur mäßig genaue Werthe liefern konnte. Aus demselben Grunde ist die Untersuchung der Abhängigkeit der thermischen Dilatation von der Temperatur weniger ausführlich behandelt und theilweise ganz unterblieben.

Bezüglich der Berechnung sei bemerkt, daß, wenn man den Dilatationscoefficienten als lineäre Function der Temperatur ansetzt, was innerhalb des benutzten mäßigen Bereiches zulässig ist, der einem Temperaturzuwachs $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ entsprechende Zuwachs l der Stablänge direct den Werth des Dilatationscoefficienten α für die mittlere Temperatur $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ bestimmt; denn aus

$$l = L_2 - L_1 = L_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \alpha(\vartheta) d\vartheta = L_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (\alpha_0 + \alpha_1 \vartheta) d\vartheta_1$$

$$= L_0 \left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right)(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

folgt

$$\frac{l}{L_0 \vartheta} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} = \alpha(\vartheta_m). \text{ —} \tag{2}$$

Die Vortheile des Apparates gegenüber dem bekannten sinnreichen von Fizeau liegen vor allen Dingen in der Benutzung von zwei Flüssigkeitsbädern, die sich leicht auswechseln lassen und dadurch eine schnelle Veränderung der Temperatur erlauben, auch mehr Garantie für eine zuverlässige Temperaturbestimmung bezüglich des untersuchten Körpers bieten, als Luftbäder; ferner auch in der Anwendung der Ablesung an einer Scala gegenüber der mühsamen dauernden Abzählung der wandernden Interferenzstreifen. Gegenüber dem dilatometrischen Verfahren, bei dem die gesuchte Größe durch die Differenz zweier wenig verschiedener Ablesungen bestimmt ist, bietet die benutzte Methode eine größere Sicherheit [1]).

Zum Graduiren des Apparates diente die Beobachtung eines schönen von Herrn Dr. Steeg und Reuter in Bad Homburg hergestellten Stabes von Bergkrystall, parallel der krystallographischen Hauptaxe orientirt, von ca. 11 cm Länge.

1) Hervorzuheben ist die Bequemlichkeit und der im Verhältniß zu den guten Leistungen niedrige Preis des Apparates, die ihn als Uebungsgegenstand für das Laboratorium sehr empfehlen. Die Unsicherheit der für einen und denselben Stab gefundenen Werthe α beträgt nur einige pro mille.

Die mit ihm erhaltenen Ablesungen sind, ebenso wie die definitiven auf die Metalle bezogenen, so mitgetheilt, daß in der ersten Columne die Temperaturänderung ϑ, in der zweiten die ihr entsprechende beobachtete Verschiebung σ der Scala im Fernrohr aufgeführt ist, in der dritten deren berechneter Werth σ_b, der mit Hülfe des aus allen Messungen einer Reihe bestimmten $\beta = \sigma/\vartheta$ erhalten ist. ϑ_m ist, wie oben, die mittlere Temperatur, d. h. das arithmetische Mittel der erreichten Grenztemperaturen. Zur Bestimmung der Temperaturen diente ein Geißler'sches Normalthermometer, mit Ausnahme einiger durch * hervorgehobenen Reihen, bei denen die Resultate schließlich auf das Normalthermometer reducirt sind.

Innerhalb des benutzten Temperaturintervalles und bei der gebrauchten Anordnung war die Theilung des Geißler'schen Thermometers um den 0,0089ten Theil zu groß; die deswegen nothwendige Correction ist aber nicht an den einzelnen Beobachtungen, sondern erst an den Endresultaten angebracht.

Quarz $L = 10{,}98$.

ϑ	σ	σ_b
+ 53,9	− 12,94	12,76
− 53,4	+ 12,50	12,63
+ 53,6	− 12,50	12,66
− 53,2	+ 12,43	12,55
+ 53,7	− 12,82	12,70
+ 56,9	− 13,51	13,45
− 56,1	+ 13,11	13,26
+ 58,2	− 13,84	13,76
− 57,5	+ 13,82	13,60

$\beta = -0{,}2366, \quad \vartheta_m = 38{,}2.$

Die einzelnen Beobachtungen dieser Reihe stimmen unter sich zwar weniger gut, aber durch die große Zahl der Messungen erhält das Endresultat doch eine ziemlich bedeutende Sicherheit.

ϑ	σ	σ_b
+ 32,35	− 7,40	7,45
− 32,30	+ 7,41	7,44
+ 28,00	− 6,47	6,45
− 27,85	+ 6,42	6,42

$\beta = 0{,}2303, \quad \vartheta_m = 26{,}1.$

ϑ	σ	σ_b
+ 26,0	− 5,96	5,84
− 34,0	+ 7,55	7,64
+ 28,0	− 6,43	6,29
− 27,7	+ 6,12	6,22
+ 26,5	− 5,90	5,95

$\beta = -0{,}2247, \quad \vartheta_m = 14{,}1.$

Macht man für β den Ansatz

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 \vartheta_m,$$

so findet sich

$$\beta_0 = -0{,}2176, \quad \beta_1 = -0{,}000492$$

und folgende Vergleichung

beobachtet	0,2366	0,2303	0,2247,
berechnet	0,2365	0,2305	0,2246.

Nach Anbringung der Thermometercorrection werden diese Resultate

$$\beta_0 = -0{,}2157, \quad \beta_1 = -0{,}000488.$$

Nun ist nach (1) der Ausdehnungscoefficient der Messingschiene gegeben durch

$$\alpha_m = \alpha_q - \beta \frac{H}{2LE}, \tag{3}$$

falls α_q den linearen Ausdehnungscoefficienten des Quarzes parallel der Hauptaxe bezeichnet. Benutzt man, daß bei dem angewandten Apparate

$$H = 0{,}622, \quad E = 591{,}5$$

war, und daß die neuesten Beobachtungen von Benoît[1])

$$\alpha_q = (7{,}111 + 0{,}01712\,\vartheta_m)\,10^{-6}$$

ergeben haben, so erhält man als die Constante des Apparates

$$\alpha_m = (17{,}44 + 0{,}0405\,\vartheta_m)\,10^{-6},$$

oder wenn man die Temperatur 30° C. zum Grunde legt, um nicht den Fundamentalwerth durch Extrapolation zu gewinnen, und beachtet, daß dies α_m, wie oben gezeigt, den linearen thermischen Ausdehnungscoefficienten bei der Temperatur $\Theta = \vartheta_m$ angiebt,

$$\alpha_m = (18{,}65 + 0{,}0405\,(\Theta - 30)).\ \ 10^{-6}.$$

Mit dieser Zahl sind die folgenden Beobachtungen berechnet.

Zu denselben bemerke ich allgemein, daß die Uebereinstimmung sowohl der direct beobachteten σ mit den berechneten σ_b bei demselben Stab, als auch die der schließlich folgenden Ausdehnungscoefficienten α für verschiedene Stäbe derselben Sub-

1) J. R. Benoît, Trav. et Mém. bur. intern. VI, 119, 121, 1888.

stanz bei den verschiedenen Metallen ziemlich verschieden ausgefallen ist.

Die Differenzen zwischen den σ und den σ_b rühren zum Theil von Erschütterungen des Apparates durch an dem leider ungünstig gelegenen Beobachtungsraume mitunter nahe vorbeifahrende Lastwagen her, zum Theil aber unzweifelhaft von einer Art thermischer Nachwirkung, die einen absolut stationären Zustand auch nach stundenlangem Verweilen in derselben Temperatur nicht eintreten ließ; letztere war bei den stark ductilen Metallen (Cadmium, Silber, Zinn u. dergl.) am stärksten, diese geben daher mitunter auch bedeutendere Werthe der Differenzen $\sigma - \sigma_b$.

Die Abweichung der Endwerthe α für verschiedene Stäbe desselben Materiales scheint einerseits eine Folge der mangelhaften Isotropie, andererseits die Wirkung der verschiedenen mechanischen Einwirkung bei der Herstellung der Stäbe zu sein. In der That sind dieselben bei den grobkrystallinischen und den stark ductilen Metallen im Allgemeinen am größten.

Bei den Ablesungen hat Herr Dr. Drude mir treulich geholfen.

Aluminium[1]).

No. 1.

ϑ	σ	σ_b
+ 48,55	+ 4,90	4,90
− 47,4	− 4,77	4,74
+ 46,1	+ 4,57	4,61
− 44,1	− 4,44	4,41
+ 43,5	+ 4,29	4,35

β[2]) $= + 0{,}1000$, $\vartheta_m = 31{,}1$, $L = 11{,}10$, $\alpha = 23{,}40 . 10^{-6}$.

No. 2.

ϑ	σ	σ_b
+ 54,5	+ 5,57	5,39
− 52,6	− 5,12	5,20
+ 50,2	+ 4,95	4,96
− 48,7	− 4,98	4,82
+ 44,1	+ 4,18	4,36
− 43,2	− 4,21	4,27

$\beta = + 0{,}0989$, $\vartheta_m = 38{,}9$, $L = 11{,}09$, $\alpha = 23{,}66 . 10^{-6}$.

No. 5.

ϑ	σ	σ_b
− 62,4	− 5,87	5,90
+ 80,7	+ 7,52	7,63
− 77,9	− 7,26	7,37
+ 72,4	+ 7,02	6,86
− 71,4	− 6,86	6,76

$\beta = + 0{,}0947$, $\vartheta_m = 44{,}0$, $L = 11{,}03$, $\alpha = 23{,}69 . 10^{-6}$.

1) Wegen der genauern Characterisirung der untersuchten Metalle sei verwiesen auf Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Bd. XXXVIII, p. 14 und f. 1892.

2) Die angegebenen Werthe β sind noch mit dem Thermometerfehler behaftet, die α hingegen corrigirt

No. 6. $\vartheta = -53{,}3$, $\sigma = -5{,}03$, $\sigma_b = 5{,}07$
$+52{,}7$ $+4{,}86$ $5{,}01$
$-50{,}4$ $-4{,}67$ $4{,}79$
$+58{,}8$ $+5{,}66$ $5{,}60$
$-57{,}2$ $-5{,}59$ $5{,}43$
$+57{,}8$ $+5{,}58$ $5{,}49$

$\beta = +0{,}0951$, $\vartheta_m = 38{,}0$, $L = 11{,}06$, $\alpha = 23{,}46 . 10^{-6}$.

No. 5. $\vartheta = +31{,}1$ $\sigma = +2{,}67$ $\sigma_b = 2{,}72$
$-29{,}15$ $-2{,}45$ $2{,}55$
$+28{,}95$ $+2{,}59$ $2{,}54$
$-27{,}6$ $-2{,}57$ $2{,}42$
$+25{,}1$ $+2{,}22$ $2{,}20$
$-23{,}6$ $-2{,}01$ $2{,}07$

$\beta = +0{,}0877$, $\vartheta_m = 13{,}6$, $L = 11{,}03$, $\alpha = 22{,}13 . 10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = -23{,}1$ $\sigma = -1{,}93$ $\sigma = 1{,}97$
$+24{,}5$ $+2{,}03$ $2{,}09$
$-24{,}1$ $-2{,}06$ $2{,}06$
$+24{,}9$ $+2{,}24$ $2{,}13$

$\beta = +0{,}0855$, $\vartheta_m = 15{,}4$, $L = 11{,}06$, $\alpha = 22{,}09 . 10^{-6}$.

Hieraus folgt als definitiver Werth

$$\alpha = (23{,}06 + 0{,}061 . (\Theta - 30)) . 10^{-6}.$$

und daraus die Zusammenstellung:

beob.	23,40	23,66	23,69	23,46	22,13	22,09
ber.	23,12	23,61	23,92	23,55	22,06	22,16

Diese Zahlen stimmen weniger genau, als einige der folgenden Reihen; da aber die Vergleichung der obigen σ und σ_b nur geringe Differenzen giebt, so ist die Ursache der Abweichungen nicht in den Beobachtungen, sondern in dem Material zu suchen.

Bronze.

No 8. $\vartheta = -40{,}3$, $\sigma = +0{,}63$, $\sigma_b = 0{,}69$
$+39{,}7$ $-0{,}73$ $0{,}69$
$-39{,}0$ $+0{,}65$ $0{,}67$
$+38{,}7$ $-0{,}71$ $0{,}67$

$\beta = -0{,}0173$, $\vartheta_m = 37{,}4$, $L = 10{,}95$, $\alpha = 18{,}13 . 10^{-6}$.

No. 14. $\vartheta = -48{,}1$, $\sigma = +0{,}84$, $\sigma_b = 0{,}83$
$+42{,}0$ $-0{,}71$ $0{,}73$
$-40{,}6$ $+0{,}70$ $0{,}70$
$+40{,}2$ $-0{,}71$ $0{,}70$

$\beta = -0{,}0173$, $\vartheta_m = 40{,}3$. $L = 10{,}96$, $\alpha = 18{,}25 . 10^{-6}$.

No. 14. $\vartheta = -30{,}4,\quad \sigma = +0{,}69,\quad \sigma = 0{,}65$
$+23{,}3 \quad -0{,}58 \quad 0{,}50$
$-29{,}1 \quad +0{,}61 \quad 0{,}63$
$+25{,}7 \quad -0{,}51 \quad 0{,}55$
$-25{,}9 \quad +0{,}50 \quad 0{,}56$
$\beta = -0{,}0215,\quad \vartheta_m = 18{,}5,\quad L = 10{,}96,\quad \alpha = 17{,}17.10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (17{,}75 + 0{,}0503\,(\Theta - 30)).\,10^{-6}.$$

und die Zusammenstellung

beob.	18,13	18,25	17,17
ber.	18,12	18,27	17,17.

Cadmium.

No. 2. $\vartheta = +54{,}7,\quad \sigma = +5{,}77,\quad \sigma_b = 6{,}01$
$-55{,}1 \quad -6{,}25 \quad 6{,}06$
$+53{,}3 \quad +5{,}92 \quad 5{,}87$
$\beta = +0{,}110,\quad \vartheta_m = 43{,}0,\quad L = 10{,}98,\quad \alpha = 24{,}4.10^{-6}.$

No. 4. $\vartheta = -63{,}9,\quad \sigma = -8{,}32,\quad \sigma_b = 8{,}43$
$+62{,}2 \quad +8{,}09 \quad 8{,}20$
$-60{,}8 \quad -8{,}11 \quad 8{,}03$
$+60{,}0 \quad +8{,}08 \quad 7{,}92$
$\beta = +0{,}132,\quad \vartheta_m = 41{,}0,\quad L = 11{,}02,\quad \alpha = 25{,}3.10^{-6}.$

No. 4. $\vartheta = -31{,}2\quad \sigma = -4{,}23\quad \sigma_b = 4{,}09$
$+30{,}0 \quad +3{,}85 \quad 3{,}93$
$-30{,}1 \quad -3{,}98 \quad 3{,}94$
$+31{,}2 \quad +4{,}00 \quad 4{,}09$
$\beta = +0{,}131,\quad \vartheta_m = 18{,}3\quad L = 11{,}02,\quad \alpha = 24{,}4.10^{-6}.$

Die Abhängigkeit des Dilatationscoefficienten von der Temperatur versteckt sich hier unter den Beobachtungsfehlern; wir setzen für 30° als angenähert richtig

$$\alpha = 24{,}7.\,10^{-6}.$$

Eisen.

No. 1. $\vartheta = -57{,}3,\quad \sigma = +7{,}93,\quad \sigma_b = 7{,}95$
$+56{,}8 \quad -7{,}79 \quad 7{,}87$
$-54{,}6 \quad +7{,}59 \quad 7{,}57$
$+53{,}1 \quad -7{,}42 \quad 7{,}36$
$\beta = -0{,}139,\quad \vartheta_m = 35{,}9,\quad L = 11{,}02,\quad \alpha = 12{,}16.10^{-6}.$

No. 2. $\vartheta = -62{,}3,\quad \sigma = +9{,}71,\quad \sigma_b = 9{,}77$
$+61{,}7 \quad -9{,}59 \quad 9{,}66$
$-60{,}4 \quad +9{,}39 \quad 9{,}46$
$+60{,}6 \quad -9{,}51 \quad 9{,}48$
$-58{,}3 \quad +9{,}30 \quad 9{,}13$
$\beta = -0{,}157,\quad \vartheta_m = 39{,}6,\quad L = 11{,}14,\quad \alpha = 11{,}69.10^{-6}.$

No. 5. $\vartheta = +65{,}0$, $\sigma = -9{,}42$, $\sigma_b = 9{,}54$
$-62{,}9$ $+9{,}19$ $9{,}23$
$+61{,}5$ $-9{,}08$ $9{,}02$
$-59{,}7$ $+8{,}84$ $8{,}76$

$\beta = -0{,}147$, $\vartheta_m = 36{,}5$, $L = 11{,}02$, $\alpha = 11{,}97 . 10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = +55{,}2$, $\sigma = -8{,}20$, $\sigma_b = 8{,}15$
$-54{,}7$ $+8{,}01$ $8{,}07$
$+55{,}5$ $-8{,}20$ $8{,}20$
$-55{,}1$ $+8{,}15$ $8{,}14$

$\beta = -0{,}148$, $\vartheta_m = 38{,}0$ $L = 11{,}00$, $\alpha = 11{,}92 . 10^{-6}$.

No. 5. $\vartheta = -24{,}1$ $\sigma = +3{,}72$ $\sigma_b = 3{,}68$
$+26{,}3$ $-3{,}98$ $4{,}02$
$-26{,}1$ $+3{,}91$ $3{,}98$
$+27{,}7$ $-4{,}25$ $4{,}23$
$-27{,}5$ $+4{,}23$ $4{,}20$

$\beta = -0{,}1526$, $\vartheta_m = 15{,}5$, $L = 11{,}02$ $\alpha = 10{,}85 . 10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = -24{,}5$ $\sigma = +3{,}70$ $\sigma_b = 3{,}69$
$+23{,}5$ $-3{,}41$ $3{,}54$
$-24{,}0$ $+3{,}50$ $3{,}62$
$+28{,}8$ $-4{,}57$ $4{,}24$

$\beta = -0{,}1507$, $\vartheta_m = 16{,}0$, $L = 11{,}00$, $\alpha = 10{,}95 . 10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (11{,}58 + 0{,}048\,(\Theta - 30)) . 10^{-6}$$

und die Zusammenstellung.

beob.	12,16	11,69	11,97	11,93	10,85	10,95
ber.	11,86	12,04	11,89	11,96	10,89	10,91.

Die Uebereinstimmung ist recht befriedigend, obgleich das benutzte Eisen nicht eben feinkörnig war.

Gold.

No. 1. $\vartheta = -52{,}2$, $\sigma = +5{,}00$, $\sigma_b = 5{,}03$
$+50{,}9$ $-4{,}94$ $4{,}91$
$-50{,}45$ $+4{,}84$ $4{,}86$
$+49{,}3$ $-4{,}77$ $4{,}76$
$-49{,}05$ $+4{,}76$ $4{,}73$

$\beta = -0{,}0965$, $\vartheta_m = 35{,}6$, $L = 10{,}90$, $\alpha = 14{,}26 . 10^{-6}$.

No. 2. $\vartheta = +49{,}3$, $\sigma = -4{,}55$, $\sigma_b = 4{,}69$
$-48{,}4$ $+4{,}64$ $4{,}60$
$+47{,}7$ $-4{,}56$ $4{,}54$
$-47{,}1$ $+4{,}49$ $4{,}48$
$+50{,}1$ $-4{,}85$ $4{,}77$

$\beta = -0{,}0952$, $\vartheta_m = 33{,}4$. $L = 10{,}90$, $\alpha = 14{,}24 . 10^{-6}$.

No. 1. $\vartheta = +25{,}45,\quad \sigma = -2{,}37,\quad \sigma_b = 2{,}36$
$\quad -25{,}35 \quad +2{,}36 \quad 2{,}35$
$\quad +25{,}7 \quad -2{,}39 \quad 2{,}38$
$\quad -25{,}45 \quad +2{,}33 \quad 2{,}36$

$\beta = -0{,}0927,\ \vartheta_m = 15{,}6.\ L = 10{,}90,\ \alpha = 13.64.10^{-6}.$

No. 2. $\vartheta = +25{,}5,\quad \sigma = -2{,}20,\quad \sigma_b = 2{,}20$
$\quad -25{,}35 \quad +2{,}22 \quad 2{,}19$
$\quad +25{,}2 \quad -2{,}17 \quad 2{,}17$
$\quad -24{,}85 \quad +2{,}12 \quad 2{,}14$

$\beta = -0{,}0863,\ \vartheta_m = 15{,}8.\ L = 10{,}90,\ \alpha = 13{,}95.10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (14{,}14 + 0{,}0239\,(\Theta - 30)).\,10^{-6}.$$

und die Zusammenstellung

beob.	14,26	14,24	13,64	13,95
ber.	14,27	14,22	13,80	13,80.

Kupfer.

No. 1. $\vartheta = +38{,}4,\quad \sigma = -1{,}32,\quad \sigma_b = 1{,}29$
$\quad -37{,}4 \quad +1{,}21 \quad 1{,}25$
$\quad +37{,}4 \quad -1{,}35 \quad 1{,}25$
$\quad -36{,}4 \quad +1{,}14 \quad 1{,}22$

$\beta = -0{,}034,\ \vartheta_m = 39{,}1,\ L = 11{,}02,\ \alpha = 17{,}41.10^{-6}.$

No. 2. $\vartheta = -37{,}1,\quad \sigma = +1{,}30,\quad \sigma_b = 1{,}31$
$\quad +35{,}5 \quad -1{,}28 \quad 1{,}25$
$\quad -35{,}0 \quad +1{,}18 \quad 1{,}24$
$\quad +33{,}3 \quad -1{,}18 \quad 1{,}18$
$\quad -32{,}5 \quad +1{,}19 \quad 1{,}15$

$\beta = -0{,}035,\ \vartheta = 38{,}3\ L = 11{,}03,\ \alpha = 17{,}33.10^{-6}.$

No. 5. $\vartheta = +61{,}3,\quad \sigma = -2{,}08,\quad \sigma_b = 2{,}04$
$\quad -59{,}4 \quad +2{,}05 \quad 1{,}98$
$\quad +60{,}9 \quad -1{,}92 \quad 2{,}03$

$\beta = -0{,}033,\ \vartheta_m = 35{,}0,\ L = 11{,}00,\ \alpha = 17{,}29.10^{-6}.$

No. 6. $\vartheta = +65{,}3,\quad \sigma = -2{,}00,\quad \sigma_b = 2{,}05$
$\quad -63{,}3 \quad +1{,}97 \quad 1{,}99$
$\quad +63{,}0 \quad -1{,}97 \quad 1{,}98$
$\quad -61{,}9 \quad +2{,}01 \quad 1{,}94$

$\beta = -0{,}031,\ \vartheta_m = 36{,}0,\ L = 11{,}01.\ \alpha = 17{,}43.10^{-6}.$

No. 5. $\vartheta = +19{,}1\quad \sigma = -0{,}65\quad \sigma_b = 0{,}66$
$\quad -18{,}2 \quad +0{,}62 \quad 0{,}63$
$\quad +25{,}8 \quad -0{,}86 \quad 0{,}89$
$\quad -27{,}0 \quad +0{,}95 \quad 0{,}93$
$\quad +25{,}7 \quad -0{,}91 \quad 0{,}89$

$\beta = -0{,}0345,\ \vartheta_m = 15{,}5,\ L = 11{,}00,\ \alpha = 16{,}43.10^{-6}.$

No. 6. $\vartheta = -29,3$ $\sigma = +0,95$ $\sigma_b = 0,93$
$+28,1$ $-0,87$ $0,89$
$-25,0$ $+0,78$ $0,79$
$+25,0$ $-0,79$ $0,79$

$\beta = -0,0315$, $\vartheta_m = 12,2$, $L = 11,01$. $\alpha = 16,44.10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (17,09 + 0,0404\ (\Theta - 30)).\ 10^{-6}.$$

und die Zusammenstellung:

beob.	17,41	17,33	17,29	17,43	16,43	16,44
ber.	17,46	17,43	17,29	17,33	16,50	16,37.

Die Uebereinstimmung ist sehr befriedigend.

Magnesium.

No. 2. $\vartheta = +47,9$, $\sigma = +8,17$, $\sigma_b = 7,63$
$-63,4$ $-9,96$ $10,12$
$+61,2$ $+9,58$ $9,74$
$-58,2$ $-9,09$ $9,27$
$+56,4$ $+8,90$ $8,92$
$-55,4$ $-8,82$ $8,82$

$\alpha = +0,0159$, $\vartheta_m = 32,3$, $L = 11,03$, $\alpha = 26,26.10^{-6}$.

No. 5. $\vartheta = +57,0$, $\sigma = +9,43$, $\sigma_b = 9,23$
$-56,6$ $-9,20$ $9,17$
$-58,2$ $-9,47$ $9,42$
$+59,8$ $+9,62$ $9,68$
$-58,3$ $-9,25$ $9,45$

$\beta = +0,162$, $\vartheta_m = 40,0$, $L = 11,00$, $\alpha = 26,73.10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = +46,5$ $\sigma = +7,25$, $\sigma_b = 7,26$
$-58,4$ $-9,29$ $9,12$
$+57,7$ $+8,99$ $9,00$
$-57,2$ $-8,89$ $8,93$
$+56,4$ $+8,74$ $8,81$
$-53,4$ $-8,18$ $8,33$
$+48,5$ $+7,60$ $7,58$
$-48,7$ $-7,67$ $7,61$

$\beta = +0,156$, $\vartheta_m = 33,0$, $L = 11,02$, $\alpha = 26,15.10^{-6}$.

No. 5. $\vartheta = +24,6$ $\sigma = +3,57$ $\sigma_b = 3,68$
$+27,5$ $+4,12$ $4,11$
$-26,6$ $-4,09$ $3,98$

$\beta = +0,1496$, $\vartheta_m = 15,4$, $L = 11,00$, $\alpha = 25,15.10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = -25,7$ $\sigma = -3,66$ $\sigma = 38,3$
$+24,15$ $+3,55$ $36,0$
$-23,55$ $-3,55$ $35,1$
$+18,8$ $+2,94$ $28,0$
$+24,2$ $+3,60$ $36,1$

$\beta = +0,149$, $\vartheta_m = 16,5$, $L = 11,02$, $\alpha = 25,16.10^{-6}$.

Hieraus folgt:

$$\alpha = (26{,}05 + 0{,}064\,(\Theta - 30)).\,10^{-6}.$$

und die Zusammenstellung:

beob.	26,26	26,73	26,15	25,15	25,16
ber.	26,20	26,69	26,24	25,12	25,19.

Die Uebereinstimmung ist trotz der Weichheit des Materiales sehr gut.

Nickel.

No. 2. $\vartheta = +54{,}9$, $\sigma = -6{,}35$, $\sigma_b = 6{,}33$

ϑ	σ	σ_b
+54,9	−6,35	6,33
−53,4	+6,18	6,16
+52,7	−6,01	6,07
−51,2	+5,87	5,90
+50,1	−5,77	5,77

$\beta = -0{,}115$, $\vartheta_m = 32{,}0$, $L = 11{,}07$, $\alpha = 13{,}32.10^{-6}$.

No. 3.

ϑ	σ	σ_b
−46,7	+5,40	5,40
+45,6	−5,27	5,27
−44,1	+5,17	5,10
+41,9	−4,78	4,85

$\beta = -0{,}117$, $\vartheta_m = 38{,}7$, $L = 11{,}04$, $\alpha = 13{,}48.10^{-6}$.

No. 4.

ϑ^*	σ	σ_b
−52,7	+6,23	6,29
+54,7	−6,60	6,53
−53,6	+6,38	6,39
+57,4	−6,77	6,85
−56,4	+6,79	6,73

$\beta = -0{,}120$, $\vartheta_m = 46{,}5$, $L = 11{,}08$. $\alpha = 13{,}68.10^{-6}$.

No. 5.

ϑ	σ	σ_b
+57,8	−6,64	6,59
−58,7	+6,64	6,68
+57,0	−6,46	6,49
−55,0	+6,29	6,27
+51,9	−5,92	5,92
−52,4	+5,95	5,97

$\beta = -0{,}114$, $\vartheta_m = 34{,}0$, $L = 11{,}01$, $\alpha = 13{,}42.10^{-6}$.

No. 5.

ϑ	σ	σ_b
−29,8	+3,34	3,46
+28,4	−3,25	3,30
−23,7	+2,63	2,75
+25,5	−2,84	2,95
+29,1	−3,52	3,38
+30,3	−3,61	3,52
−29,0	+3,48	3,36
+29,9	−3,55	3,47

$\beta = -0{,}1160$, $\vartheta_m = 14{,}3$, $L = 11{,}01$, $\alpha = 12{,}53.10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = -23,9$ $\sigma = +2,88$ $\sigma_b = 2,80$
$+25,7$ $-3,03$ $3,01$
$-25,9$ $+3,01$ $3,03$
$+24,3$ $-2,76$ $2,84$

$\beta = -0,1170$, $\vartheta_m = 15,5$, $L = 11,00$, $\alpha = 12,53 . 10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (13,15 + 0,0413\ (\Theta - 30)) . 10^{-6}$$

und die Zusammenstellung

beob.	13,48	13,68	13,42	13,32	12,53	12,53
ber.	13,51	13,83	13,31	13,23	12,50	12,55

Silber.

No. 1. $\vartheta = -61,4$, $\sigma = -0,67$, $\sigma_b = 0,65$
$+65,0$ $+0,69$ $0,69$
$-65,6$ $-0,67$ $0,69$

$\beta = +0,0105$, $\vartheta_m = 40,6$, $L = 11,03$, $\alpha = 19,58 . 10^{-6}$.

No. 2. $\vartheta = -58,2$, $\sigma = -0,75$, $\sigma_b = 0,74$
$+60,0$ $+0,79$ $0,76$
$-58,0$ $-0,70$ $0,74$

$\beta = +0,013$, $\vartheta_m = 33,8$, $L = 11,04$, $\alpha = 19,42 . 10^{-6}$.

No. 5. $\vartheta = -52,2$, $\sigma = -0,70$, $\sigma_b = 0,76$
$+48,2$ $+0,75$ $0,71$
$-47,3$ $-0,77$ $0,69$
$+52,9$ $+0,69$ $0,77$
$-52,4$ $-0,72$ $0,77$
$+49,4$ $+0,80$ $0,72$

$\beta = +0,0145$, $\vartheta_m = 35,0$, $L = 11,04$, $\alpha = 19,66 . 10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = -44,7$, $\sigma = -0,60$, $\sigma_b = 0,61$
$+43,8$ $+0,54$ $0,59$
$+46,7$ $+0,73$ $0,63$
$-43,0$ $-0,57$ $0,58$
$+47,2$ $+0,66$ $0,64$
$-46,2$ $-0,55$ $0,62$

$\beta = +0,0135$, $\vartheta_m = 31,9$, $L = 11,03$, $\alpha = 19,37 . 10^{-6}$

No. 5. $\vartheta = -24,4$ $\sigma = -0,39$ $\sigma_b = 0,35$
$+24,4$ $+0,39$ $0,35$
$-25,1$ $-0,34$ $0,36$
$+26,4$ $+0,33$ $0,38$

$\beta = +0,0145$, $\vartheta_m = 15,7$, $L = 11,04$, $\alpha = 18,76 . 10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = -23,65$ $\sigma = -0,20$ $\sigma_b = 0,22$
$+22,25$ $+0,19$ $0,20$
$-22,1$ $-0,19$ $0,20$
$+25,8$ $+0,27$ $0,24$

$\beta = +0,0091$, $\vartheta_m = 15,7$, $L = 11,03$, $\alpha = 18,51 . 10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (19{,}25 + 0{,}043\,(\Theta - 30)).\ 10^{-6}$$

und die Zusammenstellung

beob.	19,58	19,42	19,66	19,37	18,76	18,51
ber.	19,71	19,41	19,60	19,38	18,63	18,63.

Die Uebereinstimmung ist im Ganzen recht gut.

Stahl ($LS\,84\,R$)

No. 1. $\vartheta = -34{,}5$, $\sigma = +5{,}08$, $\sigma_b = 5{,}37$
$+34{,}9$ $-5{,}68$ $5{,}43$
$-33{,}3$ $+5{,}02$ $5{,}19$
$+33{,}7$ $-5{,}42$ $5{,}25$
$-32{,}5$ $+5{,}11$ $5{,}07$

$\beta = -0{,}156$, $\vartheta_m = 35{,}7$, $L = 11{,}09$, $\alpha = 11{,}55.10^{-6}$.

No. 2. $\vartheta = +32{,}9$, $\sigma = -4{,}97$, $\sigma_b = 4{,}93$
$-31{,}8$ $+4{,}64$ $4{,}76$
$+32{,}3$ $-4{,}96$ $4{,}84$
$-31{,}4$ $+4{,}67$ $4{,}70$

$\beta = -0{,}150$, $\vartheta_m = 35{,}0$, $L = 11{,}10$, $\alpha = 11{,}82.10^{-6}$.

No. 5. $\vartheta = +57{,}2$, $\sigma = -8{,}39$, $\sigma_b = 8{,}53$
$-56{,}0$ $+8{,}29$ $8{,}36$
$+58{,}1$ $-8{,}62$ $8{,}68$
$-56{,}3$ $+8{,}48$ $8{,}41$
$+57{,}8$ $-8{,}76$ $8{,}63$
$-57{,}9$ $+8{,}60$ $8{,}51$

$\beta = -0{,}149$, $\vartheta_m = 35{,}2$, $L = 11{,}01$, $\alpha = 11{,}81.10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = +58{,}3$, $\sigma = -8{,}62$ $\sigma_b = 8{,}60$
$-56{,}5$ $+8{,}35$ $8{,}42$
$+57{,}7$ $-8{,}62$ $8{,}61$
$-55{,}8$ $+8{,}45$ $8{,}33$
$+53{,}7$ $-7{,}96$ $8{,}00$
$-53{,}2$ $+7{,}99$ $7{,}93$

$\beta = -0{,}149$, $\vartheta_m = 36{,}7$, $L = 11{,}01$, $\alpha = 11{,}87.10^{-6}$

No. 5. $\vartheta = -26{,}4$, $\sigma = +4{,}12$, $\sigma_b = 4{,}05$
$+25{,}95$ $-3{,}85$ $3{,}98$
$-26{,}75$ $+4{,}09$ $4{,}10$
$+26{,}1$ $-4{,}06$ $4{,}02$

$\beta = -0{,}1532$, $\vartheta_m = 16{,}2$, $L = 11{,}01$, $\alpha = 10{,}85.10^{-6}$.

No. 6. $\vartheta = -25{,}9$, $\sigma = +4{,}01$, $\sigma_b = 4{,}08$
$+25{,}7$ $-4{,}23$ $4{,}05$
$-26{,}1$ $+4{,}11$ $4{,}12$
$+31{,}4$ $-4{,}85$ $4{,}95$

$\beta = -0{,}1577$, $\vartheta_m = 15{,}2$, $L = 11{,}01$, $\alpha = 10{,}60.10^{-6}$,

Hieraus ergiebt sich

$$\alpha = (11{,}47 + 0{,}0519\,(\Theta - 30)).\,10^{-6}$$

und die Zusammenstellung

beob.	11,55	11,82	11,81	11,87	10,85	10,60
ber.	11,77	11,73	11,74	11,82	10,75	10,70.

Die Uebereinstimmung ist ziemlich bedeutend.

Stahl ($LS\,84E$).

No. 3. $\vartheta = +38{,}7$, $\sigma = -5{,}95$, $\sigma_b = 5{,}95$

ϑ	σ	σ_b
+ 38,7	− 5,95	5,95
− 37,7	+ 5,75	5,80
+ 37,1	− 5,75	5,70
− 36,2	+ 5,57	5,56
+ 35,0	− 5,47	5,38
− 32,3	+ 5,01	4,96

$\beta = -0{,}154$, $\vartheta_m = 36{,}1$, $L = 11{,}03$, $\alpha = 11{,}62.10^{-6}$.

No. 4. $\vartheta^* = +49{,}6$ $\sigma = -7{,}69$, $\sigma_b = 7{,}51$

ϑ^*	σ	σ_b
+ 49,6	− 7,69	7,51
− 48,0	+ 7,20	7,27
+ 45,7	− 7,19	6,92
− 44,9	+ 6,62	6,80
+ 45,2	− 6,82	6,85
− 44,5	+ 6,55	6,74

$\beta = -0{,}152$, $\vartheta_m = 39{,}6$, $L = 11{,}05$, $\alpha = 11{,}87.10^{-6}$.

Die Beobachtungen sind nicht weiter geführt, weil nach den vorstehenden Zahlen offenbar diese Stahlsorte sich nicht merklich anders verhält, als die vorige.

Wismuth.

No. 1.

ϑ	σ	σ_b
− 62,3	+ 6,46	6,62
+ 61,9	− 6,43	6,59
− 53,2	+ 5,70	5,65
− 61,1	+ 6,55	6,50
+ 59,9	− 6,57	6,36

$\beta = -0{,}106$, $\vartheta_m = 35{,}0$, $L = 10{,}95$, $\alpha = 13{,}82.10^{-6}$.

No. 2.

ϑ	σ	σ_b
− 69,0	+ 6,82	7,04
+ 65,7	− 6,59	6,70
− 63,4	+ 6,37	6,47
+ 66,3	− 7,02	6,77
− 64,9	+ 6,81	6,62
+ 61,2	− 6,17	6,24

$\beta = -0{,}102$, $\vartheta_m = 36{,}0$, $L = 11{,}00$, $\alpha = 14{,}07\,.\,10.$

No. 3. $\vartheta = +26{,}0,\quad \sigma = -2{,}90,\quad \sigma_b = 2{,}82$
$-26{,}0 \quad +2{,}80 \quad 2{,}82$
$+26{,}3 \quad -2{,}83 \quad 2{,}86$
$-26{,}0 \quad +2{,}79 \quad 2{,}82$
$\beta = -0{,}1085,\quad \vartheta = 15{,}8,\quad L = 11{,}00,\quad \alpha = 12{,}93.10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (13{,}67 + 0{,}052\,(\Theta - 30)).\ 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung

beob.	13,82	14,07	12,93
ber.	13,93	13,98	12,93.

Zink.

No. 1. $\vartheta = -36{,}9,\quad \sigma = -4{,}54,\quad \sigma_b = 4{,}37$
$+37{,}0 \quad +4{,}02 \quad 4{,}38$
$-36{,}3 \quad -4{,}33 \quad 4{,}30$
$-34{,}3 \quad -4{,}18 \quad 4{,}06$
$+34{,}3 \quad +4{,}05 \quad 4{,}06$
$-34{,}0 \quad -4{,}07 \quad 4{,}03$
$+33{,}8 \quad +3{,}99 \quad 4{,}00$
$\beta = +0{,}0118,\quad L = 11{,}02,\quad \alpha = 24{,}2.10^{-6}$.

No. 2. $\vartheta = +36{,}5,\quad \sigma = +4{,}83,\quad \sigma_b = 4{,}96$
$-35{,}9 \quad -4{,}90 \quad 4{,}88$
$+35{,}4 \quad +4{,}90 \quad 4{,}81$
$-34{,}9 \quad -4{,}92 \quad 4{,}75$
$+35{,}9 \quad +4{,}80 \quad 4{,}88$
$-35{,}6 \quad -4{,}82 \quad 4{,}84$
$+35{,}0 \quad +4{,}70 \quad 4{,}76$
$\beta = +0{,}136,\quad L = 11{,}01,\quad \alpha = 25{,}1.10^{-6}$.

No. 3. $\vartheta = +60{,}2,\quad \sigma = +11{,}28,\quad \sigma_b = 10{,}95$
$-59{,}8 \quad -10{,}99 \quad 10{,}90$
$+56{,}5 \quad +10{,}13 \quad 10{,}29$
$-55{,}9 \quad -10{,}03 \quad 10{,}18$
$+54{,}5 \quad +9{,}81 \quad 9{,}93$
$\beta = +0{,}182,\quad L = 10{,}92,\quad \alpha = 27{,}3.10^{-6}$.

No. 4. $\vartheta = +54{,}8,\quad \sigma = +5{,}75,\quad \sigma^b = 5{,}97$
$-64{,}9 \quad -6{,}98 \quad 7{,}07$
$+59{,}8 \quad +6{,}70 \quad 6{,}52$
$-57{,}2 \quad -6{,}34 \quad 6{,}24$
$\beta = +0{,}109,\quad L = 10{,}57,\quad \alpha = 24{,}0.10^{-6}$.

Die enorme Verschiedenheit der gefundenen Werthe dürfte sich hier wohl am natürlichsten durch das sehr grobe krystallinische Korn des benutzten Zinkes erklären und würde dann auf eine starke Abhängigkeit der thermischen Dilatation von der Rich-

tung gegen die Krystallaxen deuten. Die Abhängigkeit derselben von der Temperatur zu untersuchen, hatte unter diesen Umständen keinen Zweck; eben deshalb sind die Werthe α auch statt für die wirklichen ϑ_m, welche um 36° lagen, sogleich für den Normalwerth 30° berechnet; man wird

$$\alpha = 25{,}1 . 10^{-6}$$

als einen angenäherten Werth benutzen können.

Zinn.

	ϑ	σ	σ_b
No. 1.	$-43{,}9$	$-2{,}90$	$2{,}90$
	$+46{,}7$	$+3{,}00$	$3{,}08$
	$-49{,}4$	$-3{,}40$	$3{,}26$
	$+49{,}9$	$+3{,}15$	$3{,}16$
	$-47{,}4$	$-3{,}22$	$3{,}13$
	$+46{,}4$	$+2{,}89$	$3{,}06$

$\beta = +0{,}066, \quad L = 10{,}95, \quad \alpha = 21{,}8 . 10^{-6}.$

	ϑ	σ	σ_b
No. 2.	$+36{,}8$	$+3{,}81$	$3{,}86$
	$-40{,}7$	$-4{,}33$	$4{,}26$
	$+42{,}3$	$+4{,}27$	$4{,}43$
	$-41{,}7$	$-4{,}50$	$4{,}37$
	$+43{,}6$	$+4{,}50$	$4{,}57$
	$-42{,}9$	$-4{,}53$	$4{,}50$
	$+40{,}9$	$+4{,}29$	$4{,}29$

$\beta = +0{,}105, \quad L = 10{,}94, \quad \alpha = 23{,}6 . 10^{-6}.$

	ϑ	σ	σ_g
No. 5.	$-44{,}2$	$-3{,}36$	$3{,}21$
	$+42{,}6$	$+2{,}68$	$3{,}09$
	$-42{,}6$	$+3{,}38$	$3{,}09$
	$+43{,}2$	$+2{,}88$	$3{,}14$
	$-43{,}0$	$-3{,}35$	$3{,}12$

$\beta = +0{,}073, \quad L = 10{,}94, \quad \alpha = 22{,}1 . 10^{-6}.$

	ϑ	σ	σ_b
No. 7.	$+41{,}2$	$+2{,}32$	$2{,}42$
	$-48{,}2$	$-3{,}00$	$2{,}84$
	$+49{,}9$	$+2{,}87$	$2{,}94$
	$-48{,}9$	$-2{,}90$	$2{,}88$
	$+49{,}2$	$+2{,}89$	$2{,}89$

$\beta = +0{,}059, \quad L = 10{,}93, \quad \alpha = 21{,}5 . 10^{-6}.$

Von diesen Zahlen gilt dasselbe, wie von den für Zink erhaltenen; die Abweichungen dürften hier aber durch die mechanische Bearbeitung der Stäbe bedingt sein. Der Mittelwerth

$$\alpha = 22{,}2 . 10^{-6}$$

wird für $\Theta = 30°$ als angenähert richtig angenommen werden können.

Die vorstehend bestimmten thermischen Dilatationscoefficienten können nun in Verbindung mit den früher erhaltenen Elasticitäts-

moduln[1]) dazu benutzt werden, die wichtigen Constanten des thermischen Druckes für die untersuchten Körper zu berechnen.

Die thermischen Drucke sind die Ergänzungen, welche zu den gewöhnlichen elastischen Drucken $X_x \ldots X_y$ hinzukommen, wenn die Temperatur variirt wird. Beschränkt man sich auf kleine Temperaturänderungen, so kann man sie mit denselben proportional setzen, also für isotrope Körper die gesammten Drucke $\Xi_x \ldots \Xi_y$ schreiben:

$$
\begin{aligned}
-\Xi_x &= -(X_x + q\vartheta) = c\,x_x + c_1 y_y + c_1 z_z - q\vartheta \\
-H_y &= -(Y_y + q\vartheta) = c_1 x_x + c\,y_y + c_1 z_z - q\vartheta \\
-Z_z &= -(Z_z + q\vartheta) = c_1 x_x + c_1 y_y + c\,z_z - q\vartheta
\end{aligned} \qquad (4)
$$

aber

$$-H_z = -Y_z = \frac{c - c_1}{2} y_z, \qquad -Z_x = -Z_x = \frac{c - c_1}{2} z_x,$$

$$-\Xi_y = -X_y = \frac{c - c_1}{2} x_y,$$

woraus folgt

$$
\begin{aligned}
-x_x &= s\,\Xi_x + s_1 H_y + s_1 Z_z - \alpha\vartheta, \\
-y_y &= s_1 \Xi_x + s\,H_y + s_1 Z_z - \alpha\vartheta, \\
-z_z &= s_1 \Xi_x + s_1 H_y + s\,Z_z - \alpha\vartheta, \\
-y_z &= 2(s - s_1) H_z, \quad -z_x = 2(s - s_1) Z_x, \quad -x_y = 2(s - s_1)\Xi_y,
\end{aligned} \qquad (5)
$$

und zwischen α und q der Zusammenhang besteht

$$q = \alpha(c + 2c_1), \qquad q(s + 2s_1) = \alpha. \qquad (6)$$

Ist der Körper keinen äußeren Kräften, sondern nur einer constanten Temperaturänderung ϑ ausgesetzt, so wird

$$x_x = y_y = z_z = \alpha\vartheta,$$

α ist also der lineäre, 3α der cubische thermische Dilatationscoefficient; es hat keine Schwierigkeit, denselben mit der Temperatur variirend zu denken.

Nach Formel (6) kann der Coefficient q des thermischen Druckes aus den Constanten α der thermischen Dilatation und dem Compressionsmodul $s_3 = s + 2s_1$ berechnet werden.

Die Bedeutung von q wird am anschaulichsten, wenn man die äußern Kräfte bestimmt, welche nöthig sind, um bei einer Temperaturänderung die Dimensionen des Körpers ungeändert zu er-

1) W. Voigt, Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, XXXVIII, p. 21 u. f. 1892. vervollständigt und zum Theil neu berechnet Wied. Ann. XLVIII, 1893.

halten. Dies geschieht nach (5) durch einen äußern normalen Druck p, dessen Größe ist:

$$p = \frac{\alpha \vartheta}{s + 2s_1} = q \vartheta.$$

$1/3(s + 2s_1) = K$ ist der „Compressionswiderstand", identisch mit der sonst wohl „Elasticitätsmodul" genannten Größe.

Fragt man nach dem Druck p' auf die Grundflächen, der erforderlich ist, um bei einem Cylinder die Länge trotz erlittener Temperaturänderung ungeändert zu erhalten, so findet man ähnlich:

$$p' = \frac{\alpha}{s} \vartheta = q' \vartheta.$$

$1/s = E$ ist der „Dehnungswiderstand", welcher sonst auch „Elasticitätscoefficient" genannt wird.

Beide Constanten q und q' haben ein practisches Interesse, da sie, wie man sagt, die Kraft messen, mit welcher ein beliebiger Körper sich nach allen Seiten oder ein Cylinder nach der Axe bei wachsender Temperatur auszudehnen strebt. Ihre Zahlenwerthe, nebst denen von K und E, giebt die folgende Tabelle, und zwar der Anschaulichkeit halber in Grammen als Kraft- und Millimetern als Längeneinheiten; zu Grunde gelegt ist der Werth von α für die Temperatur von 30°.

	$\alpha_{30}.10^{+6}$	$K.10^{-6}$	q	$E.10^{-6}$	q'
Al	23,06	4,83	334	6,57	151
Br[1]	17,75	8,94	476	10,6	188
Cd	24,7	?	?	7,7	174
Fe	11,58	7,90	275	12,8	148
Au	14,14	7,47	317	7,58	107
Cu	17,09	4,95	252	10,85	185
Mg	26,05	2,80	219	4,26	111
Me[2]	18,65	6,10	341	9,22	172
Ni	13,15	17,00	672	20,3	267
Ag	19,25	7,08	409	7,79	150
St[3]	11,47	14,6	502	20,4	234
Bi	13,67	2,50	102	3,19	44
Zn	25,1	10,1	760	10,3	259
Sn	22,2	?	?	5,41	120

1) Bronze. 2) Messing. 3) Stahl.

Zu dieser Tabelle ist zu bemerken, daß die Constante K nicht direct beobachtet ist, sondern sich aus den Resultaten der Biegungs und Drillungsversuche ziemlich ungenau bestimmt.

Da der Druck von einer Atmosphäre nahe 10 gr pro Quadratmillimeter beträgt, so kann man q und q' durch Division mit 10 sogleich angenähert auf Atmosphären reduciren.

Die erhaltenen Werthe von q und q' variiren in ziemlich weiten Grenzen; merkwürdig sind die extremen Stellen, die von Wismuth einerseits, von Zink andererseits eingenommen werden. Stahl liefert keineswegs die größten thermischen Drucke, sondern wird hierin, außer von Zink, auch von Nickel übertroffen.

Göttingen, Februar 1893.

Eine Inschrift des Dichters Gaṅgâdhara aus dem Jahre 1137 n. Chr.

Von

F. Kielhorn.

Vor mehreren Jahren erhielt ich aus Indien einen Papierabdruck einer Steininschrift, die sich damals im Hause eines gewissen Narsingh Mâlî in Govindpur, im Nawâdâ Bezirke des Gayâ Districts, befand. Ich sah, daß die Inschrift bekannt gemacht zu werden verdiente, versuchte jedoch nicht sogleich sie zu bearbeiten, weil der mir geschickte Abdruck sehr undeutlich war, und ich hoffen durfte, mit der Zeit einen besseren Abdruck zu erhalten. Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt; denn die Bemühungen der Herren Grierson und Macpherson haben nur constatieren können, daß der Stein, auf dem sich die Inschrift befindet, verschwunden ist. Es ist mir nun gelungen, die Inschrift bis auf wenige Worte, die für das Verständniß von keinem Belang sind, auch mit dem mangelhaften Abdrucke zu entziffern, und ich hoffe, Text und Uebersetzung in einer der nächsten Nummern der *Epigraphia Indica* zu veröffentlichen. Hier möchte ich nur kurz zeigen, daß die Inschrift auch für die indische Litteraturgeschichte von einigem Werthe ist.

Die Inschrift enthält auf einem Raume von etwa 52 × 39 cm 35 Zeilen Schrift, in dem im 11ten und 12ten Jahrhundert im östlichen Indien gebräuchlichen Alphabete, das uns aus Palmblatt-

handschriften und Kupferplatten hinlänglich bekannt ist. Sie besteht aus 39 künstlichen Saṃskṛit Versen und trägt in Worten und Ziffern das Datum Çaka 1059 = 1137—38 n. Chr. Ihr Inhalt ist folgender: —

Nachdem der Dichter in Vers 1 den Segen des Viçvambhara (Vishṇu) erfleht hat, preist er in V. 2 den Gott Aruṇa, der durch seine Nähe den Milch-ocean-umschlungenen Çâkadvîpa heiligt, wo die Brâhmanen den Namen Maga führen, und verherrlicht diese Magas selbst, die, aus dem Körper der Sonne hervorgegangen, von Çâmba nach Indien gebracht worden sind. Der erste der Maga Brâhmanen war der Seher Bhâradvâja (V. 3), von dem hundert fromme und gelehrte Familien abstammten (V. 4). In einer dieser Familien wurde im Laufe der Zeit einem gewissen Dâmodara ein Sohn Cakrapâṇi geboren, der als Dichter mit Vâlmîki verglichen wird (V. 5). Er hatte zwei Söhne, Manoratha und Daçaratha (V. 7). Beide wurden von Varṇamâna, dem Könige von Magadha, an seinen Hof berufen, wo der eine die Stelle eines *Pratihâra* erhielt, während der andere mit der Aufsicht über die Eunuchen betraut wurde (V. 11). Manoratha, dessen Freigebigkeit, Frömmmigkeit, Klugheit u. s. w. in sechs Versen (12—17) besungen werden, dem der König selbst den Namen Vyâsa beilegte, und den die Barden als einen neuen Kâlidâsa priesen, heirathete eine Tochter des Devaçarman, die ihm nach langer Kinderlosigkeit durch Çiva's Gnade zwei Söhne gebar, Gaṅgâdhara und Mahîdhara; und Daçaratha hatte ebenfalls zwei Söhne, Harihara und Purushottama (V. 21—22). Alle sechs, Manoratha und Daçaratha und ihre vier Söhne, waren ausgezeichnete Gelehrte und besonders vertraut mit den vedischen Schriften (V. 23). Der Rest der Inschrift handelt in dem gewöhnlichen Stile der *Praçastis* von Gaṅgâdhara. Er war ein Freund und Rathgeber des Königs Rudramâna (V. 27), heirathete Pâsaladevî, eine Tochter des Jayapâṇi, eines Günstlings des Königs von Gauḍa (V. 29); und, was uns mehr interessiert, er hatte ein Gedicht *Advaitaçata* verfaßt und sich auch sonst als Kunstdichter einen Namen gemacht (V. 33). Er selbst verfaßte auch dieses Gedicht (V. 38), in dem er uns mittheilt, daß er für das Seelenheil seiner Eltern einen Teich hatte ausgraben und ausmauern lassen (V. 35), an dessen Mauern oder in dessen Nähe der Stein, der die Inschrift trägt, befestigt gewesen sein muß.

Auf die Frage, welchen Werth diese Inschrift für die Geschichte Magadha's hat, will ich hier nicht eingehen. Ihr Werth für die Litteraturgeschichte liegt meines Erachtens darin, daß durch sie

die Zeit von mindestens zwei, wahrscheinlich aber sechs Dichtern, deren Namen uns bekannt und von denen einige Verse erhalten sind, bestimmt wird. Was den Verfasser Gaṅgâdhara und seine Verwandten betrifft, so berichtet die Inschrift ausdrücklich, daß Cakrapâṇi und Manoratha, Gaṅgâdhara's Großvater und sein Vater, wie Gaṅgâdhara selbst, Dichter waren; und wir dürfen gewiß annehmen, daß auch die anderen Verwandten, die alle als Gelehrte geschildert werden, gelegentlich Gedichte verfaßt haben. Nun enthält das *Saduktikarṇâmṛita*[1]), eine im Jahre 1205 von Çrîdharadâsa compilierte Anthologie, Verse von sechs Dichtern, die dieselben Namen tragen wie sechs der in dieser Inschrift genannten Maga Brâhmanen; und da diese Brâhmanen im östlichen Indien lebten und Çrîdharadâsa demselben Theile Indiens angehört und bei seiner Auswahl die Dichter des östlichen Indiens bevorzugt hat, so ist es in hohem Grade wahrscheinlich, daß jene sechs von ihm genannten Dichter mit Gaṅgâdhara, dem Verfasser unsrer Inschrift, und seinen Verwandten Dâmodara, Cakrapâṇi, Daçaratha, Mahîdhara und Purushottama identisch sind. Bei dieser Identification würden jene Dichter, da unsere Inschrift im Jahre 1137—38 n. Chr. verfaßt ist, annähernd in das Jahrhundert von etwa 1050 bis 1150 n. Chr. zu setzen sein, oder, im Einzelnen, Dâmodara um 1050—75, Cakrapâṇi um 1075—1100, Daçaratha um 1100—1125, und Gaṅgâdhara, Mahîdhara und Purushottama um 1125—50.

Die beiden Verse des Gaṅgâdhara, die das *Saduktikarṇâmṛita* enthält, sind schon von Prof. Aufrecht in der Zeitschrift d. D. M. G. XXXVI, 511 veröffentlicht worden. Prof. Aufrecht hat die Güte gehabt, mir auch die im *Saduktikarṇâmṛita* enthaltenen Verse der anderen fünf Dichter nach seinen Abschriften mitzutheilen, und hat mir gestattet, sie hier zu veröffentlichen. Es sind folgende: —

Dâmodara (zwei Verse).

1. Skm. IV, 161.

Kailâça re Paçupatisthitipâtramâtra-[2])
samrûḍhagarvam iha parvata saṃtyajâçu |
dṛishṭo 'si kiṃ na hi salîlasamutthitaika-
Paulastyahastakamalopari pushkarâbhaḥ ||

1) Siehe Râjendralâl Mitra's *Notices*, Vol. III, 134.

2) Die HS. A hat -*mâtrapâtra*-.

2. Skm. V, 236.

Çîlaṃ çâtayati çrutaṃ çamayati prajñâṃ nihanty âdarâd
dainyaṃ dîpayati kshamâṃ kshapayati vrîḍâm api vyasyati |
ceto jarjarayaty apâsyati dhṛitiṃ vistârayaty arthitâṃ
puṃsaḥ kshîṇadhanasya kiṃ na kurute vairî kuṭumbagrahaḥ ||

Cakrapâṇi (vier Verse).

1. Skm. I, 27.

Tasyâ nâma mayâ kathaṃ katham api bhrântyâ samuccâritaṃ
jânâsy eva mamâçayaṃ tava kṛite Gauri prasannâ bhava |
kshântiḥ svîkriyatâṃ dayâvati mayi krodhaḥ parityajyatâm
ity evaṃ bahu jalpataḥ Smararipoḥ premâñjaliḥ pâtu vaḥ ||

2. Skm. I, 219.

Yat kâṇḍaṃ gaganadrumasya yad api kshoṇîtaḍâgodare
devasyaiva yaçombuçobhini mahâyashṭiḥ pratishṭhâkarî |
tad Vishṇoḥ padam antarâlajaladher âdhâvato bhûtalât
pâraṃ dyâm upagantum udyatavatâṃ setûbhavat pâtu vaḥ ||

3. Skm. I, 269.

Arûḍhântarayauvanasya parito gopîr anubhrâmyatas
tat tat tâsu manogataṃ sunibhṛitaṃ svaṃ vyâcikîshor Hareḥ |
râgâd ucchalitâsphuṭâksharadaçâgarbhâs trapâgauravât
pratyañco vanitâ bhavantu bhavatâṃ hṛidyâya vâgûrmayaḥ ||

4. Skm. V, 12.

Agre vitatya caraṇau vinamayya kaṇṭham
utthâpya vaktram abhihatya muhuç ca vatsâḥ |
mâtrâ vivartitamukhaṃ sukhalihyamâna-[1])
paççârdhasusthamanasaḥ stanam utpibanti ||

Daçaratha (vier Verse).

1. Skm. IV, 31.

Âcchidya Lakshmîm ita eva pûrvam
atraiva viçrambhasukhaprasuptaḥ |
ekaḥ paraṃ veda sa Kaiṭabhârir
mahâçayatvaṃ Makarâlayasya ||

2. Skm. V, 54[2]).

Iyaṃ sâ Kâlindî kuvalayadalasnigdhamadhurâ
madândhavyâkûjattaralajalaraṅkupraṇayinî |

1) B hat *-lihyamânâḥ*, und A sec. m. *paçyârdha-*.

2) Derselbe Vers, nach Prof. Aufrecht, in Rûpagosvâmin's *Padyâvalî*, 339.

purâ yasyâs tîre sarabhasasatṛishṇaṃ Murabhido
gatâḥ prâyo gopînidhuvanavinodena divasâḥ ||

3. Skm. V, 336.

Naikaṃ janma tavaiva vatsa na paraṃ tulyâ ca karmasthitir
bhoktavyeshu sukheshu hṛishyasi mudhâ duḥkheshu kiṃ tâmyasi |
bhrâtaḥ sthairyam upaihi nanv iha bhavân saṃsâradîrghâdhvagaḥ
succhâyâs taravaḥ kvacin marubhuvaḥ kvâpi pracaṇḍâtapâḥ ||

4. Skm. V, 353.

Vandyo 'sau vidhir eva yasya jagato nirmâṇam atyujjvalaṃ
pratyâkâram apûrvavasturacanâvaicitryam atyadbhutam |
kiṃcâtyantam ito vicitram aparaṃ Çakrasya yadvâ krimer
trailokyodaravartikarmaphalayor [1]) dṛiggocarâkuñcikâ [2]) ||

Mahîdhara (ein Vers).

Skm. I, 252.

Lîlottânaçayo 'pi gopanivahair udgîyamâneshv ati-
prauḍhaprauḍhaMurârivikramakathâgîteshu dattaçravâḥ |
kasmiṃçcit kshubhitaḥ kuto 'pi calitaḥ kutrâpi româñcitaḥ
kvâpi prasphuritaḥ kuto 'pi hasitaprâpto [3]) Hariḥ pâtu vaḥ ||

Purushottama.

Çrîdharadâsa hat einen Vers von Purushottama, einen von Purushottamapâdâḥ, und sechs Verse von einem çrîmat-Purushottamadeva. Der erste Vers (Skm. III, 211) lautet:

Kântâreshu karâvalambiçiçavaḥ pâdaiḥ sravallohitair
arcantyaḥ padavîṃ vilocanajalair âvedayantyaḥ çucam |
dṛishṭâḥ pânthajanair nivṛitya sakṛipaṃ hâçabdagarbhair mukhair
yânty ahnâ sakalena yojanaturîyâṃçaṃ tavâristriyaḥ ||

Professor Aufrecht theilt mir außerdem mit, daß sich Skm. I, 278 die folgende Strophe findet, bei der die Handschrift A keinen Verfasser angiebt, während B *kasyacit* hat; und daß in Rûpagosvâmin's *Padyâvalî* dieselbe Strophe einem Cakrapâṇi zugeschrieben wird.

Kas tvaṃ bho niçi Keçavaḥ çirasijaiḥ kiṃ nâma garvâyase
bhadre Çaurir ahaṃ guṇaiḥ pitṛigataiḥ putrasya kiṃ syâd iha |
Cakrî candramukhi prayacchasi na me kuṇḍîṃ ghaṭîṃ dohanîm
itthaṃ gopavadhûjitottaratayâ duḥstho [4]) Hariḥ pâtu vaḥ ||

1) *Trailokyodara-* ist Prof. Aufrecht's Conjectur für *trailokyâdara-* der HSS.
2) B liest *kañcikâ*.
3) Die HSS. geben *hasitaḥ prâpto*; A erwähnt die Lesart *hasitopâtto*.
4) Die *Pâdyavalî* liest *hrîṇo*.

Universität.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1893, dem Geburtstage des Begründers der Preisstiftung, des Consistorialrathes Carl Gustav Beneke, ward in öffentlicher Sitzung der philosophischen Facultät das Ergebnis der Preisbewerbung für das Jahr 1893 verkündet.

Auf die im Jahre 1890 gestellte Preisaufgabe, die Bahnbewegung des Biela'schen Cometen einer das gesammmte Beobachtungs-Material umfassenden Bearbeitung zu unterwerfen, war rechtzeitig eine Bewerbungsschrift, ein sehr umfangreiches Bündel mit Rechnungen eingegangen, mit dem Motto: „Denn alles was entsteht, ist werth, daß es zu Grunde geht". Das Urtheil der Facultät über diese Arbeit lautet: Der Bewerber hat den Beweis geliefert, daß es seine Absicht war, den weitgehenden Forderungen der Preisaufgabe gerecht zu werden, es hat ihm aber offenbar die Zeit gefehlt, die Arbeit abzuschließen; und wenn auch der Umfang der von ihm eingelieferten Rechnungen ein sehr bedeutender ist, so hat man es zur Zeit doch nur mit einem Bruchstück zu thun. Die Fortsetzung der Untersuchung bis zu den in der Preisaufgabe gesteckten Grenzen ist nicht vorhanden und es läßt sich auch ein Resultat derselben nicht mittheilen, da ein den Gang der Untersuchung erläuternder Text gänzlich fehlt und der Inhalt nur durch kurze Ueberschriften der einzelnen Rechenhefte gekennzeichnet ist.

Die philosophische Facultät spricht ihr Interesse an der Fortsetzung und Beendigung dieser wichtigen Arbeit aus, ist aber zur Zeit nicht in der Lage, derselben einen der beiden ausgesetzten Preise zu ertheilen.

Für das Jahr 1896 stellt die Facultät die folgende Aufgabe:

„Die Elfenbeindiptycha nebst den gleichartigen Relieftäfelchen aus Elfenbein sollen in Hinsicht auf den in ihren Darstellungen enthaltenen Bestand bildlicher Ueberlieferung aus der Antike, unter besonderer Berücksichtigung der mythologischen und litterarhistorischen Stoffe und mit Heranziehung auch der verwandten älteren Handschriftenbilder, bearbeitet werden. Es bleibt dem Bearbeiter überlassen, ob und wie weit er in einzelnen Beispielen das Fortleben dieser bildlichen Motive abwärts verfolgen will".

Bewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache abzufassen und bis zum 31. August 1895, auf dem Titelblatte mit einem Motto versehen, an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außen-

seite das Motto der Abhandlung, innen Name, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an die die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 3400 Mark, der zweite 680 Mark.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1896, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Facultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für die die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1893 und 31. August 1894 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen im Jahrgange 1891, S. 126 und 1892, S. 132.

Göttingen den 12. März 1893.

Die philosophische Facultät.
Der Decan.
Weiland.

Petsche-Labarre'sche Preisstiftung.

Gemäß § 7 der Statuten der Petsche'schen Preisstiftung mache ich hierdurch bekannt, daß der im vorigen Jahre von der medicinischen Facultät ausgeschriebene Preis der einzigen eingelaufenen Arbeit mit dem Motto „Mehr Licht“, als deren Verfasser sich Herr stud. med. Carl Oberdieck ergeben hat, ertheilt worden ist.

Göttingen, den 1. März 1893. Der Decan der medicinischen Facultät.
Orth.

Die im vorigen Jahre von der philosophischen Facultät gestellte Aufgabe für den Preis der Petsche-Labarre-Stiftung: „Es sollen der Inhalt und die Absicht der beiden Dialoge Hippias untersucht werden, um festzustellen, in welchem Verhältniß beide zu einander stehen und ob beide oder einer von beiden von Platon verfaßt sein könne“ hat nur eine Bearbeitung gefunden mit dem Motto: *Τοιαῦτα τὰ ἡμέτερά ἐστιν, οὐχ οἷα βούλεταί τις ἀλλ' οἷα δύναται.* Die philosophische Facultät hat dieser Arbeit in ihrer Sitzung vom 2. März d. J. den Preis zuerkannt; als Verfasser ergab sich Herr stud. phil. Ernst Horneffer aus Treptow a. d. Rega.

Göttingen, den 3. März 1893.

Der Decan der philosophischen Facultät.
Weiland.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1892.

(Fortsetzung.)

Royal College of Physicians Edinburgh:
 Reports from the Laboratory. Vol. IV. Edinburgh and London 1892.
Catalogue of medical Publications by Y. J. Pentland. Edinburgh and London 1892.
Nature. Vol. 46. N. 1188—1200.
Geological Survey of India:
 Records. Vol. XXV. Part II. III. 1892. Calcutta 1892.
Royal Society of South Australia:
 Transactions. Vol. XV. Part I. Adelaide.
Royal Society of Victoria:
 Proceedings. Vol. IV. Part I. Melbourne 1892.
Department of Mines and Agriculture New South Wales:
 Annual Report for 1891. Sidney 1892.
The benefactors of the University of Toronto. Toronto 1892.
Geological Survey Department Ottawa, Canada:
 Annual Report (New Series. Vol. IV. 1888—89). Ottawa 1891.
Contributions to Canadian Micro-Palaeontology. Part IV. Ottawa 1892.
Ville de Paris. L'observatoire municipal de Monsouris:
 Annuaire pour les années 1892—1893. Paris 1892.
Société Mathématique de France:
 Bulletin. Tome XX. N. 4.
Extrait d'une lettre adressée a M. Hermite par M. Lipschitz. (Extrait du Bullet. des sciences mathém. 2 sér. XVI; Iuill. 1892).
Jornal Mathematicas e Astronomicas. Vol. XI. N. 1. Coimbra 1892.
Académie Royale de Belgique:
 Bulletin. N. 6—8. 62. année. 3. série, tome 24. Bruxelles 1892.
La Reale Accademia dei Lincei:
 a. Atti. Classe di scienze Morali storiche e filologische 1892. Serie quarta. Vol. X. Parte II. Notizie degli scavi Marzo al Maggio 1892.
 b. Atti. Cl. d. sc. m. st. e f. 1889. Serie quarta. Vol. VI. Memorie.
 c. Atti. Cl. d. sc. m. st. e f. 1890. Serie quarta. Vol. VII. Memorie.
 d. Atti. Cl. d. sc. m. st. e f. 1890. Serie quarta. Vol. VIII. Memorie.
 e. Atti della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. VI. Memorie 1889.
 f. Rendiconti. Classe di sc. morali, storiche e filologiche. Serie quinta. Vol. I. Fasc. 6—8.
 g. Rendiconti. Classe di sc. fisiche matematiche e naturali. Serie quinta. Vol. I. Fasc. 2—7. Roma 1890—92.
R. Accademia delle scienze di Torino:
 Atti. Vol. XXVII. Disp. 12a—15a. 1891—92. Torino.
Rassegna delle scienze geologiche in Italia:
 Anno II. 1. sem. 1892. Fasc. 1° e 2°. Roma 1892.
Circolo matematico di Palermo:
 Rendiconti. Tomo VI. Anno 1892. Fasc. III e IV. Palermo 1892.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
 Bollettino delle pubblicazioni Italiane 1892. N. 159—163. 164. Firenze 1892.
United States Coast and Geodetic Survey:
 Report 1890. Part 1 u. 2. Washington 1892.
The Geological and Natural History Survey of Minnesota. 19. annual report for 1890. Minneapolis 1892.

Pennsylvania Geological Survey 1891:
Atlas Southern Anthracite field. Part IV. B. V. VI. AA.
American Philosophical Society:
a. Transactions. Vol. XVII. New Series. Part I. II.
b. Proceedings. Vol. XXX. N. 138. Philadelphia 1892.
American Geographical Society:
Bulletin. Vol. XXIV. N. 3. Sept. 1892. New York.
Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters:
Transactions. Vol. VIII. 1888—1891. Madison. W. 1892.
Academy of Science of St. Louis:
Transactions. Vol. V. Nos. 3 a 4. 1888—91. Vol. VI. N. 1. St. Louis 1892.
Missouri Botanical Gardens:
Report 1892. St. Louis M. 1992.
American Academy of Arts and Sciences:
Memoriae of Joseph Sovering. Cambridge U. St. 1892.
Nova Scotian Institute of Science. Halifax:
Proceedings and Transactions. Session of 1890—91. Vol. 1. Part 1. Halifax N. S. 1891.
Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ost-Asiens in Tokio:
Mittheilungen. 49. Heft. (Band V. Seite 395—437). Yokohama. Berlin.
College of Science. Imperial University Japan.
Journal. Vol. V. Part II. Tōkijō 1892.

Nachträge.

ΑΘΗΝΑ, Tomo 4. Theil 1. 2. Athen 1892.
Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen:
a. Mittheilungen der deutschon mathematischen Gesellschaft in Prag. Prag, Wien. Leipzig 1892.
b. Geschichte der bildenden Kunst in Böhmen vom Tode Wenzels III. bis zu den Husitenkriegen. Band I.
c. 57 Lichtdrucktafeln dazu. Prag 1893.
Naturforschende Gesellschaft in Danzig:
a. Schriften. Neue Folge. 8ten Bandes 1tes und 2tes Heft.
b. Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens. 2. Jan. 1893. Danzig 1892.
Bataviaansch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIII. Afl. 1. Batavia 1889.
Mathematische Zeitschrift des Moskauer Mathematischen Vereins. Tomo XVI. Moscou 1892.
Technische Hochschule in Karlsruhe.
a. Festgabe zum 40jährigen Regierungsjubiläum des Grossherzogs Friedrich von Baden. K. 1892.
b. Die Freiheit des Willens. Festrede beim Rektoratswechsel v. Dr. Christ. Wiener. K. 1891.
c. Ueber das Zeichen. Festrede von Dr. Ernst Schröder. K. 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

12. April. № 6. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. März.

Liebisch, legt 1) einen Aufsatz des Herrn Dr. G. Bodländer in Clausthal vor: „Versuche über Suspensionen“.
2) einen eigenen „Ueber die Spectralanalyse der Interferenzfarben optisch zweiaxiger Krystalle.

O. Wallach: „Untersuchungen über neue Verbindungen der Campherreihe“.

Voigt legt vor: 1) „Die specifischen Wärmen c_p und c_v einiger quasi-isotroper Metalle“.
2) „Bestimmung der Elasticitätsconstanten von chlorsaurem Natron“.
3) „Bemerkung zu der Theorie der transversalen Schwingungen rechteckiger Platten“.

Weber: „Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiete der elliptischen Functionen, dritte Mittheilung“.

Kluckhohn: „Ueber das Project eines Bauernparlaments zu Heilbronn und den angeblichen Verfassungsentwurf Wendel Hiplers vom Jahre 1525“.

W. Meyer legt einen Aufsatz des Herrn Dr. O. Günther vor: „Zwei mittelalterliche Declamationen über Thomas Becket“.

Neue Beobachtungen über Verbindungen der Campherreihe.

Von

O. Wallach.

Daß der Campher und das mit ihm isomere Fenchon einen sehr ähnlichen atomistischen Bau besitzen müssen, habe ich bereits früher durch Untersuchungen gezeigt, die sich namentlich auch auf den Nachweis des analogen Verhaltens des Campheroxims und des

Fenchonoxims bezogen. Ueber die näheren Ursachen der vorliegenden Isomerie hatte sich aber noch kein bestimmter Aufschluß gewinnen lassen. Neue Beobachtungen haben nun die Frage, um die es sich handelt, ihrer Lösung erheblich näher gebracht.

Es ist bekannt, daß man den Campher durch Wasser entziehende Mittel ziemlich glatt in Cymol, also para-Methyl-Propylbenzol überführen kann. Die entsprechende Reaction ist jetzt für Fenchon ausgeführt worden.

Vermischt man je 20 Gr. Fenchon innig mit 60 Gr. Phosphorsäureanhydrid und erwärmt, so tritt bei 100° eine sehr lebhafte Reaction ein, wobei die Temperatur spontan um etwa 80° steigt. Nach Verlauf einer halben Stunde ist die Reaction beendet. Das Product wurde nach dem Erkalten mit Wasser versetzt und im Dampfstrom abdestillirt. Das übergehende Destillat bestand wesentlich aus einem Kohlenwasserstoff. Nach entsprechender Reinigung siedete dasselbe zwischen 175°—176°, das specif. Gewicht war bei 20° = 0,862, n_D = 1. 49222.

Bei der Analyse ergaben sich folgende Werthe.

Berechnet für $C_{10} H_{14}$	Gefunden	
C = 89.53	89.35	89.12
H = 10.47	10.70	10.63

Es unterliegt also gar keinem Zweifel, dass der Kohlenwasserstoff aus Fenchon die Zusammensetzung und auch die allgemeinen physicalischen Eigenschaften des Para-Cymols hat. Nichtsdestoweniger ist die Verbindung k e i n gewöhnliches Cymol.

Cymol giebt bei der Oxydation mit Kaliumpermanganat die bei 156° schmelzende p. Oxypropylbenzoësäure. Bei der Oxydation des vorliegenden Materials ergab sich Folgendes. 25 Gr. des Kohlenwasserstoffs wurden beim Durchschütteln mit einer Lösung von 100 Gr. Kaliumpermanganat in 3300 Gr. Wasser in 3½ Stunden vollkommen oxydirt. Neben Kohlensäure, Oxalsäure und einer sehr kleinen Menge Phtalsäure fand sich unter den Oxydationsproducten eine mit p. Oxy-Propylbenzoësäure i s o m e r e, bei 123°—124° schmelzende, mit Wasserdampf nicht flüchtige Säure:

Berechnet für $C_{10} H_{12} O_3$	Gefunden	
C — 66.66	66.76	66.16
H — 6.68	6.81	6.86

Ferner fand sich in kleinerer Menge eine schön krystallisirende, mit Wasserdämpfen flüchtige ungesättigte Säure vom Schmelzpunkt 99° und der Zusammensetzung $C_{10} H_{10} O_2$ und endlich eine Säure von den Eigenschaften der Isophtalsäure. Es wurde nun

die Oxydation mit Hülfe von Salpetersäure an Stelle des Permanganats durchgeführt.

Bei mehrtägigem Erwärmen mit verdünnter Salpetersäure bildeten sich aus dem Kohlenwasserstoff Krystalle einer mit Wasserdämpfen flüchtigen, bei 110—111° schmelzenden Säure von den Eigenschaften und der Zusammensetzung der Meta-Toluylsäure.

Diese Befunde genügen vollkommen, um klarzustellen, daß der aus Fenchon entstandene Kohlenwasserstoff ein Meta-Isopropyl-Methyl-Benzol $C_6H_4<\begin{matrix}CH(CH_3)_2 & (1)\\ CH_3 & (3)\end{matrix}$ ist. Da die Ausbeute an diesem Kohlenwasserstoff aus Fenchon mindestens ebenso reichlich ist, als die an Para-Isopropyl-Methylbenzol aus Campher erhältliche, in den wichtigsten Reactionen beide Verbindungen außerdem ein so ungemein ähnliches Verhalten zeigen, darf man nunmehr schließen, dass der Unterschied in der Constitution zwischen Campher und Fenchon lediglich darin zu suchen ist, daß die Kohlenwasserstoffradicale, welche der Campher in der Para-Stellung trägt, beim Fenchon in Meta-Stellung sich befinden. Von Interesse ist, daß Metacymol früher von Kelbe in der Harzessenz aufgefunden ist. Die Meta-Stellung von Kohlenwasserstoffradicalen in Verbindungen, welche den Terpenen nahe stehen, scheint sonach nicht vereinzelt vorzukommen und man wird dieser Thatsache bei weiteren Untersuchungen besonders Rechnung zu tragen haben.

Der Campher ist auf Grund von Betrachtungen, welche Kekulé zuerst angestellt hat, lange Zeit als eine Bihydrocarvol angesprochen worden. Die Berechtigung dieser Auffassung ist zwar durch neuere Untersuchungen sehr erheblich in Frage gestellt, wird aber doch von manchen Chemikern noch immer festgehalten. Es mußte daher erwünscht scheinen, vom Carvol ausgehend zu einem Bihydroderivat zu gelangen und dessen Eigenschaften kennen zu lernen. Diese Synthese einer mit Campher isomeren Substanz, welche als Bihydrocarvol aufgefaßt werden muß, ist mir nun im Verlauf einer gemeinsam mit Herrn Stud. Kerkhoff ausgeführten Arbeit gelungen.

Früher ist nachgewiesen worden, daß Carvol, $C_{10}H_{14}O$, bei der Reduction mit Hülfe von metallischem Natrium in alkoholischer Lösung direct in Bihydrocarveol, $C_{10}H_{17}OH$ übergeht. Dieser secundäre Alkohol läßt sich nun mit Hülfe geeigneter Oxydationsmittel in sein Keton $C_{10}H_{16}O$, d. h. in Bihydrocarvol überführen, das aber besser Bihydrocarvon zu nennen ist. Der Siedepunkt

des Bihydrocarvon liegt zwischen 221°—222°, das specif. Gew. ist (bei 19° = 0.928, n_D = 1.47 174 [gef. M = 45,84, ber. für $C_{10}H_{16}O_{F}$ = 45.79]. Bemerkenswerth ist vor allen Dingen, daß dies Keton sich ungemein leicht mit Natriumbisulfit zu einer krystallinischen Verbindung vereinigt, ein Verhalten, das es von dem Carvol ganz wesentlich unterscheidet. Der Geruch des Bihydrocarvon erinnert gleichzeitig an Kümmel und Pfeffermünz, steht also zwischen dem des Carvol $C_{10}H_{14}O$ und dem des Menthon $C_{10}H_{18}O$. Nicht die entfernteste Aehnlichkeit zeigt das neue Keton mit Campher. Es verhält sich vielmehr wie eine ungesättigte Verbindung, absorbirt Brom lebhaft und wird von Kaliumpermanganatlösung schon in der Kälte oxydirt.

Carvol ist bekanntlich optisch activ und man kennt das rechts- und linksdrehende Carvol. Beim Uebergang in Bihydrocarveol bleibt die optische Activität erhalten und zwar im Sinne des Ausgangsmaterials. Dagegen findet beim Uebergang von Bihydrocarveol in Bihydrocarvon ein Drehungswechsel statt. Bihydrocarvon aus Rechts-Carvol ist also linksdrehend und Bihydrocarvon aus Links-Carvol ist rechtsdrehend. Beide Präparate sind dargestellt und es ist constatirt worden, daß die krystallisirten Derivate des Bihydrocarvons verschiedener Drehungsrichtung sich zu racemischen Verbindungen vereinigen lassen, daß hier also wiederum ein neuer Fall von Verbindungen vorliegt, die in der Traubensäure und der Weinsäure vergleichbaren Modifikationen erhalten werden können.

Von krystallisirten Derivaten der Art sind die Oxime $C_{10}H_{16}$ (NOH) dargestellt worden.

Rechts- und Links-Bihydrocarvoxim schmelzen bei 88°—89°. Das inactive racemische Gemisch aus beiden bei 115°—116°.

Ein dem Bihydrocarvon ähnlicher Körper findet sich in den gegen 220° siedenden Antheilen des Thujaöls. Diese Fractionen liefern ein bei 93°—94° schmelzendes Oxim, aus dem bei der Zerlegung durch verdünnte Schwefelsäure ein stark nach Carvol riechendes Keton abgeschieden werden kann.

Das mit dem Campher isomere Thujon wird, wie ich früher gezeigt habe, durch Oxydation mit Kaliumpermanganat sehr leicht in zwei isomere Säuren $C_{10}H_{16}O_3$ übergeführt, welche ich als α- und β- Thujaketonsäure bezeichnete.

Die β-Thujaketonsäure zerfällt wie früher schon nachgewiesen war, bei der Destillation in Kohlensäure und ein ungesättigtes bei 185° siedendes Keton $C_9H_{16}O$. Für die jetzt in größerer

Menge dargestellte α-Thujaketonsäure hat sich derselbe Reactionsverlauf nachweisen lassen. Das aus dieser Säure gewonnene Keton unterscheidet sich nicht merklich von dem aus der β-Säure erhältlichen. Nur die Ausbeute ist ein wenig geringer.

Bei der Behandlung des Keton $C_9H_{16}O$ mit Wasser entziehenden Agentien und sogar schon beim Kochen desselben mit verdünnter Schwefelsäure entsteht ein Kohlenwasserstoff C_9H_{14}, der sich als Bihydropseudocumol erwiesen hat. Bei der Behandlung mit Brom ging er sehr glatt in Monobrompseudocumol vom Schmelzp. 72°, beim Nitriren in Nitropseudocumol vom Schmelzp. 182° über.

Der hydrirte Kohlenwasserstoff verharzt sehr leicht, die Ausbeute ist in Folge dessen nicht besonders befriedigend.

Reducirt man das Thujaketon in alkoholischer Lösung mit metallischem Natrium, so entsteht ein ungesättigter Alkohol $C_9H_{18}O$, derselbe siedet gegen 190°, das specif. Gewicht bei 21° ist = 0,8480, n_D = 1.4458. Daraus M = 44,64 [ber. für $C_9H_{18}O_{\not F}$ M = 44.65].

In Lösung addirt der Alkohol sehr leicht Brom und Bromwasserstoff, indem sich dabei specifisch schwere Bromide bilden. Sehr eigenthümlich ist das Verhalten gegen verdünnte Schwefelsäure. Beim Kochen damit verwandelt sich der Alkohol in eine isomere Verbindung von ganz anderen Eigenschaften.

Siedp. 149—151°, Spec. Gew. = 0,847, n_D = 1.42 693, M = 43.03 die Verbindung riecht pfeffermünzartig, entfärbt Brom nicht und ist augenscheinlich ein gesättigtes Oxyd.

Ganz analog wie das Keton aus den Thujaketonsäuren verhält sich das früher von mir aus Cineolsäureanhydrid erhaltene Keton $C_8H_{14}O$. Bei der Reduction entsteht aus diesem ein ungesättigter Alkohol $C_8H_{16}O$ vom Siedep. 174—176°, d = 0,85, n_D = 1.44889, M = 40.35 [ber. für $C_8H_{16}O_{\not F}$ = 40.21]. Schwefelsäure verwandelt den Alkohol glatt in ein Oxyd vom Siedepunkt 127—129°, d = 0,85, n_D = 1.4249, M = 38.49. Für $C_8H_{16}O$ berechnet sich M = 38.51.

Sehr characteristisch für das Thujon und gut geeignet die Verbindung zu identificiren, ist das durch Einwirkung von Brom darauf entstehende Product. Vermischt man mit einem trockenen Lösungsmittel (am besten Ligroïn) verdünntes Thujon mit dem dreifachen Gewicht Brom, so erfolgt eine ungemein heftige Reaction unter stürmischer Bromwasserstoffabspaltung. Nach dem Verdunsten des Lösungsmittels krystallisirt die neue Verbindung aus. Man wäscht sie mit Alkohol und krystallisirt aus Essigäther um.

Es entstehen dabei sehr gut ausgebildete monokline Krystalle, deren Analyse die Zusammensetzung eines Tribromthujon ergab. Das Bromid ist sehr unbeständig. Die anfangs wasserhellen, glasglänzenden Krystalle werden nach einigen Tagen braun. Auf ihren Schmelzpunkt (121—122°) erhitzt zersetzen sie sich unter Gasentwickelung. Ebenso wirkt alkoholisches Alkali beim Erwärmen zersetzend.

Ganz anders wirkt Brom bei Gegenwart von Alkali auf Thujon.

Läßt man in alkalischer Lösung Brom auf Thujon einwirken, so entsteht eine prachtvoll krystallisirende, bei 146°—147° schmelzende Säure von der Zusammensetzung der Camphersäure. Diese Säure ist keine Ketonsäure, sondern eine Bicarbonsäure. Beim trockenen Erhitzen unter gewöhnlichem Druck zersetzt sie sich theilweise, unter Bildung eines Phoron artig riechenden Oels.

Zu sehr bemerkenswerthen Ergebnissen haben neue Oxydationsversuche in der Terpenreihe geführt.

Terpineol liefert bei gemäßigter Oxydation mit Kaliumpermanganat so gut wie quantitativ eine Verbindung $C_{10}H_{20}O_3$. Diese Verbindung ist in Wasser leicht löslich, schmilzt bei 121—122°, siedet über 300° ohne wesentliche Zersetzung und muß als dreiatomiger Alkohol aufgefaßt werden. Bei der Oxydation mit Chromsäure entsteht daraus eine neue prachtvoll krystallisirte Verbindung der Formel $C_{10}H_{16}O_3$, dem Schmelzpunkt 62—63° und noch höherem Siedepunct als die vorige. Die Verbindung ist vermuthlich das zu der erst beschriebenen zugehörige Keton. Sie ist in Wasser schwerer löslich, löst sich aber leichter in Chloroform. Beide Verbindungen liefern, in alkalischer Lösung mit Brom behandelt, große Mengen von Bromkohlenstoff CBr_4.

Bei der Oxydation des Carvols wurden zwei Verbindungen erhalten. Eine neutrale bei 129° schmelzende Substanz, welcher die Zusammensetzung $C_{10}H_{12}O_5$ zuzukommen scheint und eine bei 185° schmelzende Säure. Beide Körper liefern in alkalischer Lösung mit Brom versetzt Bromkohlenstoff. Aehnliche Producte entstehen aus Limonen und auch aus Carvacrol. Die erwähnte Reaction kann für die Darstellung des bis jetzt ziemlich schwer zugänglichen Bromkohlenstoffs verwerthet werden.

Die specifischen Wärmen c_p und c_v einiger quasi-isotroper Metalle.

Von

W. Voigt.

Die im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen bilden die Fortsetzung der früher veröffentlichten Untersuchungen[1], welche den Zweck haben, für gewisse leidlich gut definirte Substanzen eine möglichst große Zahl physikalischer Constanten zu gewinnen. —

Die specifischen Wärmen wurden nach der Mischungsmethode bestimmt. Das aus dünnem Kupferblech gefertigte Calorimeter war an gespannten Seidenfäden aufgehängt und mit einem Kupfermantel umgeben, um den Wärmeaustausch mit der Umgebung möglichst zu verringern; ein kleiner Turbinenrührer erhielt die Calorimeterflüssigkeit in lebhafter Circulation. In Folge dessen geschah der Ausgleich der Temperatur zwischen dem eingeworfenen Körper und der Flüssigkeit außerordentlich schnell und fast ohne Nebenverlust, und dieser Umstand dispensirte von der Anwendung der strengen Theorie, die man Herrn F. Neumann[2]) verdankt. Es genügte vollständig das folgende angenäherte Verfahren.

Die Anfangstemperatur der Calorimeterflüssigkeit wurde ein wenig unterhalb der Temperatur des Beobachtungsraumes gebracht, so daß nach Einführung des untersuchten Körpers die Temperatur des Calorimeters ein Maximum etwas oberhalb der Temperatur der Umgebung erreichte und dann allmählich fiel.

Das Maximum würde etwas höher gewesen sein, wenn gar keine Wärmeabgabe an die Umgebung stattgefnnden hätte; es war also wegen dieses Umstandes zu corrigiren, durch Zufügung desjenigen Temperaturfalles, welchen das Calorimeter erlitten haben würde, wenn man es die Zeit hindurch, welche die Erreichung des Maximums erforderte, bei dem arithmetischen Mittel derjenigen Temperaturen, die es wirklich in jener Periode besaß, der Ausstrahlung überlassen hätte.

Diese Correction bestimmte sich folgendermaßen.

---

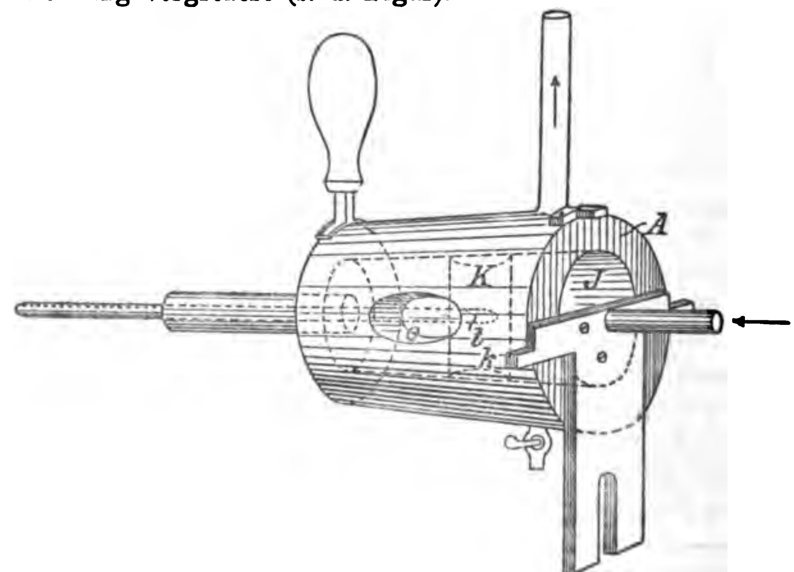
1) W. Voigt, Abh. der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen XXXVIII, 1892, Gött. Nachr. No. 5, 1893, Wied. Ann. XLIX 1893.

2) s. Pape, Pogg. Ann, Bd. CXX, 337, 1863.

Direct beobachtet wurde der Temperaturfall τ des Calorimeters pro Minute vor Einführung des untersuchten Körpers und τ' längere Zeit nach Erreichung des Maximums, wo dann das Gefälle wieder constant war; außerdem die ungefähre Zeit T, die von der Einführung bis zur Erreichung des Maximums verfloß. Die beiden Temperaturfälle (der erste negativ und meist fast verschwindend, der zweite positiv) betrugen stets nur wenige Hundertel Grad, die Zeit T bis zur Erreichung des Maximums meist nahe eine Minute.

Durch besondere Messungen, bei denen die Temperatur von Viertelminute zu Viertelminute abgelesen wurde, ließ sich constatiren, daß die mittlere Temperatur des Calorimeters während der Periode des Ausgleichs nahe $= \frac{1}{4}(3\vartheta' + \vartheta)$ betrug, falls ϑ die Anfangs-, ϑ' die Maximaltemperatur bezeichnet. Hiernach betrug also, falls T genau eine Minute war, die anzubringende Correction $\frac{1}{4}(3\tau' + \tau)$, und war im andern Falle nur im Verhältniß des geänderten T zu verkleinern oder zu vergrößern. Ich habe mich überzeugt, daß dies Verfahren innerhalb der Grenze der directen Beobachtungsfehler ($0{,}005^0 - 0{,}01^0$) mit dem Resultat der Theorie übereinstimmt.

Die Vorwärmung des untersuchten Körpers geschah in dem bekannten Neumann'schen „Hahn“, der indeß eine nicht unwichtige Abänderung erlitten hatte, welche die Bequemlichkeit seiner Anwendung vergrößert (s. d. Figur).



Es stand nämlich der innere Theil (I), das sogenannte „Hahnküken“ fest, der äußere, der Mantel (A), wurde ge-

dreht; die Oeffnung (die „Kammer“ K), welche den Körper aufnahm, durchsetzte den inneren Theil vollständig, von oben bis unten, und hierdurch war erreicht, daß man die Neufüllung des Apparates vornehmen konnte, ohne ihn vom Gestell zu nehmen und umzukehren; die ursprüngliche Neumann'sche Anordnung gestattete dies nicht.

Um die in der Kammer befindlichen Körper nicht mit dem Schmiermittel, welches sich zwischen den beiden Theilen des Hahnes befand, in Berührung kommen zu lassen, war die Kammer nach unten durch eine leichte, fallthürartige Klappe k geschlossen, die sich von selbst öffnete, wenn durch Drehung des Mantels dessen Oeffnung (O) unter die Klappe gelangte, und sich von selbst schloß, wenn man den Mantel zurückbewegte.

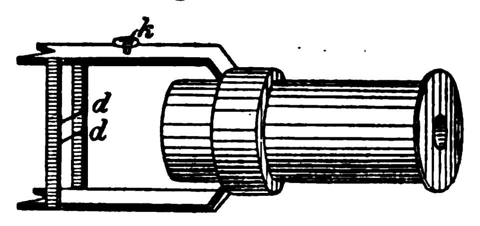
Das in der Kammer befindliche Thermometergefäß t war meist ganz von den eingeführten Metallstücken umgeben, gab also deren Temperatur ziemlich genau an. Um einen etwaigen Fehler zu verringern, wurden die Metallstücke in einem Luftbade vorgewärmt und bald auf höherer, bald auf niedrigerer Temperatur, als dem jeweiligen Siedepunkte des Wassers, in die Kammer eingeführt. Ein Einfluß dieses Umstandes auf die Beobachtungsresultate hat sich nicht constatiren lassen; man kann also ziemlich sicher sein, daß die Temperatur der erhitzten Körper richtig bestimmt ist.

Ließ man die Metallstücke aus der Kammer in das Calorimeter fallen, so spritzte meist ein nicht bestimmbares Quantum der Flüssigkeit heraus. Dieser Uebelstand wurde beseitigt durch Aufstellung eines flachen, unten mit Drahtgaze geschlossenen Körbchen innerhalb des Calorimeters, das oberflächlich in die Flüssigkeit tauchte, um deren Temperatur wirklich anzunehmen, und, sowie die Metallstücke hineingefallen waren, durch eine einfache Vorrichtung zum Untersinken gebracht werden konnte. In der halben Höhe des Calorimeters wurde das Körbchen durch einen Widerhalt aufgefangen, und nun durch den Turbinenrührer der Flüssigkeitsstrom von unten nach oben durch die Zwischenräume zwischen den Metallstücken hindurchgetrieben. Etwas tiefer befand sich das Gefäß des Thermometers, welches bei dieser Einrichtung nur von der Flüssigkeit bespült wurde, die von den heißen Metallstücken aus den Weg nach oben und dann durch das Turbinenrohr hinab zurückgelegt hatte. Auf diese Weise gab das Thermometer sehr nahe die mittlere Temperatur der Calorimeterflüssigkeit an; dies hätte nicht stattgefunden, wenn der Flüssigkeitsstrom von den Metallstücken direct abwärts zu dem nur wenig tieferen Thermometer gegangen wäre. In der That zeigte das

Thermometer bei der letzteren Anordnung einen ganz unregelmäßigen Verlauf, zuerst ein Emporschießen bis weit über die Mischungstemperatur und dann ein ungleichförmiges Fallen, — bei der ersteren Anordnung verhielt es sich ganz der Theorie gemäß.

Einige Versuche, bei denen das Calorimeter in derselben Weise, wie zum Auffangen der erhitzten Körper, unter den Hahn geschoben, der Hahn aber nicht geöffnet wurde, ergaben, daß während des kaum eine Secunde dauernden Aufenthaltes des Calorimeters unterhalb des erhitzten Hahnes keine sicher nachweisbare Erwärmung des ersteren durch Strahlung stattfand.

Bei Aufzählung der kleinen Kunstgriffe, durch welche die Genauigkeit und Bequemlichkeit der Beobachtung gefördert wurde[1]), will ich die Loupe nicht übergehen, die zur Ablesung der Thermometer diente; sie ist in dieser Anordnung schon viele Jahre in dem Laboratorium in Königsberg und Göttingen im Gebrauch, aber, wie ich mich überzeugt habe, sonst sehr wenig bekannt. Ihr Zweck ist, die Parallelaxe vollständig zu vermeiden; die dazu getroffene Einrichtung giebt die Figur. Der Meniskus des Quecksilberfadens wird in die Mitte zwischen die beiden Drähte *dd* gebracht, das Knöpfchen *k* jederzeit demselben Ende (z. B. dem Gefäß des Thermometers zugewandt.



Das im Calorimeter befindliche Thermometer war in 1/10 Grad getheilt und gestattete die Schätzung von 0,005°; es war durch sorgfältige Vergleichung mit einem in der physikalischen Reichsanstalt geprüften berichtigt. Das Thermometer, welches zur Bestimmung der Temperatur der erhitzten Körper im Hahn diente, war nur in Grade getheilt, und gestattete die Schätzung von 0,05°: seine Angabe wurde durch mehrmalige Vergleichung mit dem aus dem Barometerstande berechneten Siedepunkt corrigirt.

Die untersuchten Metalle sind dieselben, über deren Herkunft und Reinheit in einer früheren Arbeit[2]) berichtet ist; aus den den

1) Ein Theil derselben ist schon bei den von Herrn Sella im hiesigen physikalischen Institut angestellten Beobachtungen zur Anwendung gekommen (s. diese Nachr. 1891, p. 311).

2) W. Voigt, Gött. Abh. XXXVIII, 1892; Wied. Ann. XLIX 1893.

früher benutzten unmittelbar benachbarten Partien der Gußstücke wurden kleine, nahezu würfelförmige Stücke von ca. $(7\ \text{mm})^3$ Inhalt ausgeschnitten und die Kanten mit der Feile leicht gerundet.

In den folgenden Beobachtungstafeln bezeichnet m die Masse des untersuchten Körpers, M den Wasserwerth des gefüllten Calorimeters mit Rührer, Körbchen und Thermometer. ϑ ist die Anfangstemtemperatur des Calorimeters, Θ der erhitzten Körper, ϑ' die bereits corrigirte Mischungstemperatur; aus diesen Zahlen ist nach der Formel

$$mc(\vartheta' - \vartheta) = MC(\Theta - \vartheta')$$

c berechnet. Wegen der noch immer vorhandenen Unsicherheit über den Werth der specifischen Wärme des Wassers habe ich c durch deren mittleren Werth bei der Temperatur $(\vartheta + \vartheta')/2$ ausgedrückt. Die gefundenen Resultate besitzen eine Sicherheit von wenigen pro mille.

Aluminium.

$m = 25{,}05$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 16{,}710$, $\Theta = 99{,}60$, $\vartheta' = 20{,}040$, $c = 0{,}2132 . C$
$m = 25{,}05$, $M = 111{,}8$, $\vartheta = 16{,}405$, $\Theta = 99{,}35$, $\vartheta' = 20{,}205$, $c = 0{,}2143 . C$
$m = 16{,}40$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 17{,}990$, $\Theta = 99{,}60$, $\vartheta' = 20{,}190$, $c = 0{,}2156 . C$
$m = 24{,}24$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 16{,}235$, $\Theta = 99{,}65$, $\vartheta' = 19{,}505$, $c = 0{,}2148 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0{,}2145 \pm 0{,}0003) . C_{18{,}4}$.

Bronze.

$m = 69{,}67$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 18{,}250$, $\Theta = 99{,}50$, $\vartheta' = 21{,}940$, $c = 0{,}0871 . C$
$m = 55{,}25$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 15{,}750$, $\Theta = 99{,}50$, $\vartheta' = 18{,}815$, $c = 0{,}0877 . C$
$m = 69{,}67$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 15{,}265$, $\Theta = 99{,}60$, $\vartheta' = 19{,}100$, $c = 0{,}0873 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0{,}08737 \pm 0{,}00012) . C_{18{,}2}$.

Cadmium.

$m = 58{,}68$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 17{,}095$, $\Theta = 98{,}80$, $\vartheta' = 19{,}095$, $c = 0{,}0546 . C$
$m = 58{,}68$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 15{,}970$, $\Theta = 98{,}80$, $\vartheta' = 18{,}020$, $c = 0{,}0552 . C$
$m = 58{,}68$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 15{,}335$, $\Theta = 99{,}20$, $\vartheta' = 17{,}400$, $c = 0{,}0549 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0{,}0549 \pm 0{,}0001) . C_{17{,}1}$.

Eisen.

$m = 55{,}04$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 18{,}440$, $\Theta = 98{,}80$, $\vartheta' = 22{,}265$, $c = 0{,}1159 . C$
$m = 55{,}04$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 17{,}165$, $\Theta = 98{,}80$, $\vartheta' = 21{,}070$, $c = 0{,}1165 . C$
$m = 55{,}04$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 16{,}570$, $\Theta = 98{,}90$, $\vartheta' = 20{,}470$, $c = 0{,}1153 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0{,}1159 \pm 0{,}0002) . C_{19{,}3}$.

Gold.

$m = 22{,}75$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 15{,}710$, $\Theta = 99{,}15$, $\vartheta' = 16{,}150$, $c = 0{,}0297 . C$
$m = 36{,}36$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 17{,}185$, $\Theta = 99{,}15$, $\vartheta' = 17{,}880$, $c = 0{,}0300 . C$
$m = 36{,}36$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 18{,}165$, $\Theta = 98{,}80$, $\vartheta' = 18{,}865$, $c = 0{,}0307 . C$
$m = 36{,}36$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 17{,}990$, $\Theta = 98{,}80$, $\vartheta' = 18{,}690$, $c = 0{,}0307 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0{,}0303 \pm 0{,}0002) . C_{17{,}4}$.

Kupfer.

$m = 98,40$, $M = 111,52$, $\vartheta = 14,380$, $\Theta = 99,10$, $\vartheta' = 20,730$, $c = 0,0918 . C$
$m = 101,92$, $M = 111,52$, $\vartheta = 15,585$, $\Theta = 99,40$, $\vartheta' = 22,075$, $c = 0,0918 . C$
$m = 90,25$, $M = 136,50$, $\vartheta = 16,040$, $\Theta = 99,25$, $\vartheta' = 20,850$, $c = 0,0928 . C$
$m = 92,52$, $M = 111,52$, $\vartheta = 16,050$, $\Theta = 99,40$, $\vartheta' = 22,005$, $c = 0,0928 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,0923 \pm 0,0002) . C_{18,7}$.

Magnesium.

$m = 10,84$, $M = 127,6$, $\vartheta = 17,885$, $\Theta = 99,45$, $\vartheta' = 19,570$, $c = 0,248 . C$
$m = 10,84$, $M = 127,6$, $\vartheta = 13,920$, $\Theta = 99,25$, $\vartheta' = 15,695$, $c = 0,250 . C$
$m = 10,84$, $M = 127,6$, $\vartheta = 15,905$, $\Theta = 99,25$, $\vartheta' = 17,585$, $c = 0,242 . C$
$m = 10,84$, $M = 127,6$, $\vartheta = 17,625$, $\Theta = 99,30$, $\vartheta' = 19,285$, $c = 0,246 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,246 \pm 0,001) . C_{17,2}$.

Messing.

$m = 72,93$, $M = 127,6$, $\vartheta = 16,200$, $\Theta = 99,50$, $\vartheta' = 20,370$, $c = 0,0922 . C$
$m = 72,93$, $M = 127,6$, $\vartheta = 16,555$, $\Theta = 99,50$, $\vartheta' = 20,675$, $c = 0,0915 . C$
$m = 72,93$, $M = 127,6$, $\vartheta = 15,865$, $\Theta = 99,60$, $\vartheta' = 20,020$, $c = 0,0914 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,0917 \pm 0,0002) . C_{18,2}$.

Nickel.

$m = 56,57$, $M = 111,52$, $\vartheta = 15,355$, $\Theta = 99,35$, $\vartheta' = 19,710$, $c = 0,1078 . C$
$m = 56,57$, $M = 136,5$, $\vartheta = 16,895$, $\Theta = 99,25$, $\vartheta' = 20,450$, $c = 0,1089 . C$
$m = 53,38$, $M = 127,6$, $\vartheta = 18,255$, $\Theta = 99,60$, $\vartheta' = 21,785$, $c = 0,1085 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,1084 \pm 0,0002) . C_{18,7}$.

Stahl ($LS84R$).

$m = 50,75$, $M = 127,6$, $\vartheta = 17,730$, $\Theta = 98,90$, $\vartheta' = 21,240$, $c = 0,1137 . C$
$m = 46,35$, $M = 127,6$, $\vartheta = 16,710$, $\Theta = 98,80$, $\vartheta' = 19,975$, $c = 0,1140 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,1138 \pm 0,0001) . C_{18,9}$.

Stahl ($LS84E$).

$m = 48,68$, $M = 127,6$, $\vartheta = 18,070$, $\Theta = 99,50$, $\vartheta' = 21,420$, $c = 0,1125 . C$
$m = 48,68$, $M = 127,6$, $\vartheta = 16,220$, $\Theta = 99,50$, $\vartheta' = 19,655$, $c = 0,1128 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,1126 \pm 0,0001) . C_{18,8}$).

Wismuth.

$m = 55,50$, $M = 127,6$, $\vartheta = 13,825$, $\Theta = 99,05$, $\vartheta' = 14,950$, $c = 0,0308 . C$
$m = 55,50$, $M = 127,6$, $\vartheta = 16,490$, $\Theta = 99,15$, $\vartheta' = 17,550$, $c = 0,0299 . C$
$m = 55,50$, $M = 127,6$, $\vartheta = 17,790$, $\Theta = 99,10$, $\vartheta' = 18,840$, $c = 0,0301 . C$
$m = 55,50$, $M = 127,6$, $\vartheta = 16,300$, $\Theta = 99,30$, $\vartheta' = 17,400$, $c = 0,0309 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,0304 \pm 0,0002) . C_{16,6}$.

Zink.

$m = 44,06$, $M = 127,1$, $\vartheta = 15,250$, $\Theta = 99,30$, $\vartheta' = 17,835$, $c = 0,0915_2 . C$
$m = 44,06$, $M = 127,6$, $\vartheta = 16,120$, $\Theta = 99,30$, $\vartheta' = 18,665$, $c = 0,0914_1 . C$
$m = 44,06$, $M = 127,6$, $\vartheta = 28,005$, $\Theta = 99,30$, $\vartheta' = 20,505$, $c = 0,0918_7 . C$

Mittelwerth: $c_p = (0,09160 \pm 0,00009) . C_{17,7}$.

Zinn.

$m = 51{,}47$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 16{,}115$, $\Theta = 99{,}30$, $\vartheta' = 17{,}925$, $c = 0{,}0551_7 . C$
$m = 51{,}47$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 17{,}290$, $\Theta = 99{,}30$, $\vartheta' = 19{,}075$, $c = 0{,}0551_7 . C$
$m = 51{,}47$, $M = 127{,}6$, $\vartheta = 17{,}650$, $\Theta = 99{,}30$, $\vartheta' = 19{,}420$, $c = 0{,}0551_1 . C$
Mittelwerth: $c_p = (0{,}05515 \pm 0{,}00001) . C_{17{,}9}$.

Die im Vorstehenden gewonnenen Werthe von c_p können nun in Verbindung mit anderen schon früher bestimmten Constanten derselben Metalle zu einigen wichtigen Folgerungen dienen.

Bezeichnet man nämlich die Dichte durch ε, die specifische Wärme bei constantem Volumen durch c_v, den Coefficienten der linearen thermischen Dilatation mit α, denjenigen des thermischen Druckes (in absolutem Maaße ausgedrückt) mit ϱ und versteht unter A das mechanische Wärmeaequivalent, unter τ die absolute Temperatur, so gilt

$$c_v = c_p - \frac{3\varrho\alpha\tau}{A\varepsilon} \tag{1}$$

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{1}{1 - \frac{3\varrho\alpha\tau}{A\varepsilon c_p}} = 1 + \frac{3\varrho\alpha\tau}{A\varepsilon c_p}; \tag{2}$$

der letzte Werth ist nur ein angenäherter, der aber in unserem Falle unbedenklich zu benutzen ist.

Weiter hat noch ein Interesse der Coefficient der Temperaturänderung, welche bei adiabatischer Spannung oder Deformation auftritt.

Bezeichnet man nämlich die erregten Gesammtspannungen mit $\Xi_x \ldots \Xi_y$, die hervorgebrachten Deformationsgrößen mit $x_x \ldots x_y$, so gilt für diese Temperaturänderung

$$\vartheta = \frac{\alpha\tau}{A\varepsilon c_p}(\Xi_x + H_y + Z_z) = \mu(\Xi_x + H_y + Z_z) \tag{3}$$

$$\vartheta = \frac{\varrho\tau}{A\varepsilon c_v}(x_x + y_y + z_z) = -\nu(x_x + y_y + z_z). \tag{4}$$

Ferner finden sich die adiabatischen Elasticitätsconstanten γ und Elasticitätsmoduln σ aus den früher bestimmten isothermischen c resp. s nach den Formeln:

$$\gamma = c + \frac{\varrho^2\tau}{A\varepsilon c_v}, \quad \gamma_1 = c_1 + \frac{\varrho^2\tau}{A\varepsilon c_v}, \quad \gamma_2 = c_2, \tag{5}$$

$$\sigma = s - \frac{\alpha^2\tau}{A\varepsilon c_p}, \quad \sigma_1 = s_1 - \frac{\alpha^2\tau}{A\varepsilon c_p}, \quad \sigma_2 = s_2; \tag{6}$$

der Unterschied zwischen c_p und c_v ist in ihnen zu ignoriren.

Hieraus folgen endlich die Werthe der Geschwindigkeit für die Fortpflanzung longitudinaler und transversaler Wellen

$$(7) \qquad \omega_l = \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}, \quad \omega_r = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\varepsilon}}.$$

Die Formeln (1) bis (6) enthalten sämmtlich das mechanische Wärmeäquivalent A mit c_p oder c_v, also nach Einsetzen der oben gefundenen Werthe mit C multiplicirt; in Folge dessen werden die durch sie gegebenen Folgerungen zum größten Theil von der Unsicherheit der specifischen Wärme C des Wassers nicht berührt. Denn die von Herrn Rowland[1]) angestellten Beobachtungen zur Bestimmung von A liefern direct das Product $A\,C$ für verschiedene Temperaturen; die mittlere Wasser-Temperatur, auf welche sich die vorstehenden Messungen beziehen, ist etwa 18°, man kann für ihre weitere Verwendung nach jenen Beobachtungen rund

$$A\,C = 418.10^{5}$$

setzen.

Die Dichten ε sind für die zu machenden Anwendungen an Stücken der benutzten Metalle zum Theil von Herrn Dr. Drude, zum Theil von mir besonders bestimmt; ihre Sicherheit beträgt einen kleinen Bruchtheil eines pro mille.

Die Werthe von α und ϱ sind der vorigen Arbeit[2]) entnommen, nur ist ϱ von dem dort angegebenen q durch Beziehung auf absolute Einheiten unterschieden.

	ε	$\alpha.10^{+6}$	$\varrho.10^{-6}$	c_p/C_{18}	c_v/C_{18}	$\varkappa$	$\mu.10^{+12}$	ν
Al	2,676	23,06	32,9	0,2145	0,2084	1,0295	291	413
Br[3])	8,731	17,75	46,8	0,0874	0,0853	1,0237	169	445
Cd	8,665	24,7	?	0,0549	?	?	377	?
Fe	7,188	11,61	27,0	0,1159	0,1150	1,0081	101	235
Au	19,28	14,14	31,1	0,0303	0,0298	1,0162	176	384
Cu	8,860	17,09	24,8	0,0923	0,0918	1,0114	152	221
Mg	1,741	26,05	21,5	0,246	0,239	1,0285	442	364
Me[3])	8,438	18,65	33,3	0,0917	0,0901	1,0177	175	313
Ni	8,795	13,15	66,0	0,1084	0,1063	1,0198	100	502
Ag	10,493	19,25	40,1	(0,0559)	0,0543	1,0288	238	496
StR[3])	7,822	11,47	49,0	0,1138	0,1122	1,0138	93,5	401
Bi	10,05	13,67	10,0	0,0304	0,0301	1,0098	325	239
Zn	7,212	25,1	74,5	0,0916	0,0860	1,063	276	817
Su	7,328	22,2	?	0,05515	?	?	398	?

1) Rowland, Proc. Amer. Acad. (2) VII, 75, 1880.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1893, p. 177.

3) Br bedeutet Bronze, Me Messing, St Stahl.

Zu dieser Zusammenstellung ist zu bemerken, daß Cadmium und Zinn eine einigermaßen zuverlässige Bestimmung von ϱ nicht gestatteten und daher bei Berechnung derjenigen Constanten, welche dessen Kenntniß voraussetzten, ausfallen mußten. Für das von mir benutzte Silber konnte ich c_p nicht bestimmen, weil der von der Herstellung der früher beobachteten Stäbe übrige Rest des Gusses bereits zurückgegeben war, die Stäbe aber für andere Untersuchungen erhalten bleiben sollten. Der oben eingesetzte Werth ist von Bunsen[1]) gegeben.

Für die zweite Tabelle sind die Werthe der Elasticitätsmodulen s, s_2 und der Elasticitätsconstanten c, c_2 an denselben Metallen früher bestimmt[2]); $c_1 = c - 2c_2$ und $s_1 = s - \frac{1}{2}s_2$ sind aus ihnen sofort zu bilden.

Die Unterschiede der adiabatischen und der isothermischen Module und Constanten sind nur sehr klein, meist unterhalb der Grenze der noch angebbaren Genauigkeit derselben liegend. Darum konnten die Geschwindigkeiten ω_λ und ω_τ auch unbedenklich mit den isothermischen statt mit den adiabatischen Constanten berechnet werden.

	$s.10^{+12}$	$s_2.10^{+12}$	$(s-\sigma).10^{+15}$	$c.10^{-12}$	$c_2.10^{-12}$	$(\gamma-c).10^{-9}$	$\omega_\lambda.10^{-5}$	$\omega_\tau.10^{-5}$
Al	1,55	3,95	6,72	0,811	0,252	13,5	5,50	3,07
Br	0,963	2,51	3,00	1,41	0,40	20,8	4,02	2,14
Cd	1,44	4,16	9,30	2,33	0,24	?	5,19	1,66
Fe	0,795	1,955	1,18	1,46	0,51	6,4	4,51	2,66
Au	1,345	3,58	2,48	1,11	0,280	11,9	2,40	1,20
Cu	0,940	2,132	2,59	1,11	0,468	5,5	3,53	2,30
Mg	2,39	5,96	11,5	0,498	0,167	7,8	5,35	3,10
Me	1,11	2,76	3,26	1,08	0,36	10,5	3,58	2,07
Ni	0,501	1,30	1,32	2,69	0,76	32,9	5,53	2,94
Ag	1,31	3,44	4,58	1,08	0,29	20,0	3,21	1,66
StR	0,499	1,26	1,07	2,47	0,79	19,7	5,62	3,18
Bi	3,20	8,25	4,43	0,41	0,12	2,4	2,02	1,09
Zn	0,989	2,63	6,92	1,49	0,38	60,8	4,55	2,30
Sn	1,89	5,91	8,85	?	?	?	?	?

Es mag schliesslich nochmals darauf hingewiesen werden, daß alle diese Zahlen sich auf dieselben gegossenen und mecha-

1) R. Bunsen, Pogg. Ann. CXLI, p. 25, 1870.

2) W. Voigt, Gött. Abh. XXXVIII 1892, Wied. Ann. XLIX, 1893. Die in der letzteren Arbeit angegebenen Zahlen, welche auf einer größeren Zahl von Beobachtungen beruhen, sind hier direct benutzt.

nischer Bearbeitung so wenig, als möglich, ausgesetzten Metalle beziehen, die Anwendung auf gezogene Drähte oder gewalzter Bleche also nicht mit Strenge, gestatten. Damit hängt zusammen, daß sie von den vereinzelt schon früher bestimmten Werthen mehr oder weniger abweichen.

Göttingen, Anfang März 1893.

Bestimmung der Elasticitätsconstanten für das chlorsaure Natron.

Von

W. Voigt.

Die Untersuchung der Elasticitätsverhältnisse des chlorsauren Natrons bietet ein besonderes Interesse wegen der tetartoëdrischen Krystallform und den damit zusammenhängenden electrischen Eigenschaften dieses Minerals; denn es ist, wie ich schon früher mehrfach betont habe, ein Zusammenhang zwischen dem electrischen und dem elastischen Verhalten im hohen Grade wahrscheinlich.

Das Material für die Beobachtungen ist von Herrn Goldbach in Kehl geliefert worden; es war vielleicht schon ungewöhnlich vollkommen, denn die einzelnen Krystalle hatten bis 25 mm Kantenlänge; sie besaßen indessen nur kleine von Fortwachsungserscheinungen völlig freie Bereiche und gestatteten daher auch nur die Herstellung einer sehr geringen Zahl von Stäbchen für die Messung. Und diese kleine Zahl ist noch durch die Schwierigkeit der Bearbeitung des äußerst spröden Materiales reducirt worden, sodaß schließlich nur drei Stäbchen der Messung unterzogen werden konnten, zwei mit der Längsrichtung (L) und den Querdimensionen (B und D) parallel Würfelnormalen (W I und II), und eines mit der Längs- und Dickenrichtung parallel einer Granatoëdernormalen (G).

Die für die Berechnung in Betracht kommenden Formeln sind folgende:

Der Biegungswiderstand E oder der Biegungsmodul E, und der Drillungswiderstand T oder der Drillungsmodul T ergeben sich aus den Dimensionen L, B, D, aus der Belastung P, deren Hebelarm R und aus der gemessenen Biegung η und dem ge-

messenen Drillungswinkel τ nach den Formeln:

$$E = \frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{PL}{4BD^3\eta}, \qquad 1)$$

$$T = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{3PRL}{BD^3\tau\left(1 - 0{,}630 \cdot \frac{D}{B}\right)}. \qquad 2)$$

Aus ihnen folgen leicht die allgemeinen Elasticitätsmoduln s_{11}, s_{12} und s_{44}, da

$$\mathrm{E}_w = s_{11}, \quad \mathrm{E}_v = \tfrac{1}{4}(2(s_{11} + s_{12}) + s_{44}), \quad \mathrm{T}_w = s_{44}, \qquad 3)$$

und aus diesen berechnen sich die Elasticitätsconstanten nach den Formeln

$$c_{11} = \frac{s_{11} + s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12})}, \quad c_{12} = \frac{-s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12})}, \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}}. \qquad 4)$$

Der Berechnung ist, wie bei den früheren Bestimmungen, das Gewicht eines Grammes als Kraft-, das Millimeter als Längeneinheit zu Grunde gelegt.

Dimensionen.

Breiten und Dicken sind von Herrn Dr. Pockels mit dem früher benutzten Sphärometer gemessen und nach den Formeln:

$$D = D_0 + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$$
$$B = B_0 + \beta_1\alpha + \beta_2\alpha^2$$

berechnet worden [1]). Sie sind im Folgenden in Einheiten des Sphärometers (= 1/992,6 mm) angegeben.

W. No. 1. $D = 1000 + \delta$. $B = 4900 + \beta$.

δ beob.	27,8	44,9	51,8	50,7	41,8	β beob.	−46,5	+14	48	65	65
δ ber.	28,4	44,4	52,0	51,2	42,0	β ber.	−45	+12	49	66	64

$\delta_0 = 52{,}0$, $\delta_1 = 3{,}4$, $\delta_2 = -4{,}2$. $\beta_0 = 12$, $\beta_1 = 27{,}4$, $\beta_2 = -9{,}8$.

W. No. 2. $D = 1100 + \delta$. $B = 4900 + \beta$.

δ beob.	46,2	73,1	89,8	101,2	100,6	β beob.	47	52	44	20	−35
δ ber.	46,2	72,8	90,8	100,2	101,0	β ber.	45	55	45	16	−33

$\delta_0 = 90{,}8$, $\delta_1 = 13{,}7$, $\delta_2 = -4{,}3$. $\beta_0 = 45$, $\beta_1 = 19{,}6$, $\beta_2 = -9{,}8$.

G. $D = 1000 + \delta$. $B = 4000 + \beta$.

δ beob.	10,8	18,1	19,4	16,6	7,2	β beob.	407	414	399	398	379
δ ber.	10,8	18,0	19,8	16,2	7,2	β ber.	408	409	405	395	379

$\delta_0 = 19{,}8$, $\delta_1 = 0{,}87$, $\delta_2 = -2{,}7$. $\beta_0 = 405$, $\beta_1 = 7{,}2$, $\beta_2 = -2{,}8$.

1) W. Voigt, Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Gött. 1886, p. 94.

Biegungen.

Die Dimensionen, welche in früher angegebener Weise aus den vorstehenden Zahlen abgeleitet sind, sind in Millimetern, die Biegungen in Theilen der beobachteten Scala (= 0,0002954 mm), die Belastungen in Grammen angegeben; η'_p bezeichnet die Eindrückung der Lagenschneiden, die durch Combination von 2 Beobachtungen desselben Stäbchens bei verschiedener Länge erhalten wird und von den direct gemessenen η_p in Abzug zu bringen ist.

W. I. $L = 14{,}07$, $B = 4{,}98$, $D = 1{,}058$, $P = 60$.
1. Lage $\eta = 8{,}6 \quad 8{,}7 \quad 8{,}7 \quad 8{,}8$
2. Lage $\eta = 8{,}6 \quad 8{,}9 \quad 8{,}7$
$L = 22{,}07$
1. Lage $\eta = 25{,}2 \quad 25{,}1 \quad 25{,}3$
2. Lage $\eta = 25{,}2 \quad 25{,}2 \quad 25{,}1$
$\eta_{60} = 25{,}20$, $\eta'_{60} = 2{,}90$. $E = 4{,}15_2 . 10^6$.

W. II. $L = 14{,}07$, $B = 5{,}01_4$, $D = 1{,}198$, $P = 80$.
1. Lage $\eta = 8{,}5 \quad 8{,}6 \quad 8{,}5$
2. Lage $\eta = 8{,}7 \quad 8{,}6 \quad 8{,}4$
$L = 22{,}07$
1. Lage $\eta = 23{,}6 \quad 23{,}8 \quad 23{,}6$
2. Lage $\eta = 23{,}5 \quad 23{,}4 \quad 23{,}5$
$\eta_{80} = 23{,}57$, $\eta'_{80} = 3{,}16$. $E = 4{,}142 . 10^6$.

Mittelwerth $E_w = 4{,}14_7 . 10^{+6}$, $\mathrm{E}_w = 0{,}241_2 . 10^{-6}$.

G. $L = 14{,}07$, $B = 4{,}98_4$, $D = 1{,}059$, $P = 60$.
1. Lage $\eta = 13{,}5 \quad 13{,}7 \quad 13{,}6$
2. Lage $\eta = 13{,}3 \quad 13{,}1 \quad 13{,}1$
$L = 22{,}07$
1. Lage $\eta = 39{,}8 \quad 40{,}1 \quad 40{,}0$
2. Lage $\eta = 39{,}4 \quad 39{,}4 \quad 39{,}3$
$\eta_{60} = 39{,}7$, $\eta'_{60} = 4{,}2$.
$E_g = 2{,}58_1 . 10^{+6}$, $\mathrm{E}_g = 0{,}387_6 . 10^{-6}$.

Drillungen.

Die beobachteten Drehungen sind in Theilen der Scala (σ), welche gleich 1,0037 mm waren, angegeben; aus ihnen folgt der Drehungswinkel τ durch Division mit dem Abstand $A = 5173$ der Scala von den Spiegeln. Die Axenreibung (ϱ) ist in früher erörterter Weise eliminirt. G bezeichnet das Gewicht der Waagschale, welches mit ϱ zusammen aus der Berechnung verschwindet; das Symbol lR resp. rR bedeutet, daß die Messung an der linken oder rechten Rolle des Apparates vorgenommen ist. Der mittlere Werth von R ist 36,80 mm.

W. No. 1. $L = 12{,}40$, $B = 4{,}975$, $D = 1{,}057$.

rR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 34,7	34,6	34,8	34,6	34,6	$\varrho = 0{,}9$
	G,	$\sigma =$ 12,1	12,0	12,1	12,0		$\varrho = 0{,}8$
lR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 34,6	34,7	34,7	34,7	34,6	$\varrho = 1{,}1$
	G,	$\sigma =$ 11,9	11,9	11,7	11,8		$\varrho = 1{,}3$

$\sigma_{10} = 22{,}72$, $T = 1{,}223.10^{+6}$.

W. No. 2. $L = 16{,}50$, $B = 4{,}977$, $D = 1{,}190$.

lR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 44,4	44,4	44,4	44,3		$\varrho = 2{,}0$
	G,	$\sigma =$ 22,1	22,3	22,3	22,4	22,3	$\varrho = 2{,}0$
R.	$G + 10$,	$\sigma =$ 42,6	42,6	42,6	42,9	42,6	$\varrho = 1{,}6$
	G,	$\sigma =$ 21,2	21,1	21,2	21,3		$\varrho = 1{,}6$

$\sigma_{10} = 21{,}80$, $T = 1{,}21_3.10^{+6}$.

Mittelwerth $T_w = 1{,}218.10^{+6}$, $T_w = 0{,}821.10^{-6}$.

Die erhaltenen Zahlen stimmen so gut überein, als überhaupt zu erwarten, die Resultate haben also eine gewisse Zuverlässigkeit.

Folgerungen.

Aus den gefundenen E und T ergeben sich sogleich die Werthe der Elasticitätsmoduln

$$s_{11} = 0{,}241_2.10^{-6}, \quad s_{12} = 0{,}123_8.10^{-6}, \quad s_{44} = 0{,}821.10^{-6}$$

und aus ihnen erhält man die Elasticitätsconstanten

$$c_{11} = 6{,}33.10^{+6}, \quad c_{12} = -2{,}14.10^{+6}, \quad c_{44} = 1{,}218.10^{+6}.$$

Diese Resultate sind sehr bemerkenswerth, besonders, wenn man sie mit denjenigen vergleicht, welche für das dem chlorsauren Natron nachstehende Steinsalz gefunden sind. Hier ergab sich

$$s_{11} = 0{,}238.10^{-6}, \quad s_{12} = -0{,}052.10^{-6}, \quad s_{44} = 0{,}773.10^{-6}.$$
$$c_{11} = 4{,}77.10^{+6}, \quad c_{12} = +1{,}32.10^{+6}, \quad c_{44} = 1{,}29.10^{+6}.$$

Es haben also s_{12} und c_{12} in beiden Fällen entgegengesetzte Vorzeichen.

Dies hat wichtige Folgen. Der Modul s_{12} ist das Maaß der Querdilatation eines Cylinders, dessen Axe in eine Würfelnormale fällt, bei longitudinalem Zug; ein n e g a t i v e r Werth von s_{12} giebt eine Quercontraction — wie sie fast überall stattfindet und als nahezu selbstverständlich betrachtet zu werden pflegt — ein p o s i t i v e r aber eine Querdilatation als Begleitung der Längsdilatation. Eine solche war bisher einzig am Pyrit bei gleicher Orientirung aufgefunden [1]) und wegen ihrer Absonderlichkeit dort nicht allzusehr betont; es schien denkbar, daß sie nur scheinbar in Folge des nicht ganz vollkommenen Materiales aufgetreten

1) W. Voigt, Nachr. etc. 1888, p. 312.

wäre. Nach diesem neuen Resultat ist es aber als sichergestellt zu betrachten, daß in einigen Fällen die Längsdehnung eines Cylinders eine Vergrößerung des Querschnittes zur Folge hat.

Was die Werthe der Elasticitätsconstanten angeht, so soll nach der Theorie dann

$$c_{11} = 3c_{12}$$

sein, wenn die kleinsten Theile keine Polarität besitzen.

Diese Relation ist bei Steinsalz sehr nahezu erfüllt; beim chlorsauren Natron findet sich der denkbar stärkste Widerspruch damit, denn c_{11} und c_{12} haben entgegengesetzte Vorzeichen. Man wird also dem chlorsauren Natron Moleküle mit sehr starker Polarität beilegen müssen, und dies steht in guter Uebereinstimmung mit der starken piëzoelectrischen Erregbarkeit, welche dieses Mineral zeigt.

Es hat ein gewisses Interesse, zu untersuchen, wie sich nach der früher gegebenen[1]) und mehrfach durch die Erfahrung bestätigten Theorie dichtes (quasi-isotropes) chlorsaures Natron verhalten müßte. Nach den abgeleiteten Formeln sind für solches die Elasticitätsconstanten c und c_1 gegeben durch

$$c = \tfrac{1}{5}(3c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44}), \quad c_1 = \tfrac{1}{5}(c_{11} + 4c_{12} - 2c_{44});$$

und es berechnet sich aus den oben gefundenen c_{hk}:

$$c = 3{,}92.10^{+6}, \quad c_1 = -0{,}93.10^{+6}.$$

Nun ist der Werth des Moduls s_1 der Querdilatation für isotrope Substanzen

$$s_1 = -\frac{c_1}{(c-c_1)(c+2c_1)},$$

und hieraus folgt sofort, daß das singuläre Verhalten des chlorsauren Natrons auch im dichten Vorkommen erhalten bleiben, also auch ein Cylinder aus diesem Material bei Längsdehnung eine Vergrößerung des Querschnittes zeigen müßte.

Göttingen, Anfang März 1893.

---

1) W. Voigt, Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, XXXIV, p. 47, 1887

Bemerkung zu dem Problem der transversalen Schwingungen rechteckiger Platten.

Von

W. Voigt.

Eine strenge Ableitung der Schwingungsgesetze rechteckiger Platten mit ringsum freiem Rande ist bisher noch nicht gelungen, und der bisher allein theoretisch erledigte Fall einer rechteckigen Platte mit ringsum gehaltenem Rande hat kein practisches Interesse, da bei dieser Befestigung eine Erregung dauernder Schwingungen nicht möglich ist. Daher hat die Bemerkung vielleicht ein gewisses Interesse, daß es eine, wie mir scheint, bisher noch nicht bemerkte Anordnung giebt, die ebenso leicht theoretisch zu behandeln, als experimentell zu realisiren ist, nämlich die, bei welcher zwei parallele Kanten der Platte frei sind, die zwei anderen, die wir uns passend zugeschärft denken können, gegen je eine rauhe Wand gestemmt sind, so daß ihre Punkte an transversalen Verschiebungen gehindert sind. Diese Anordnung kann man practisch und fast streng dadurch erhalten, daß man die rauhen Wände aus einzelnen federnden, mit Leder überzogenen Streifen zusammensetzt, die sich innig an alle Theile der Kante anschmiegen, während die Anordnung, durch welche man gewöhnlich den Fall der durchaus freien Platte zu realisiren sucht, den Voraussetzungen der Theorie viel weniger genau entspricht. —

Die Hauptgleichung des Problemes ist, wenn man die XY-Ebene in die Mittelfläche der Platte legt und die transversale Verrückung mit w bezeichet:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k^2 \Delta\Delta w = 0; \tag{1}$$

hierin ist abgekürzt gesetzt

$$\frac{(c^2 - c_1^2)}{12 c \varepsilon} D^2 = k^2,$$

und es bedeutet D die Dicke der Platte; ε ist die Dichte, c und c_1 sind die Elasticitätsconstanten ihrer Substanz.

Die Platte sei an den Kanten

$$x = 0 \text{ und } x = a,$$

so wie oben gesagt, befestigt; dann gilt dort:

$$w = 0 \text{ und } (c+c_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \tag{2}$$

letztere Formel sagt uns, daß das um die Randlinie ausgeübte Drehungsmoment verschwindet.

An den Kanten

$$y = +b \text{ und } y = -b$$

sei die Platte frei, dann gilt daselbst:

$$\begin{aligned} (c+c_1)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ (c+c_1)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2c+c_1)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man, um sogleich den Randbedingungen (2) zu genügen,

$$w = v \sin\frac{2\pi t}{T} \sin px,$$

worin $p = h\pi/a$ ist, so folgt für v die Gleichung

$$-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 v + k^2\left(\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}p^2 + vp^4\right) = 0; \tag{4}$$

sie wird durch

$$v = e^{qy}$$

integrirt, wenn gilt

$$\left(\frac{2\pi}{Tk}\right) = (q^2 - p^2)^2 = p^4 r^4, \tag{5}$$

wobei $p^4 r^4$ eine Abkürzung für das Glied links ist. Hieraus folgt

$$q^2 = p^2(1 \pm r^2)$$

also

$$q = \pm p\sqrt{1 \pm r^2}.$$

Demgemäß sind 2 Fälle zu unterscheiden.

1) $0 < r^2 < 1$; dann sind die vier Wurzeln der Gleichung reell und zwar resp.

$$+q_1,\ -q_1,\ +q_2,\ -q_2, \tag{6}$$

wobei

$$q_1 = p\sqrt{1+r^2},\quad q_2 = p\sqrt{1-r^2} \text{ ist.}$$

2) $\infty > r^2 > 1$; dann sind zwei Wurzeln rein imaginär, die Gesammtheit also

$$+q_1, \quad -q_1, \quad +iq_2, \quad -iq_2, \tag{7}$$

wobei $\quad q_1 = p\sqrt{r^2+1}, \; q_2 = p\sqrt{r^2-1}$ ist.

Sonach sind zwei Gestalten particulärer Lösungen für v zu betrachten:

$$\begin{aligned} u &= A'\,\mathfrak{Cof}\,q_1 y + B'\,\mathfrak{Cof}\,q_2 y + C'\,\mathfrak{Sin}\,q_1 y + D'\,\mathfrak{Sin}\,q_2 y, \\ v &= A\,\mathfrak{Cof}\,q_1 y + B\cos q_2 y + C\,\mathfrak{Sin}\,q_1 y + D\sin q_2 y, \end{aligned} \tag{8}$$

unter $\mathfrak{Cof}$ und $\mathfrak{Sin}$ (resp. $\mathfrak{Tg}$, $\mathfrak{Ctg}$) die hyperbolischen Functionen verstanden.

Das Verhältniß $A:B:C:D$ resp. $A':B':C':D'$ und der, gegebenem p (resp. h) entsprechende, Werth von r (resp. T) bestimmt sich durch die Grenzbedingungen (3).

Da diese Gleichungen sowohl für $y = +b$ als $y = -b$ gelten, und die Glieder mit A und B resp. A' und B' sich bei dem Zeichenwechsel von y entgegengesetzt verhalten wie die mit C und D, resp. C' und D', so zerfallen die Grenzbedingungen je in zwei Gleichungen, welche entweder nur die ersteren oder nur die letzteren Constanten enthalten. Man kann daher die in Bezug auf y geraden Glieder

$$\begin{aligned} u_1 &= A'\,\mathfrak{Cof}\,q_1 y + B'\,\mathfrak{Cof}\,q_2 y, \\ v_1 &= A\,\mathfrak{Cof}\,q_1 y + B\cos q_2 y, \end{aligned}$$

und die ungeraden

$$\begin{aligned} u_2 &= C'\,\mathfrak{Sin}\,q_1 y + D'\,\mathfrak{Sin}\,q_2 y, \\ v_2 &= C\,\mathfrak{Sin}\,q_1 y + D\sin q_2 y, \end{aligned}$$

bei Erfüllung der Grenzbedingungen gesondert behandeln.

Das Einsetzen der Lösung u_1 ergiebt

$$\begin{aligned} A'((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1+r^2}) + B'(c-(c+c_1)r^2)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1-r^2}) &= 0, \\ A'((c+c_1)r^2-c)\sqrt{1+r^2}\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1+r^2}) \qquad\qquad & \\ -B'(c+(c+c_1)r^2)\sqrt{1-r^2}\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1-r^2}) &= 0; \end{aligned} \tag{9}$$

und hieraus folgt durch Elimination von A'/B'

$$\left(\frac{(c+c_1)r^2+c}{(c+c_1)r^2-c}\right)^2 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} = +\frac{\mathfrak{Tg}\,(pb\sqrt{1+r^2})}{\mathfrak{Tg}\,(pb\sqrt{1-r^2})}. \tag{10}$$

Das Einsetzen der Lösung v_1 ergiebt

$$
(11)\quad \begin{aligned}
&A(c+(c+c_1)r^2)\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1+r^2})-B((c+c_1)r^2-c)\cos(pb\sqrt{r^2-1}) = 0,\\
&A((c+c_1)r^2-c)\sqrt{r^2+1}\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{r^2+1})\\
&\qquad\qquad +B((c+c_1)r^2+c)\sqrt{r^2-1}\sin(pb\sqrt{r^2-1}) = 0,
\end{aligned}
$$

und nach Elimination von A/B

$$
(12)\qquad \left(\frac{(c+c_1)r^2+c}{(c+c_1)r^2-c}\right)^2\sqrt{\frac{r^2-1}{r^2+1}} = -\frac{\mathfrak{Tg}(pb\sqrt{r^2+1})}{\operatorname{tg}(pb\sqrt{r^2-1})}.
$$

(10) und (12) sind die Gleichungen, aus denen r^2 zu berechnen ist, aus der ersten für $0 < r^2 < 1$, aus der zweiten für $1 < r^2 < \infty$.

Die Gleichung (10) wird durch $r = 0$ befriedigt, was auf $u_1 = 0$ führt und daher keine particuläre Lösung liefert; außerdem muß sie, da ihre linke Seite für $r^2 = c/(c+c_1)$ unendlich, für $r^2 = 1$ aber gleich Null wird, und ihre rechte Seite für $r^2 = 1$ unendlich giebt, mindestens noch eine Wurzel für r^2 zwischen $c/(c+c_1)$ und 1 besitzen.

Die Wurzeln der Gleichung (12) liegen nothwendig zwischen

$$
pb\sqrt{r^2-1} = \frac{2n+1}{2}\pi
$$

und

$$
pb\sqrt{r^2-1} = (n+1)\pi
$$

und weichen um so weniger von

$$
pb\sqrt{r^2-1} = \frac{4n+3}{4}\pi \text{ ab, je größer } r^2 \text{ ist.}
$$

Der einzelnen particulären Lösung $u_1 \sin px$ oder $v_1 \sin px$ entsprechen Knotenlinien parallel der Y-Axe, gegeben durch

$$
px = n\pi, \text{ d. h. } x = a\cdot\frac{n}{h};
$$

außerdem solche, parallel der X-Axe, gegeben durch

$$
u_1 = 0 \text{ oder } v_1 = 0.
$$

Erstere können in beliebiger, letztere nur in **gerader** Zahl auftreten.

Die letzten Gleichungen werden, indem man mit Hülfe von (9) und (11) A'/B' resp. A/B eliminiert

$$
13)\quad \begin{aligned}
0 = &((c+c_1)r^2-c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1-r^2})\,\mathfrak{Cof}(py\sqrt{1+r^2})\\
+ &((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1+r^2})\,\mathfrak{Cof}(py\sqrt{1-r^2})
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned} 0 = &((c+c_1)r^2 - c)\cos(pb\sqrt{r^2-1})\,\mathfrak{Cof}(py\sqrt{r^2+1}) \\ &+ ((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{r^2+1})\cos(py\sqrt{r^2-1}). \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn $c/(c+c_1) < r^2 < 1$ ist, so enthält die Gleichung (13) lauter positive Glieder, kann also für kein y erfüllt werden. Hieraus folgt, daß die oben angegebene Wurzel der Gleichung (10), die innerhalb dieser Grenzen liegt, einem Ton entspricht, der keine Knotenlinien parallel zur X-Axe liefert. Da für jeden Werth von p nur ein solcher Ton vorhanden sein kann, und ihm das größte T entsprechen muß, so wird man schließen dürfen, daß die Gleichung (10) für $c/(c+c_1) < r^2 < 1$ nur eine, für $0 < r^2 < c/(c+c_1)$ aber keine Wurzel besitzt.

Die Gleichung (14) nimmt für sehr große r, da dann, wie oben gesagt,

$$pb\sqrt{r^2-1} = \frac{4n+3}{4}\pi = pb\sqrt{r^2+1}$$

ist, die Gestalt an:

$$\begin{aligned} 0 = &(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{(4n+3)}{4}\,\frac{\pi y}{b}\right) \\ &+ \mathfrak{Cof}\left(\frac{4n+3}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{(4n+3)\pi y}{4b}\right). - \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Lösung u_2 in (3) erhält man

$$\begin{aligned} &C'((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1+r^2}) \\ &\qquad + D'(c-(c+c_1)r^2)\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1-r^2}) = 0 \\ &C'((c+c_1)r^2-c)\sqrt{1+r^2}\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1+r^2}) \\ &\qquad - D'(c+(c+c_1)r^2)\sqrt{1-r^2}\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1-r^2}) = 0. \end{aligned}$$

und durch Elimination von C'/D':

$$\left(\frac{(c+c_1)r^2+c}{(c+c_1)r^2-c}\right)^2\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} = \frac{\mathfrak{Ctg}(pb\sqrt{1+r^2})}{\mathfrak{Ctg}(pb\sqrt{1-r^2})}. \tag{15}$$

Die Lösung v_2 giebt analog

$$\begin{aligned} &C((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{r^2+1}) \\ &\qquad - D((c+c_1)r^2-c)\sin(pb\sqrt{r^2-1}) = 0, \\ &C((c+c_1)r^2-c)\sqrt{r^2+1}\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{r^2+1}) \\ &\qquad - D((c+c_1)r^2+c)\sqrt{r^2-1}\cos(pb\sqrt{r^2-1}) = 0, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(16) \qquad \left(\frac{(c+c_1)r^2+c}{(c+c_1)r^2-c}\right)^2 \sqrt{\frac{r^2-1}{r^2+1}} = \frac{\mathfrak{Ctg}\,(pb\sqrt{r^2+1})}{\operatorname{ctg}\,(pb\sqrt{r^2-1})}.$$

Aus (15) resp. (16) ist das r^2 zu berechnen, das in u_2 resp. v_2 auftritt; in der Gleichung (15) muß $0 < r < 1$, in (16) $1 < r^2 < \infty$ sein. Gleichung (15) wird von $r^2 = 0$ und $r^2 = 1$ erfüllt; aber diese beiden Wurzeln führen auf $u_2 = 0$, geben also keine particuläre Lösung.

Die Wurzeln der Gleichung (16) liegen nothwendig zwischen

$$pb\sqrt{r^2-1} = \frac{2n+1}{2}\pi$$

und

$$pb\sqrt{r^2-1} = n\pi$$

und weichen bei großem r^2 wenig ab von

$$pb\sqrt{r^2-1} = \frac{4n+1}{4}\pi.$$

Den einzelnen Lösungen $u_2 \sin px$ und $v_2 \sin px$ entsprechen zur X- und zur Y-Axe parallele Knotenlinien; erstere müssen in ungerader Zahl auftreten und symmetrisch zur X-Axe liegen, welche selbst stets eine Knotenlinie ist. Die Behandlung geschieht ebenso wie bei u_1 und v_1 gezeigt ist. —

Im Allgemeinen entspricht jeder particulären Lösung der Gleichungen (1) bis (3) eine andere Periode T und demgemäß ein anderer Ton. Es lassen sich aber für jede nach Substanz und Dicke gegebene Plattenart Verhältnisse der Kanten a und $2b$ angeben, für welche mehrere dieser Perioden übereinstimmen.

Solche zwei- und mehrfache Töne bieten der Untersuchung besonderes Interesse, da sie eine große Mannigfaltigkeit an Klangfiguren ergeben, und die vorausgesetzte Anordnung ihre strenge theoretische Behandlung gestattet. Die Beobachtungen zu ihrer Untersuchung sind im hiesigen physikalischen Institut bereits im Gange.

Göttingen, Februar 1893.

Zwei mittelalterliche Declamationen über Thomas Becket.

Von

Dr. Otto Günther.

(Vorgelegt von W. Meyer.)

Für kaum eine andere Periode der Kirchengeschichte Englands im Mittelalter fließen die Quellen so reichlich, wie für die neun Jahre, in denen Thomas Becket auf dem erzbischöflichen Stuhl von Canterbury sitzt und mit gewaltiger Hand in die Entwicklung der englischen Kirche einzugreifen trachtet. Die wunderbar bewegte Laufbahn dieses Mannes und vor allem sein tragisches Ende haben von Anfang an eine ganz besondere Anziehungskraft ausgeübt, und eine große Anzahl von Lebensbeschreibungen, gerade die ausführlichsten von Männern verfaßt, die dem Erzbischof im Leben persönlich nahe standen, berichten uns neben anderen Quellen eingehend über seinen Kampf, Untergang und Triumph. Eine vollständige Uebersicht der Quellen giebt der neueste deutsche klerikale Biograph Becket's F. J. Buß in seinem Buch „Der heilige Thomas" (Mainz 1856) S. XI—XXV; eine Gesamtausgabe der Materialien hat J. C. Robertson veranstaltet in den „Materials for the history of Thomas Becket", 7 Bände, London 1875—1885 (= Rerum Britann. medii aevi scriptores 67). Beiden sind zwei Schriftstücke unbekannt geblieben, die in einer dem 13. Jahrhundert angehörenden und wohl in Frankreich geschriebenen Pergamenthandschrift der Göttinger Universitätsbibliothek überliefert sind und deren Auffindung ihre Veranlassung hat in der vom Königlichen Staatsministerium angeordneten Beschreibung der in Preußen vorhandenen Handschriftenbestände. Die Handschrift, bezeichnet als Cod. theol. 96, enthält Briefe des Apollinaris Sidonius, sodann das Sidonius betreffende Excerpt aus des Gregor von Tours Historia Francorum (II 22—24); am Ende folgen ohne Ueberschrift und von erster Hand geschrieben jene beiden nicht leicht zu lesenden Schriftstücke über Becket, von denen das zweite unvollständig ist, da das Ende der Handschrift fehlt.

Die beiden Reden — denn mit solchen haben wir es hier zu thun — stellen sich dar als gehalten im November des Jahres 1164 am Hofe Papst Alexander's III. zu Sens. In der ersten

spricht ein Parteigänger des Thomas, in der zweiten ein englischer Geistlicher gegen diesen und für Heinrich II. von England. Wir schöpfen unsere Kenntnisse über jene mit dem Papst in Sens geführten Verhandlungen sonst vornehmlich aus der Lebensgeschichte des Thomas, die wir aus der Feder des Herbert von Boseham besitzen. Herbert stand dem Erzbischof persönlich sehr nahe, und gerade für jene Verhandlungen ist sein Bericht deswegen von größerem Werthe, als die Darstellung der übrigen Biographen, weil er ihnen in eigner Person beigewohnt hat. Thomas war, nachdem in Northampton sein Conflict mit dem Könige zu offenem Ausbruch gelangt, auf seiner Flucht aus England am 2. November 1164 an der französischen Küste gelandet und einige Tage später in der Abtei des hl. Bertinus unweit von St. Omer mit Herbert zusammengetroffen. Gleichzeitig mit Thomas langte eine von Heinrich II. abgeschickte Gesandtschaft auf dem Festlande an, die den doppelten Auftrag hatte, sowohl Ludwig VII. von Frankreich wie dem Papst Alexander von dem Vorgefallenen Mittheilung zu machen [1]). Um dieser Gesandschaft entgegenzuwirken, wurden nun auch von Thomas, so erzählt Herbert weiter, zwei seiner Getreuen abgeordnet, darunter Herbert selbst [2]): immer hinter Heinrichs Abgesandten herreisend, kamen sie bei Ludwig an, nachdem ihn jene tags zuvor schon wieder verlassen hatten, und erreichten Sens einen Tag nach den Boten des Königs [3]).

Ueber die in Sens mit dem Papst geführten Verhandlungen selbst läßt sich Herbert in folgender Weise aus. Am Tage der Ankunft, so erzählt er [4]), *in vespera ad dominum papam habentes accessum ipsum nomine archipraesulis tanquam patrem et dominum, qua decebat devotione et humilitate, salutavimus … Enarravimus itaque libenter audienti et paterno compatienti affectu filii sui archipraesulis pressuras augustias et dolores, pericula in pugna illa apud Norhamtune ad bestias, pericula in falsis fratribus, pericula in fuga, pericula in via, pericula in mari et in ipso portu pericula, laborem egestatem et aerumnam et ad declinandas insidias habitus sui et nominis mutationem.* Der Papst ist gerührt. *Et quia iam valde*

---

1) Die Angabe einiger Quellen, wonach Heinrich zwei Gesandtschaften entsendet habe, eine an Ludwig und erst nach ihrer Rückkehr eine zweite an den Papst, beruht auf Irrthum; vgl. Reuter, Gesch. Alexanders III., Bd. I, 2. Aufl., S. 584 f. Doch hat vielleicht William von Canterbury Recht, der berichtet: *Igitur discedentes* (von Ludwig) *nuntii cum aliis quos rex Anglorum direxerat Romanam curiam adierunt* (Robertson I, p. 45).

2) vgl. Herbert III 332 f. (ich citire Band- und Seitenzahl immer nach Robertson). 3) III 334. 4) III 334.

sero erat et nos ex itinere fatigati .. ad hospitium citius nos remisit reversuros in crastinum. Am folgenden Tage hört Alexander dann in feierlichem Consistorium die Boten des Königs: *qui inprimis dominum papam nomine regis officiose salutantes causam adventus sui exponunt et inprimis quidem archipraesuli suo, quod pacem regni et sacerdotii tanquam pacis inimicus turbasset, obiciunt, quod crucem manibus propriis in curia regia baiulasset, quod missam de beato Stephano protomartyre celebrasset et demum fugam clandestinam fatue nimis et turpiter ecclesiam suam deserens iniisset, et quidem omnia haec in regis ignominiam et contemptum et totius ecclesiae Anglicanae et potissimum suae perniciem*[1]. Allein die Gesandten haben Unglück, denn gerade die beredtesten unter ihnen, Gilbert Folioth Bischof von London und Hilarius Bischof von Chichester, werden in ihrer Rede verwirrt; der Papst schenkt ihnen keinen Glauben und ermahnt sie, mit ihrem Erzbischof schonender zu verfahren. *Unde et (ei?) qui missi fuerant videntes sic fortiter et instanter regis nomine postulant, ut archipraesulem in Angliam remitteret, pariter et a latere suo legatum, qui remota appellatione causam ibi inter regem et archipraesulem audiret et inter ipsos vel componeret vel causam per sententiam terminaret.* Jetzt sucht Alexander Zeit zu gewinnen; er verlangt, die Gesandten sollen die Ankunft des Thomas abwarten. Diese antworten, daß ihnen dazu die Zeit fehle, und erneuern dringend ihre Forderung. Lange schwankt der Papst. Er ist sich wohl bewußt, wie viel für seine Stellung von der Geneigtheit Heinrichs abhängt, und auch das Cardinalscollegium ist zum großen Theil der Ansicht, daß dem Verlangen des Königs nachgegeben werden müsse. Allein am Ende beharrt er doch bei seiner ersten Erwiderung und erklärt vor Beckets Ankunft keine Entscheidnng treffen zu können. Da brechen die königlichen Gesandten schleunigst auf und kehren nach England zurück.

So der Bericht Herbert's, dem die übrigen Quellen nicht viel neues hinzufügen. William von Canterbury schweigt ganz von den Boten des Thomas; die Gesandten des Königs überbringen als seine Forderung *'ad se cardinales duos dirigi, a quorum sententia non posset appellari, qui inter ipsum et archiepiscopum iudicarent'*[2]. Ebenso stellt Edward Grim die Sache dar[3]. Auch William Fitzstephen berichtet eigentlich nur von einer Gesandtschaft des Königs[4] und erwähnt nur beiläufig, daß bei der Audienz der-

1) III 335 f. 2) I 45. 3) II 402. 4) Ihre Reden charakterisirt er nur im allgemeinen (III 73: *Omnium fere erat una sententia de commendatione illustris regis Anglorum tanquam catholici principis, devoti filii et benefactoris domini papae et sanctae Romanae ecclesiae pro parte sua patroni, honesti viri,*

selben auch 3 oder 4 Cleriker des Thomas zugegen gewesen. Recht ausführlich erzählt von den Reden der königlichen Gesandten Alan von Tewkesbury, und wenn er dieselben auch hier und da etwas nach eigenem Geschmack gestaltet zu haben scheint, so weicht er doch in den Hauptpunkten nicht wesentlich von Herbert ab. Auch bei ihm gipfelt das Verlangen der Boten in Entsendung päpstlicher Legaten nach England, damit dort der Streit entschieden werde, und von den Boten Beckets berichtet er nur, wie sie von den Cardinälen schlecht aufgenommen seien und wie sie der Audienz der königlichen Gesandtschaft beigewohnt haben[1]).

Die anonymen Viten, die Robertson mit I und II bezeichnet hat[2]), ergeben keine mit der Darstellung der übrigen Quellen in Widerspruch stehenden Züge, ebensowenig die poetische Lebensbeschreibung des Garnier[3]).

Ganz anders ist die Situation, die den beiden Reden der Göttinger Handschrift zu Grunde liegt. Hier handelt es sich nicht um Audienzen, die der Papst den Gesandten der einen oder andern Partei gewährt, sondern um eine förmliche Gerichtssitzung. Zuerst tritt ein Anhänger des Erzbischofs auf, dem dann ein Vertheidiger des Königs replicirt. Von einem solchen Vorgang wissen die Quellen nichts. Die einzigen von ihnen, die der Gesandtschaft des Thomas mit deutlichen Worten Erwähnung thun, sind Herbert und Alan; allein beide stellen die Sache durchaus so dar, daß eine altercatio der Parteien vor dem Papst überhaupt nicht stattgefunden hat. Die Boten des Thomas werden zwar, nachdem sie für sich eine Audienz bei Alexander gehabt, auch zu dem Empfang der königlichen Gesandten am folgenden Tage hinzugezogen, aber nicht um mit diesen zu disputiren, sondern nur '*ut vel finem viderent*', wie Alan (II 337) sich ausdrückt. Weniger Gewicht möchte ich darauf legen, daß es nach der zweiten Göttinger Rede den Anschein hat, als ob Heinrich nur éinen Sprecher

---

amatoris pacis, magnifici principis, veneratoris personarum ecclesiasticarum et donatoris ecclesiarum regni sui . . Et si modo esset inter eum et archiepiscopum suum distantia, non esse culpam regis . . Aliquis eorum inter cetera regis Anglorum potentatus et divitias diligenter commemorabat. Nullus omnino contra personam archiepiscopi vel. quod eam vel causam regis et eius tangeret aliquid dicebat: das letzte stimmt nicht zu den anderen Quellen und ist auch wenig wahrscheinlich), fügt dagegen etwas von einer geheimen Unterredung hinzu, in der die königlichen Gesandten von Absetzung des Thomas gesprochen und eine Erweiterung des Peterspfennigs in Aussicht gestellt hätten (III 74).

1) II 337. 2) IV 60 und 107. 3) La vie de Saint Thomas le Martyr . . par Garnier de Pont Sainte Maxence, publiée . . par C. Hippeau, Paris 1859; vgl. v. 2186 ff.

an den päpstlichen Hof gesandt hat (vgl. unten II § 2: *in hanc sacrosanctam curiam me responsalem delegavit*), während alle Quellen deren mehrere erwähnen und zum Theil ausdrücklich bezeugen, daß mehrere das Wort ergriffen hätten. Der Punkt dagegen, der mir für die Beurtheilung der beiden Reden den Ausschlag zu geben scheint, ist folgender: die Rede des Thomisten gipfelt in der Forderung, daß der Papst über Heinrich und sein ganzes Land das Anathem aussprechen möge. Daß Thomas im November des Jahres 1164 durch seine Boten ein solches Verlangen an den Papst habe stellen lassen, ist völlig undenkbar. Denn ganz abgesehen davon, daß Herbert selbst als den Zweck seiner Entsendung nur den angiebt, dem Papst von den Schicksalen Beckets Mittheilung zu machen und etwaigen Machinationen der königlichen Gesandten nach Kräften entgegenzuwirken [1]), widerspricht ein solches Verlangen durchaus der Lage der Dinge, wie sie gegen Ende des Jahres 1164 bestand. Als Thomas damals England verließ, konnte es ihm noch keineswegs sicher sein, ob er bei dem Papste bereitwillige Unterstützung finden würde; war doch dem Widerstand Alexanders gegen Friedrich I. und den kaiserlichen Gegenpapst überhaupt erst dadurch eine gewisse Aussicht auf Erfolg zu Theil geworden, daß Heinrich II. zusammen mit Ludwig VII. vier Jahre zuvor sich offen für ihn entschieden hatte. Am päpstlichen Hofe war man sich dessen wohl bewußt, und die Mehrzahl der Cardinäle trug nie Bedenken, ihren Sympathien für Heinrich deutlichen Ausdruck zu geben. Wie hätte es da Thomas, selbst wenn er für sich der persönlichen Zustimmung des Papstes ganz sicher gewesen wäre, unternehmen können, mit einer solchen Forderung hervorzutreten? Die Rede, die Herbert von Boseham den Thomas selbst nach seinem Eintreffen in Sens vor dem Cardinalkollegium halten läßt, ist sicherlich in der Form freie Erfindung, allein die Worte, die er ihn sagen läßt (III 346): *Verum in audientia vestra ideo dicimus haec . . ne suspicemini, quod ego gladium hunc contra principem meum, dominum meum, Anglorum regem, etsi durius adversum me actum sit, exseri adhuc postulem vel desiderem. sustinendum prius et regia clementia cum exspectatione expetenda*, entsprechen der ganzen damaligen Lage insofern gewiß, als es Becket zunächst weit mehr darauf ankommen mußte, für sein eignes Verhalten dem Könige gegenüber die Billigung des Papstes zu erhalten als diesen zu agressivem Vorgehn gegen Heinrich zu veranlassen. Von irgend einer sachlichen Vertheidigung der Handlungsweise Beckets

1) vgl. III 332 f. und III 334 f.

findet sich aber in der ganzen ersten Rede kein Wort, kein Wort von seiner Stellung zu den Constitutionen von Clarendon, kein Wort über die auf dem Gerichtstage von Northampton gegen ihn erhobenen Beschuldigungen; nur in ganz allgemeinen Redensarten ergeht sie sich über des Erzbischofs Vortrefflichkeit und Heinrichs Ungebühr, über die Leiden der Menschheit im allgemeinen und die der Kirche und Beckets im besondern, um dann plötzlich mit jener Forderung des Anathems über Heinrich und sein Land hervorzutreten.

Die beiden Reden der Göttinger Handschrift stehen also nicht nur, was die äußere ihnen zu Grunde liegende Situation betrifft, in scharfem Gegensatz zu den übrigen Quellen, sondern lassen auch — zum wenigsten die erste — jene Verhandlungen in Sens ihrer innern historischen Bedeutung nach in einem zwar grellen, aber nach allem, was wir wissen oder schließen können, durchaus verkehrten Lichte erscheinen. Die Folgerung, die wir daraus zu ziehen haben, ist die: die beiden Reden sind, weit entfernt davon, wirklich gehalten zu sein, auch nicht etwa als Bruchstücke eines unbekannten Historikers zu betrachten, der bei Schilderung der Verhandlungen von Sens der Sitte der Zeit gemäß in ihnen nur im allgemeinen die Situation gekennzeichnet, im übrigen aber den Sprechenden eigene Worte in den Mund gelegt hätte. Vielmehr werden wir in ihnen nichts zu sehn haben als zwei rhetorische Schulreden, Declamationen nach der Art jener griechischen Sophisten, die beispielsweise Aias und Odysseus in Rede und Gegenrede um die Waffen Achill's streiten ließen. Nur von dieser Auffassung aus erklären sich die Abweichungen von der geschichtlichen Wirklichkeit leicht und zwanglos. Wer auf den Gedanken kam, die Scene vor Alexander in Sens in zwei schulmäßigen Reden darzustellen, für den lag es nahe, in der Behandlung des Themas 'Hie König, hie Erzbischof' von strengem Festhalten an den historischen Ereignissen abzusehen und statt dessen vielmehr allgemeine Gedanken in den Vordergrund zu stellen und diese dann durch einen kräftigen Effekt abzuschließen. So ward dem Verfasser dieser Reden aus jenen an und für sich nicht eben sehr belangreichen Audienzen zu Sens ein förmlicher Gerichtstag vor dem großen Kirchenfürsten, dem gegenüber auch Friedrichs Macht ihre Grenzen gefunden. Ein Anhänger des Thomas (an Herbert von Boseham ist natürlich nicht gedacht) vertritt das Princip der Kirche und läßt seine Anklage gegen den König in der Forderung dessen gipfeln, was Gregor VII. gegen Heinrich IV., Alexander selbst gegen Friedrich nicht ohne Erfolg angewendet hatte, des

Anathems gegen den Herrscher, der es wagt, der Kirche entgegenzutreten. In der That lag ja seit dem Tage (Anfang 1166), wo Alexander dem Thomas die Vollmacht gegeben, mit der Censur gegen die englischen 'Kirchenräuber' vorzugehn, die Möglichkeit nicht allzu fern, daß auch den Beherrscher Englands diese höchste der kirchlichen Strafen ereilen konnte. Daß Thomas selbst von jenem Augenblicke an ernstlich mit diesem Gedanken umging und mehr als ein Mal im Begriff war, das Interdikt, das er über die königlich gesinnten Bischöfe verhängte, auch auf den König selbst auszudehnen, steht fest. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daß gerade in dieser Zeit der Wirren, in den Jahren zwischen den Verhandlungen in Sens (1164) und dem gewaltsamen Ende des Thomas (1170), wo man das Anathem über Heinrich und sein Land mehr als einmal mit Sicherheit erwarten konnte, daß gerade in dieser Zeit unsere Reden entstanden sind. Denn wären sie erst nach Beendigung des ganzen Streites geschrieben, hätte der Verfasser gewußt, daß in Wahrheit dies äußerste Mittel der Kirche dem König gegenüber doch nicht in Anwendung gekommen war, so wäre es zwar nicht ausgeschlossen, aber doch immerhin weniger wahrscheinlich, daß er seinen Thomisten so hätte sprechen lassen, wie er ihn thatsächlich sprechen ließ. Wer dagegen in eben dieser Zwischenzeit ein paar schulmäßige Reden der Art schreiben wollte, wie sie uns vorliegen, für den konnte schwerlich ein Zweifel darüber bestehen, daß die Rede des Thomisten mit der Forderung des Anathems gegen Heinrich und sein Land zu schließen habe. Dem Anhänger des Thomas stellt der Verfasser dann einen Geistlichen (vielleicht ist an Gilbert von Folioth gedacht) von der Partei des Königs gegenüber, da dieser selbst seiner Geschäfte halber sich nicht vor dem Papst habe stellen können, und seine Forderung wird (leider fehlt ja der Schluß der zweiten Rede) schwerlich die gewesen sein, von der die Quellen berichten, die Entsendung von Legaten nach England zur Schlichtung des Streites, sondern eine apodiktische Verurtheilung des Thomas und seine Absetzung als Erzbischof von Canterbury.

Wenn so die beiden Reden auf großen historischen Werth insofern keinen Anspruch machen können, als sie in eine Situation Gedanken und Stimmungen hineintragen, die in Wahrheit erst für ein späteres Stadium des ganzen Zwistes passen, so bieten sie doch manche interessante Einzelheiten. So zeigen sie einmal, was in dem großen Conflikt der beiden Gewalten besonders Eindruck gemacht hatte. Das ist vor allem die Scene in Northampton, wo der zur Verantwortung geladene Erzbischof vorher mit deutlicher Bezug-

nahme auf seine eigene Person die Messe vom ersten Märtyrer Stephanus celebrirt, die mit den Worten des Psalms beginnt 'Etenim sederunt principes et adversum me loquebantur', und dann in voller geistlicher Amtstracht, das Kreuz in den Händen, Heinrich nicht wie einem christlichen König, sondern wie einem Tyrannen entgegentritt [1]). Sodann ist in der zweiten Rede besonders interessant der stete Hinweis auf Heinrich als Legaten des apostolischen Stuhls. Die historischen Quellen berichten in dieser Beziehung verschieden: während einige an der Thatsache, daß der Papst dem König diese Würde faktisch übertragen habe, nicht zweifeln, stellen andere die Sache so dar, als ob die litterae legationis dem Könige nur zu dem Zweck übersandt seien, damit er seinerseits die Würde einem andern verleihe [2]). Wie immer es gewesen sein mag, das ergiebt sich mit unbedingter Sicherheit aus unserer Rede, daß in den Augen vieler Heinrich in jener Zeit in der That als rechtmäßiger päpstlicher Legat dagestanden hat. Nicht ohne Interesse ist sodann eine Reihe nebensächlicher Angaben, die wir aus den übrigen Quellen nicht controliren können, mit denen aber auch der Historiker immerhin zu rechnen haben wird; so die Angabe der Zahl der Erzbischöfe, Bischöfe und Aebte, die bereit sind, den Thomas zu überführen (II § 12); so die Zehnzahl der ihm vorgeworfenen Vergehen (ebenda).

Eine spezielle Benutzung der einen oder anderen Quelle durch den Verfasser der beiden Reden läßt sich nicht nachweisen; daß sich hier und da Anklänge an die ja selbst ziemlich stark rhetorisch gehaltenen Darstellungen z. B. Herbert's und Alan's vorfinden, ist nicht wunderbar. Einen Grund, der dafür zu sprechen scheint, daß die Reden älter sind als die sämtlichen übrigen Quellen, die ja die Geschichte des Thomas bis zu seinem Ende weiterführen, habe ich schon oben dargelegt. Vielleicht kann man dem noch hinzufügen, daß ein gewandter Rhetor (und ein solcher war der Verfasser der Reden ohne Zweifel), falls er von der Ermordung des Thomas gewußt hätte, aus dem tragischen Ende desselben heraus besonders für die erste Rede ohne Mühe eine Stimmung hätte gewinnen können, die sich, ohne mit der Lage der Dinge im November des Jahres 1164 in allzugroßem Widerspruch zu stehen, von der ziemlich kühl reflektirenden, von der Person des Erzbischofs fast geflissentlich auf allgemeine Gedanken ablenkenden

1) In Wahrheit war der Vorgang etwas anders gewesen: Thomas hatte auf Zureden einiger ihm nahe stehenden Personen schließlich wenigstens die geistlichen Gewänder noch abgelegt; vgl. z. B. Herbert III 304. 2) Vgl. Reuter I² S. 559 f.

Art ihrer jetzigen Darstellung nicht unbeträchtlich würde unterschieden haben. Doch sind derartige Schlüsse ja nie absolut sicher.

Was den Stil der beiden Reden angeht, so sind sie nicht ungewandt geschrieben. Die Sprache ist öfters geschraubt, fast immer pointirt und erhebt sich zuweilen zu einer fast poetischen Diktion. Der Ankläger redet von der dura dispensatio der Parzen (I 10); Heinrich wird an Freigebigkeit mit Augustus und Titus verglichen (II 11); auch ein paar gereimte Hexameter, offenbar Citat aus einem mittelalterlichen Dichter, werden nicht verschmäht (I 10). Auch hierin also zeigen die Reden sich als echte rhetorische Declamationen.

Ich lasse jetzt den Text der Göttinger Handschrift (G) folgen, indem ich nur unbedeutende Orthographica stillschweigend abändere.

I.

Impunita improborum protervitate longis temporibus calamitose Romana tribulatur ecclesia: ecce autem de integro degrassantis tyranni Anglorum[1]) ambitio nefaria in apostolicam resurgit maiestatem (usque adeo firmat animos improbitas obstinata), ecce Cantuariensem archiepiscopum tanto honore exutum nefarie in ultimam sortem deiecit miseriae et infortunii — proh dolor! virum innocentissimum, veritatis cultorem et iustitiae, virtutum tabernaculum, ecclesiae filium, alumnum sapientiae. 2 Profecto, pater sanctissime, nisi vestra in commune providentia consuluerit et discreta dispensatio, calamitosum impendet periculum matri ecclesiae et in longum duratura subiectio. si enim Cantuariensis ecclesia in regiam deicietur servitutem, procul dubio universarum praelatos ecclesiarum infra sui ambitum imperii et terminos[2]) in sortem deiciet gravissimam extremae servitutis. proh lacrimabilis iactura, amissio libertatis: genuinum imperium amittet ecclesia, perpetuam servitutem sacrosancta 3 patietur ecclesia. Huic incommodo aliud adiungitur: si scismaticus[3]) ille consecratus in apostolicum, immo execratus in apostatam[4]) et idolum, hanc curiam intuebitur tepide iustitiam observare, cum maiori pertinacia in sua malitia degrassabitur nec 4 curabit resipiscere. At forte quispiam obiciet in hunc modum: 'Rex Angliae homo est praepotens, facilis ad iram, difficilis ad placandum parvoque momento et exorta occasione ex parte scismatici[5]) cum imperatore in Romanam praesumet ecclesiam con-

1) anglicorum *G.* 2) et terminos] *so wird wohl die Abkürzung* et t̄os *in G aufzulösen sein, obwohl diese Worte recht überflüssig sind und man lieber etwa an* constitutos *denken möchte.* 3) *d. i. Victor IV.* 4) apostotam *G.* 5) cismatici *G.*

5 iurare'. verum enim vero tam debili obviare obiectioni superfluum reputo, cum Romanae praelatos ecclesiae calamitosas tribulationes et infinitas vexationes pro iure tuendo recolo sustinuisse nec ulla ratione possum arbitrari viros egregios[1]) et perfectos vel periculi susceptionem[2]) vel laborum perpessionem, 6 gloriosum virtutis officium, deierare[3]). nequaquam martyrum perseverantia usque adeo magnificam optinuisset victoriam in agone Christiano, si mortem magni fecissent temporalem. generosa virtutis magnanimitas[4]) nullis molestatur incommodis vel laboribus, immo[5]) impendio laetitia diffunditur virtus magnanimis, cum voluntaria adversitatum tolerantia de se capit experimen-7 tum. item cum in hoc salo et tempestate vitae humanae circumflantibus agitemur procellis, necessarium est et vitae attributum saevientis fortunae sentire tumultum. haec enim, mors exilium luctus dolor, non sunt supplicia meriti sed attributa vivendi. neminem illaesum fata relinquunt. felix est, non qui aliis videtur, 8 sed qui sibi. cum ergo humanae felicitatis dulcedo tantis amaritudinibus sit respersa, non est tanto opere appretianda, ut propter umbram eius et speciem adulterinam[6]) honestatem omittamus[7]) et rigorem iustitiae, rei pulcherrimae, rei honestissimae[8]).
9 Adde: si haec audacia non corrigetur gravissima ultione, culpa praesentium refunditur in posteros; omnia enim flagitia ex flagitiosis exemplis erupere. vestrum autem officium[9]) est, pater sanctissime, et praesentibus[10]) consulere et futuris providere.
10 Proh dura Parcarum dispensatio, omni incerta generi[11]) animantium! ecce homninem gratia meritorum interveniente deo familiarem, acceptum hominibus, tantis honorum gradibus sublimatum, quam gravis, quam flebilis urget miseria[12])! ecce virtutum praemia tormenta malorum!

Spreta iacet virtus, nulla est reverentia legum[13]),
Sed male grassatur vesana potentia regum.

11 o implacabilem temere et inconsulte viventium amentiam! ecce homo Romanae spes maxima ecclesiae, cuius summa potentia pro salute universorum de iure tenetur excubare, cum summa diligentia sponte matrem infestat ecclesiam, innocentem ex-12 pugnat morti proscribens et exilio. Cum ergo adeo violenta

---

1) egerios *G.* 2) susceptione *G.* 3) deierare *in der seltenen Bedeutung 'abschwören', vgl. Corp. Gloss. Latin. ed. Goetz II p. 239* 'ἀπόμνυμι deiuro'. 4) magnanitas *G.* 5) imo *oder* uno *G.* 6) adultinam *G.* 7) 'omittamus *G* 8) honestime *G.* 9) offotium *G.* 10) praesentibus *corrigirt aus* praesentissime *G.* 11) g̊ *G.* 12) misia *G.* 13) legum] *so G von 1. Hand, nachdem ein ursprüngliches* morum *getilgt ist.*

et illiberalis tantae innocentiae homini et auctoritatis, immo ecclesiae dei, nec ecclesiae, immo ipsi creatori illata sit iniuria, cum sit in propatulo mala innumerabilia pro hoc negotio secutura esse fortasse graviora, praesertim cum in nostro tempore regina virtutum moritura sit iustitia, si adeo illiberale facinus transiverit impunitum: restat, pater sanctissime, ut in tantam audaciam districto iudicio et legitima animadvertatur sententia poenaque sceleratos mores deterreat, ne sic ad illicita audeatur
13 prosilire. Auctor ergo sceleris rex Angliae et universa eius terra vinculo anatematis innodetur; alioquin, quemadmodum praecisae [1]) arbores ramis succrescentibus tamquam ad restaurationem matris arboris solent repullulare [2]), pari similitudinis ratione ceteros orbis terrarum reges et principes in consimiles videbitis audacias animari et resurgere.

II.

Si [3]) quicquam liceret iniuriae sub tanto iustitiae patrono, profecto verendum esset regi Anglorum. tanta est enim iniqui accusatoris pertinacia, ut nec regiam vereatur maiestatem nec
2 innocentiae parcat nec saltem legatariae deferat [4]) dignitati. Huius itaque rei non inscius rex Anglorum, quia maximis et novis occupatur negotiis, in hanc sacrosanctam curiam me responsalem delegavit, tam innocentiae suae quam vestrae, pater, confidens aequitati. siquidem rex Anglorum, legatus vester et ecclesiae Romanae filius devotissimus, nichil proposuit adversus ecclesiam
3 agere, qui et in hac causa advocato utitur sacerdote [5]). adversarius itaque regis nostri rem quidem tetigit sed a veritatis tramite, ignoranter fortasse, declinavit; nostra autem oratio magis vera quam ornata sinceram rei gestae veritatem paucis
4 conprehensa verbis perstringet. Venerabilis rex iam tertio [6]) vocaverat in praesentiam suam Cantuariensem archiepiscopum super quibusdam capitulis responsurum. qui cum insufficientes et ridiculosas praetendens occasiones causam subterfugeret ma-
5 nifeste, rex ei diem peremtorium assignavit. praefixa autem die archiepiscopus quasi contra infidelem tyrannum dimicaturus summo mane missam celebravit, cuius introitus 'Etenim sederunt' [7]).

---

1) praescise *G.* 2) repululare *G.* 3) i *G mit freigelassenem Raum für die nachzutragende Initiale.* 4) deferatur *G;* deferre *gebraucht wie in der Urkunde Eduards II. (1323) bei Rymer, Foedera III 1012:* vobis parcere volumus et deferre. 5) *d. h. der Sprecher ist Priester.* 6) *Wie der Verfasser dies herausrechnet, ist nach den übrigen Quellen nicht klar.* 7) *Psalm 118, 23:* etenim sederunt principes et adversum me loquebantur.

missa vero celebrata sacra non exuit insignia sed in eodem habitu, in quo missam celebraverat, cum omnium ammiratione in curiam vertit, tamquam in praesentiam[1]) tyranni, non regis, tamquam in conspectum persecutoris ecclesiae, non legati, tamquam sub districto extremae necessitatis articulo crucis, quam
6 in manibus praeferebat, amplexus praesidium. Ammiratus itaque rex, quid istud hominis esset, quid sibi vellent Aaron insignia in causis agendis, patientissime omnia sustinuit, licet evidenti interpretatione per omnia haec sibi tyrannidem obici intelligeret, totumque de iustitia, de potentia nichil agens causam archie-
7 piscopi aequissime iussit ventilari. Tractatur causa. dant in eum sententiam viri boni et legum peritissimi. ipse vero in regem contumaciter erectus curiam contempsit nec iustae voluit sententiae subiacere. hoc facto suum et ecclesiae tesaurum non dico furtim sed clam tollens[2]), non a rege nostro expulsus sed exagitatus plectibilis vitae conscientia Angliam fugiens exivit, praeproperans in hanc curiam regem accusare, a quo se noverat
8 esse accusandum. Audivisti, pater iustissime, rei[3]) gestae seriem; audivisti plenam sincera veritate relationem. ex praemissis itaque liquido apparet, quod in regem vel in terram ipsius tam cito dari anatematis sententiam nec rigor canonum nec decre-
9 torum auctoritas permittit. nec fere adversarii allegationes discretioni huius curiae hoc poterunt persuadere. siquidem adversarius persecutorem ecclesiae ausus est regem appellare, sed res omnino in contrarium cedit. Christianissimus enim rex noster novas ecclesias constituit, ruinosas restituit; minores reditibus[4]) amplificat, maiorum dignitatem, iura etiam integra et illibata conservat, omnibus vero paterna sollicitudine tamquam pastor
10 vigilantissimus non desinit providere. cuius rei si testes homines non haberet, praeberet terra, praeberet ei mare testimonium: terra, quae cottidie novis ecclesiarum aedificiis occupatur; mare, quod navigiis ad hoc silvas transmittere non cessat; montes etiam, qui propter hoc denudati decalvatique in perpetuum expleto etiam humani generis aevo sanctitatem regis
11 Anglorum caelo fluviisque loquentur. De exurgendo autem in maiestatem tuam, pater, quod nefas est cogitare, diluit omnino summa devotio regis erga matrem suam ecclesiam Romanam. quis enim legatos apostolicae sedis primus recepit? rex An-

1) praesen *(Zeilenende)* *G.* 2) *vgl. Herbert III 313:* et quia eo tempore ratio redituum et totius archiepiscopatus generalis pensio fiebat, praecepit *(nämlich Thomas)*, ut exsculperem si quid possem. 3) reg *G.* 4) redditibus *G.*

glorum. quis eis debitum legatis honorem exhibuit? rex Anglorum. quis te ipsum, pater, Turonis tam honorifice suscepit? rex Anglorum[1]). si numerare voluero, quot ipse beneficia[2]) huic curiae contulerit, milies[3]) iterare oportebit: rex Anglorum. memoret ergo, qui accepit; oblitus est enim, qui contulit, nec de datis sed de dandis beneficiis cogitat vincens Augustum,
12 supergressa Titum nostri liberalitas Alexandri. De coniuratione, quod neque verum nec verisimile erat, ipse adversarius non asseruit[4]). ego, quod non obviat, non refellam. ut autem frons adversarii durissima conteratur, ecce V archiepiscopi, XI episcopi, triginta abbates praeter comites et barones parati sunt reconvincere archiepiscopum de X criminibus. quorum si quod
13 initum[5]) fuerit, peremtorium esse ista curia iudicabit. Vides ergo, pater, quod non rex archiepiscopum sed archiepiscopus regem gravissime offendit. si tamen in maioribus offendisse videretur, an rex pariter et huius sanctae curiae legatus, cum non sit adeo remotus, cum nondum apostolica scripta vel nuntii huius curiae super hoc eum convenerint[6]) nec leges **

1) *Heinrich selbst war bei dem Empfange in Tours (im September 1162; vgl. Reuter I² 282) nicht zugegen gewesen.* 2) beneficie *G.* 3) miliesǫ *G.* 4) assumit *wie es scheint G.* 5) initum *schrieb ich; G hat vor einem* m̄ *7 senkrechte Hasten, so daß man an* minimum *denken könnte, was aber dem Gedanken nicht genügt; für* initum *ist der Strich über dem* m *zu viel.* 6) conveniᷓ *G.*

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1892.

(Fortsetzung.)

Technische Hochschule in Karlsruhe:
- d. Der Stein der Weisen. Festrede von Dr. C. Engler. K. 1889.
- e. Programm für das Studienjahr 1892—93. K. 1892.
- f. Die Niederschlagsverhältnisse des Rheingebietes v. Dr. Chr. Schultheiss. Habilitatiensschrift. K. 1890.
- g. 17 weitere Habilitationsschriften v. 1870—92.
- h. 21 Dissertationen 1879—1892.

Nachtrag.

- a. Blätter des Vereines für Landeskunde von Niederösterreich. N. F. 25. Jahrgang. Nr. 1—12. Wien, 1891. 1892.
- b. Topographie von Niederösterreich. Dritter Band. Der alphabetischen Reihenfolge der Ortschaften 2ter Band. 9. und 10. Heft. Bogen 65 — 80. Wien 1892.

November 1892.

Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
 a. Abhandlungen der math.-phys. Classe. Band XVIII. No. 8.
 b. Berichte der math.-phys. Classe. Jahrg. 1892. Heft 3. Leipzig 1892.
Leopoldina. Heft XXVIII. N. 15—18. Halle a. S. 1892.
Physikalischer Verein zu Frankfurt am Main:
 Jahresbericht für 1890—91. Frankfurt a. M. 1892.
Handbuch der Organischen Chemie v. Dr. F. Beilstein. Dritte Auflage. 10te Lieferung. (Band I. Liefer. 10.) Hamburg u. Leipzig 1892.
Oesterreichische Gesellschaft für Meteorologie u. Deutsche meteorologische Ges.:
 Meteorologische Zeitschrift 1892. Heft 10. Oktober. Wien.
V. Kuffnersche Sternwarte in Wien:
 Publicationen. II. Band. Wien 1892.
Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
 Mittheilungen. XXVIII. Jahrgang. N. 1—4. Prag 1889—90.
Akademie der Wissenschaften in Krakau:
 Anzeiger. 1892. Oktober. Krakau 1892.
Értekezések. (Forschungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaft.) XXI. Kötet, 3. Szàm. 1891. Budapest 1891.
Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
 Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 17. Band. Zürich 1892.
Naturforschende Gesellschaft in Zürich:
 a. Vierteljahrsschrift. 36. Jahrg. 3. u. 4. Heft.
 b. Generalregister der Publikationen u. Uebersicht ihres Tauschverkehrs. Zürich 1892.
Reale Academia dei Lincei:
 a. Atti. Seria quinta. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti. Vol. 1. Fasc. 8. 2° semestre.
 b. Classe di scienze morali storiche e filologiche.
  1. Serie quarta. Vol. X. Parte 2. Notizie degli Scavi 1892.
  2. Rendiconti. Serie quinta. Vol. I. Fasc. 9. Roma 1892.
Società Toscana di Scienze Naturali:
 Processi Verbali. Vol. VIII. Adunanza del dì 15. Maggio/3. Luglio 1892.
Circolo Matematico di Palermo:
 Rendiconti. Tomo VI. Anno 1892. Fasc. 5. Palermo 1892.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
 Bolletino delle pubblicazioni Italiane. N. 165. 1892. Firenze 1892.
The Royal Society:
 Proceedings. Vol. 52. N. 316. London 1892.
The Royal Astronomical Society:
 Monthly notices. Vol. 52. N. 9. Supplementary N. London 1892.
Nature. Vol. 47. N. 1201—1204. London 1892.
On Seedlings by Rt. Hon. Sir John Lubbock. Bart. Vol. I. II. London 1892. Gift of the author.
The Royal Dublin Society:
 a. Scientific Transactions. Vol. IV. (Series II.) N. IX—XIII.
 b. Scientific Proceedings. Vol. VII. N. S. Part 3. 4. Dublin 1892.
Department of Mines, Sidney:
 Records of the Geological Survey of New South Wales. Title to Vol. II. 1890—92. Vol. III. Part I. 1892. Sidney 1892.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

26. April. № 7. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. März.

Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiete der elliptischen Functionen.

Dritte Mittheilung

von

H. Weber.

§ 11.

Einführung der Theilung der elliptischen Functionen.

Es ist nun unser nächstes Ziel, immer unter Voraussetzung einer negativen Stammdiscriminante, die algebraische Natur der in den Formeln (F) und (G) auftretenden Functionen festzustellen.

Zunächst soll diesen Formeln eine etwas übersichtlichere Gestalt gegeben werden. Wir setzen

$$\Delta = -m \equiv 0,\ 1 \pmod 4,$$

ferner, wenn m in $m'm''$ zerlegt wird, so setzen wir

$$\delta = m',\ \delta'' = -m''.$$

Es sind dann m' und m'' ohne gemeinsamen Theiler und m' ist $\equiv 0$ oder 1, $m'' \equiv 0$ oder 3 (mod 4). Die Indices s, s', s'' mögen jeder ein vollständiges Restsystem nach dem Modul m, m', m'' durchlaufen. Ersetzt man in (F) den Index ν durch s, so erhält man den doppelten Werth, da s zweimal so viel Werthe annimmt als ν, nämlich $s = \nu,\ m-\nu$. Es folgt so:

$$\text{(F)}\quad \sum^{k} \Theta(k, \omega) = \frac{\tau}{4\pi\sqrt{m}} \sum^{s} (-m, s) \frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{s}{m}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s}{m}\right)}.$$

$$\text{(G)}\quad \sum^{k} \chi(m', k)\, \Theta(k, \omega) = \frac{\tau}{4\pi\sqrt{m}} \sum^{s', s''} (m', s')(-m'', s'') \frac{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}\left(\frac{s'}{m'} - \frac{s''}{m''}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s'}{m'}\right)\vartheta_{11}\left(\frac{s''}{m''}\right)}.$$

Ich benutze nun die Jacobische Bezeichnung, wie ich sie in meinem Buche „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen" Braunschweig 1890[1]) gebraucht habe; und es soll nun bewiesen werden, daß wenn

$$\text{(1)}\qquad \frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{s}{m}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s}{m}\right)} = 2KX_s = \pi\vartheta_{00}^2 X_s,$$

$$\text{(2)}\qquad \frac{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}\left(\frac{s'}{m'} - \frac{s''}{m''}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s'}{m'}\right)\vartheta_{11}\left(\frac{s''}{m''}\right)} = 2KY_{s',s''} = \pi\vartheta_{00}^2 Y_{s',s''}$$

gesetzt wird, X_s eine rationale Function von

$$\text{(3)}\qquad x_s = sn\left(\frac{2Ks}{m}\right)$$

$Y_{s,s'}$, eine rationale Function der beiden Größen

1) Die Citate mit Ell. F. sollen sich auf dies Buch beziehen.

$$x'_{s'} = sn\left(\frac{2Ks'}{m'}\right), \qquad x''_{s''} = sn\left(\frac{2Ks''}{m''}\right) \tag{4}$$

ist. Diese Größen x, x', x'' sind ihrerseits Wurzeln algebraischer Gleichungen, die rational von dem Modulquadrat $\varkappa^2$ der elliptischen Functionen abhängen, der Theilungsgleichung.

Wir beginnen mit X_s, das nach der Jacobischen Bezeichnung

$$X_s = \frac{H'\left(\frac{2Ks}{m}\right)}{H\left(\frac{2Ks}{m}\right)} \tag{5}$$

gesetzt werden kann.

Machen wir von der Formel Gebrauch

$$\sqrt{\varkappa}\, sn v = \frac{H(v)}{\Theta(v)} \tag{6}$$

und setzen zur Abkürzung

$$snv = x, \quad cnv = y, \quad dnv = z \tag{7}$$

so erhalten wir durch logarithmische Differentiation nach v

$$\frac{H'(v)}{H(v)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = \frac{yz}{x}. \tag{8}$$

Nun ist, wenn $D_m(x)$ eine ganze rationale Function von x^2 und $\varkappa^2$ bedeutet [1])

$$\Theta(0)^{m^2-1}\frac{\Theta(mv)}{\Theta(v)^{m^2}} = D_m(x^2), \tag{9}$$

also durch Differentiation:

$$\frac{1}{m}\frac{\Theta'(mv)}{\Theta(mv)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = \frac{2}{m^2}\frac{D'_m(x^2)}{D_m(x^2)}xyz,$$

also nach (8)

$$\frac{1}{m}\frac{\Theta'(mv)}{\Theta(mv)} - \frac{H'(v)}{H(v)} = \frac{2}{m^2}\frac{D'_m(x^2)}{D_m(x^2)}xyz - \frac{yz}{x}.$$

Setzen wir hierin nun

1) Ell. F. § 60.

$$v = \frac{2Ks}{m},$$

so verschwindet $\Theta'(mv)$, und x geht über in x_s, ebenso y und z in y_s und z_s, während $D_m(x^2)$ nicht verschwindet.

Es interessieren uns hier nur die Werthe von s, die relativ prim zu m sind, da für die anderen $(-m, s)$ verschwindet. Für ein ungerades m läßt sich dann y_s, z_s rational durch x_s ausdrücken. (Ell. F. § 64). Ein gerades m muß durch 4 theilbar sein, und man hat also (Ell. F. § 60 III)

$$sn \frac{m}{2} v = \frac{x y z A_{\frac{m}{2}}(x^2)}{D_{\frac{m}{2}}(x^2)},$$

und wenn hierin gleichfalls

$$v = \frac{2Ks}{m}$$

gesetzt und s ungerade vorausgesetzt wird, so folgt, daß x_s, y_s, z_s rational durch x_s^2 ausdrückbar ist.

Hieraus schließen wir also,

X_s ist eine rationale Function von x_s und ist also Wurzel einer Theilungsgleichung, und somit eine algebraische Function von x^2.

In dem rationalen Ausdruck von X_s durch x_s kommen außer x^2 nur rationale Zahlen vor.

§ 12.

Algebraische Darstellung von $Y_{s,s'}$.

Um $Y_{s,s'}$ algebraisch darzustellen, müssen einige Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen entwickelt werden, die zu den weniger bekannten gehören.

Es seien zunächst u, v zwei unabhängige Variable. Wir betrachten die Function

$$\Theta(u+nv)\,\Theta(u-v)^n.$$

In Bezug auf u ist dies Product eine Θ-Function der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, in Bezug auf v von der Ordnung $n(n+1)$; es kann daher als ganze rationale und homogene Function durch Theta-Functionen von u allein und von v allein dargestellt werden, und zwar von den Graden $n+1$ und $n(n+1)$. Der Quotient

$$\Theta(0)^{n(n+1)} \frac{\Theta(u+nv)\,\Theta(u-v)^n}{\Theta(u)^{n+1}\Theta(v)^{n(n+1)}} = \Psi(u,v) \tag{1}$$

ist also, wenn

$$\begin{aligned} x &= snu, & \xi &= snv, \\ y &= cnu, & \eta &= cnv, \\ z &= dnu, & \zeta &= dnv \end{aligned} \tag{2}$$

gesetzt wird, eine ganze rationale Function von x, y, z, ξ, η, ζ; wir können diese Function auch noch etwas genauer bestimmen.

Es ist nämlich

$$\Psi(u,v) + \Psi(u,-v)$$

eine gerade Function von u sowohl als von v und

$$\Psi(u,v) - \Psi(u,-v)$$

eine ungerade Function von beiden Variablen (einzeln betrachtet). Daraus ergiebt sich, daß $\Psi(u,v)$ dargestellt werden kann in der Form

$$P + xyz\xi\eta\zeta Q \tag{3}$$

worin P und Q ganze rationale Functionen von x^2 und ξ^2 sind.

Es ist noch zu beweisen, daß diese Ausdrücke auch ganze rationale Functionen von x^2 sind und daß sie nur rationale Zahlencoëfficienten enthalten.

Man kann sich hiervon leicht auf folgendem Weg überzeugen. Nach einer bekannten Jacobischen Formel (Fund. nova art. 52) ist

$$\Theta(u) = \Theta(0)e^{\int_0^u Z(u)du}, \quad Z(u) = E(u) - \frac{E}{K}u, \quad E(u) = \int_0^u dn^2 u\, du$$

also in $\Psi(u,v)$ eingesetzt:

$$\Psi(u,v) = e^{\int_0^{u+nv} E(u)du + n\int_0^{u-v} E(u)du - (n+1)\int_0^u E(u)du - n(n+1)\int_0^v E(u)du}.$$

Entwickelt man also

$$\frac{\Psi(u,v) + \Psi(u,-v)}{2} = P,$$

$$\frac{\Psi(u,v) - \Psi(u,-v)}{2xyz\xi\eta\zeta} = Q$$

nach aufsteigenden Potenzen von u und v, so erhält man Ausdrücke, die nur ganze positive Potenzen von x^2 und rationale

Zahlen enthalten. Setzt man P und Q als ganze rationale Functionen von x^2, y^2 mit unbestimmten Coëfficienten an, und entwickelt auch x^2, y^2 nach Potenzen von u und v, so ergiebt sich für jeden folgenden Coëfficienten eine lineare Gleichung, aus der er ohne Nenner berechnet werden kann. Nachdem dies festgesetzt ist, benutzen wir noch die Formel (9) des vorigen Paragraphen, in der wir m durch n ersetzen und erhalten

$$\frac{\Theta(0)^{n+1}\,\Theta(u+nv)\,\Theta(u-v)^n}{\Theta(u)^{n+1}\,\Theta(v)^n\,\Theta(nv)} = \frac{P+xyz\xi\eta\zeta Q}{D_n(\xi)}.$$

Setzen wir in dieser Formel zuerst

$$n = m', \quad u = \frac{2Ks''}{m''}, \quad v = \frac{2Ks'}{m'},$$

und sodann

$$n = m'', \quad u = \frac{2Ks'}{m'}, \quad v = \frac{2Ks''}{m''},$$

so ergiebt sich wegen der Periodicität der Θ-Function, daß

$$\left(\frac{\Theta(0)\Theta\left(2K\left(\frac{s'}{m'}-\frac{s''}{m''}\right)\right)}{\Theta\left(\frac{2Ks'}{m'}\right)\Theta\left(\frac{2Ks''}{m''}\right)}\right)^{m'}$$

und

$$\left(\frac{\Theta(0)\Theta\left(2K\left(\frac{s'}{m'}-\frac{s''}{m''}\right)\right)}{\Theta\left(\frac{2Ks'}{m'}\right)\Theta\left(\frac{2Ks''}{m''}\right)}\right)^{m''}$$

rationale Functionen von $x'_{s'}$, $x''_{s''}$ sind. Nun sind aber m', m'' relativ prim; wir können also die Zahlen μ', μ'' so bestimmen, daß

$$m'\mu' + m''\mu'' = 1$$

wird, und daraus folgt, daß auch

$$\frac{\Theta(0)\Theta\left(2K\left(\frac{s'}{m'}-\frac{s''}{m''}\right)\right)}{\Theta\left(\frac{2Ks'}{m'}\right)\Theta\left(\frac{2Ks''}{m''}\right)} \tag{4}$$

selbst eine rationale Function von $x'_{s'}$, $x''_{s''}$ ist. Den Ausdruck (2), § 11 können wir nun mit Hilfe der bekannten Formel

$$\vartheta'_{11} = \varkappa \vartheta_{01} \vartheta_{10} \vartheta_{00}, \qquad 2K = \varkappa \Theta(K)^2$$

so darstellen,

$$Y_{s', s''} = \frac{\Theta(0) H(K)}{\Theta(K)} \frac{H\left(2K\left(\frac{s'}{m'} - \frac{s''}{m''}\right)\right)}{H\left(\frac{2Ks'}{m'}\right) H\left(\frac{2Ks''}{m''}\right)}, \tag{5}$$

und wenn wir dies mit der rationalen Function von $x'_{s'}, x''_{s''}$

$$\frac{sn\left(2K\left(\frac{s'}{m'} - \frac{s''}{m''}\right)\right)}{sn\left(\frac{2Ks'}{m'}\right) sn\left(\frac{2Ks''}{m''}\right)} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} \frac{H\left(2K\left(\frac{s'}{m'} - \frac{s''}{m''}\right)\right) \Theta\left(\frac{2Ks'}{m'}\right) \Theta\left(\frac{2Ks''}{m''}\right)}{\Theta\left(2K\left(\frac{s'}{m'} - \frac{s''}{m''}\right)\right) H\left(\frac{2Ks'}{m'}\right) H\left(\frac{2Ks''}{m''}\right)}$$

dividieren, so ergiebt sich auf der rechten Seite von (5) genau der Ausdruck (4). Hieraus folgt, daß $Y_{s's''}$ eine rationale Funtion von $x'_{s'}, x''_{s''}$ ist, also selbst Wurzel einer Theilungsgleichung für den Divisor $m = m'm''$.

§ 13.

Lineare Transformation der Θ-Functionen mehrerer Veränderlichen.

Zur Untersuchung der Function $\Theta(k, \omega)$ auf der linken Seite der Formeln (F), (G) sind einige Sätze über die lineare Transformation der Θ-Functionen von mehreren Veränderlichen erforderlich, die zunächst in Erinnerung gebracht werden sollen.

Es sei

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum a_{\iota,\varkappa}\, x_\iota x_\varkappa \tag{1}$$

eine quadratische Form von p Veränderlichen, deren imaginärer Theil positiv ist, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sei ein System von p unabhängiger Veränderlichen. Wir definieren als ϑ-Function die $p$fach unendliche Reihe

$$\vartheta_{(\omega)}(u_1, u_2, \ldots u_n;\, a) = \sum^{\infty} e^{\pi i \varphi(x_1, x_2 \ldots x_p) + 2\pi i \sum^{\nu} x_\nu \left(u_\nu + \frac{h_\nu}{2}\right)} \tag{2}$$

wenn

$$x_\nu = n_\nu + \frac{g_\nu}{2}$$

gesetzt wird und n_ν die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft. Der Zahlencomplex

$$s = \begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_p \\ h_1, h_2, \ldots, h_p \end{pmatrix}, \tag{3}$$

worin g_ν, h_ν nur die Werthe 0 oder 1 haben, heißt die **Charakteristik** der ϑ-Function[1]). Die **lineare Transformation** dieser ϑ-Function besteht nun im Folgenden. Es sei

$$\alpha_\mu^{(\nu)}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots 2p$$

ein System von $4p^2$ ganzen Zahlen; wir schreiben diese Zahlen in ein Quadrat, das uns zugleich als Bezeichnung der Transformation dient:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_{2p}^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_{2p}^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{(2p)}, \alpha_2^{(2p)}, \ldots, \alpha_{2p}^{(2p)} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Die Zahlen α sollen aber noch den folgenden Relationen genügen:

$$\sum_{1,p}^{\iota}(\alpha_{p+\iota}^{(\nu)}\alpha_\iota^{(\mu)} - \alpha_{p+\iota}^{(\mu)}\alpha_\iota^{(\nu)}) = \pm 1, \text{ wenn } \nu - \mu = \pm p, \tag{5}$$
$$= \quad 0 \text{ in allen anderen Fällen.}$$

Wir führen an Stelle der Variablen u_ι neue Variable v_ι ein durch die lineare Substitution

$$u_h = \sum_{1,p}^{\iota} Q_\iota^{(h)} v_\iota, \qquad h = 1, 2, \ldots p, \tag{6}$$

worin die Substitutions-Coëfficienten durch

$$Q_\mu^{(\nu)} = \alpha_\mu^{(\nu)} + \sum_{1,p}^{\iota} \alpha_\mu^{(p+\iota)} a_{\iota,\nu} \tag{7}$$

definiert sind. Ferner definieren wir das Größensystem

$$b_{\mu,\nu} = b_{\nu,\mu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots p$$

durch die linearen Gleichungen

$$\sum^{\iota} Q_\iota^{(\nu)} b_{\iota,\mu} = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} + \sum_{1,p}^{\iota} \alpha_{p+\mu}^{p+\iota} a_{\iota,\nu}, \tag{8}$$

---

1) Ueber die Transformation der Thetafunctionen vergl. des Verfassers Abhandlungen „über die unendlich vielen Formen der ϑ-Function" Crelles Journal Bd. 74 und „Ueber die Transformationstheorie der Theta-Functionen, ins Besondere derer von drei Veränderlichen" Annali di Matematica Ser. II T. IX. Die Bezeichnung in diesen Abhandlungen weicht von der hier benutzten in sofern ab, als dort im Exponenten der Factor πi fehlt, so daß die Periode der ϑ-Function für jede einzelne Variable nicht 1 sondern πi ist. Die hier gewählte Bezeichnung ist aber in der Transformationstheorie unbedingt vorzuziehen.

woraus sich durch Combination mit (7) die bilinearen Gleichungen zwischen den a und b ergeben

$$\sum_{1,p}^{\iota',\iota} \alpha_{\iota'}^{(p+\iota)} b_{\iota,\nu} a_{\iota',\mu} = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} + \sum_{1,p}^{\iota} \alpha_{p+\nu}^{(p+\iota)} a_{\iota,\mu} - \sum_{1,p}^{\iota} \alpha_{\iota}^{(\mu)} b_{\iota,\nu}, \tag{9}$$
$$\mu, \nu = 1, 2, \ldots p.$$

Wir definieren endlich noch die Charakteristik

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} g'_1, & g'_2, & \ldots, & g'_p \\ h'_1, & h'_2, & \ldots, & h'_p \end{pmatrix} \tag{10}$$

durch

$$\left.\begin{aligned} g'_\nu &\equiv \sum_{1,p}^{\iota} (g_\iota \alpha_\nu^{(\iota)} + h_\iota \alpha_\nu^{(p+\iota)} + \alpha_\nu^{(\iota)} \alpha_\nu^{(p+\iota)}) \\ h'_\nu &\equiv \sum_{1,p}^{\iota} (g_\iota \alpha_{p+\nu}^{(\iota)} + h_\iota \alpha_{p+\nu}^{(p+\iota)} + \alpha_{p+\nu}^{(\iota)} \alpha_\nu^{(p+\iota)} \end{aligned}\right\} \pmod{2} \tag{11}$$

Wir führen nun eine homogene Function zweiten Grades

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \sum_{1,p}^{\iota,k} c_{\iota,k} v_\iota v_k$$

ein, deren Coëfficienten $c_{\mu,\nu}$ so bestimmt sind:

$$c_{\mu,\nu} = \sum^{\iota} Q_\mu^{(\iota)} \alpha_\nu^{(p+\iota)}. \tag{12}$$

Dann besteht folgende fundamentale Transformationsformel

$$e^{\pi i f(v_1, v_2, \ldots, v_p)} \vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p; a) = T \vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p; b), \tag{13}$$

worin T eine Constante, d. h. von $v_1, v_2, \ldots, v_p$ unabhängig ist.

Wenn (ε) die Charakteristik auf der linken Seite von (13) ist, so ist sie (ε') auf der rechten. Es wird aber für unsere spätere Anwendung genügen, die beiden Charakteristiken (ε), $(\varepsilon') = (0)$ zu setzen, wodurch sich die Formeln wesentlich vereinfachen. Diese Annahme setzt voraus, daß die Transformationszahlen α so gewählt seien, daß die Summen

$$\sum^{\iota} \alpha_\nu^{(\iota)} \alpha_\nu^{(p+\iota)} \equiv \sum^{\iota} \alpha_{p+\nu}^{(\iota)} \alpha_{p+\nu}^{(p+\iota)} \equiv 0 \pmod{2}, \tag{14}$$

also gerade Zahlen sind.

In meiner Abhandlung „über die unendlich vielen Formen der ϑ-Function" (Crelles Journal Bd. 74) habe ich die Constante T nach einer von Hermite herrührenden Methode durch die Discussion eines bestimmten Integrals auf die Berechnung einer mehrfachen Gauss'schen Summe zurückgeführt. Das Resultat ist für den Fall $(\varepsilon) = (0)$, $(\varepsilon') = (0)$ folgendes.

Es sei

$$\Delta = (-i)^p \sum \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{p,p}$$

die Determinante der Function $-if$, ferner r der absolute Werth der Determinante

$$\sum \pm \alpha_1^{(p+1)} \alpha_2^{(p+2)} \ldots \alpha_{2p}^{(2p)},$$

die wir von Null verschieden voraussetzen.

Dann erhält man für T, wenn man die Formel (12) nach allen Variablen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ zwischen den Grenzen 0 und 1 integriert,

$$T = \frac{1}{r^{p-1}\sqrt{\Delta}} \sum^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p} e^{-\pi i \sum\limits_{1,p}^{\lambda, h} \alpha_\lambda^{(h)} \lambda_\lambda \varrho_h}, \tag{15}$$

worin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul r durchlaufen und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ aus den linearen Gleichungen mit der Determinante r

$$\sum^{\iota} \alpha_\nu^{(p+\iota)} \varrho_\iota = \lambda_\nu \tag{16}$$

bestimmt sind.

Die Bestimmung des Vorzeichens von $\sqrt{\Delta}$ ist in der erwähnten Abhandlung gezeigt; es ergiebt sich daraus für den besonderen Fall, wo die $c_{\iota,\varkappa}$ in reellem Verhältniß stehen und etwa gleich $\tilde{\omega} c'_{\iota,\varkappa}$ sind, worin $c'_{\iota,\varkappa}$ reell, $\tilde{\omega}$ wesentlich imaginär ist,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-i\tilde{\omega}}^{\,p} \sqrt{\Delta'}, \tag{17}$$

worin $\sqrt{\Delta'}$ positiv, $\sqrt{-i\tilde{\omega}}$ mit positivem reellem Theil zu nehmen ist.

§ 14.

Θ-Functionen, deren Moduln in rationalem Verhältniß stehen.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß die Moduln unserer Θ-Function in rationalem Verhältniß stehen. Wir setzen demnach

$$a_{\iota,\varkappa} = \omega e_{\iota,\varkappa}, \tag{1}$$

worin die $e_{\iota,\varkappa}$ ganze Zahlen sind, während ω einen positiven imaginären Bestandtheil hat. Wir wollen voraussetzen, was wegen der Willkürlichkeit von ω die Allgemeinheit offenbar nicht beeinträchtigt, daß die $e_{\iota,\iota}$ gerade Zahlen seien.

Die symmetrische Determinante

$$m = \sum \pm e_{1,1} e_{2,2} \ldots e_{p,p} \tag{2}$$

ist eine positive ganze Zahl.

Es sollen ferner mit $\varepsilon_{i,k}$ die Unterdeterminanten von m bezeichnet werden, so daß

$$\begin{aligned} \sum^{i} e_{i,\mu} \varepsilon_{i,\nu} &= 0, & \mu \lessgtr \nu, \\ &= m & \mu = \nu. \end{aligned}$$

Es seien nun α, β, γ, δ irgend vier der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{3}$$

genügende ganze Zahlen und β von Null verschieden und durch m theilbar, also

$$\beta = m\beta'. \tag{4}$$

Wir können dann folgende Transformation bilden

$$S = \begin{Bmatrix} \alpha, & \ldots, & 0, & \gamma e_{1,1}, & \ldots, & \gamma e_{1,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \ldots, & \alpha, & \gamma e_{p,1}, & \ldots, & \gamma e_{p,p} \\ \beta' \varepsilon_{1,1}, & \ldots, & \beta' \varepsilon_{1,p} & \delta, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta' \varepsilon_{p,1}, & \ldots, & \beta' \varepsilon_{p,p} & 0, & \ldots, & \delta \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

die den Bedingungen (5) § 13 genügt, und wir wollen nun die Formeln des vorigen Paragraphen auf diesen Fall anwenden.

Aus (7), (8), (12) § 13 ergiebt sich durch Einsetzen der Werthe aus (5)

$$Q_{\nu}^{(\nu)} = \alpha + \beta\omega, \qquad Q_{\mu}^{(\nu)} = 0, \qquad \mu \lessgtr \nu \tag{6}$$

$$b_{\mu,\nu} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega} e_{\mu,\nu}, \tag{7}$$

$$c_{\mu,\nu} = \beta'(\alpha + \beta\omega)\varepsilon_{\mu,\nu}, \tag{8}$$

so daß also der am Schluß des vorigen Paragraphen angedeutete Fall hier eintritt. Die Determinante $|\varepsilon_{\mu,\nu}|$ ist nach einem bekannten Satz m^{p-1}, also wird die in dem Ausdruck für T vorkommende $\sqrt{\Delta}$ in unserm Fall

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-i\beta'(\alpha + \beta\omega)}^{\,p} \sqrt{m}^{\,p-1}. \tag{9}$$

Es ist ferner, wenn wir, falls p ungerade ist, β positiv voraussetzen,

(10) $$r = \beta'^{\nu} m^{\nu-1} = \frac{\beta^{\nu}}{m},$$

und die Gleichungen (16) des vorigen Paragraphen ergeben

(11) $$\beta \varrho_{\nu} = \sum^{\iota} \lambda_{\iota} e_{\iota,\nu}.$$

Setzen wir noch die positive quadratische Form

(12) $$\sum e_{\iota k} x_{\iota} x_{k} = \psi(x_1, x_2 \ldots x_{\nu}),$$

so erhalten wir für T den Ausdruck

$$T = \frac{\sqrt{m}^{\nu-1} \sum^{\lambda} e^{\frac{-\pi i \alpha}{\beta} \psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)}}{\beta^{p(p-1)} \sqrt{-i\beta'(\alpha+\beta\omega)}^{p}}.$$

Hier haben die λ je ein Restsystem nach dem Modul r zu durchlaufen. Vermehrt man aber die λ_{ν} beliebig um Vielfache von β, so ändert sich $\psi(\lambda)$ um ein Vielfaches von 2β; also bleibt die Exponentialfunction unter dem Summenzeichen ungeändert. Man kann daher die λ auf ein Restsystem modulo β beschränken, muß aber dann mit

$$\frac{r^{p}}{\beta^{p}} = \frac{\beta^{p(p-1)}}{m^{p}}$$

multiplicieren. Dann ergiebt sich

(13) $$T = \frac{\sum^{\lambda} e^{\frac{-\pi i \alpha}{\beta} \psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)}}{\sqrt{m} \sqrt{-i\beta(\alpha+\beta\omega)}^{p}}.$$

Es ist noch zu untersuchen, in wieweit die Bedingungen (14), § 13 befriedigt sind. Diese ergeben in unserem Fall

$$\alpha\beta' s_{\nu,\nu} \equiv 0, \qquad \delta e_{\nu,\nu} \equiv 0;$$

die zweite ist also nach unserer Voraussetzung, daß $e_{\nu,\nu}$ gerade sein soll, erfüllt. Nach einem leicht zu beweisenden, wenn auch vielleicht noch nicht ausgesprochenen Determinantensatz sind bei geradem p mit den sämmtlichen $e_{\nu,\nu}$ zugleich auch die sämmtlichen $s_{\nu,\nu}$ gerade und daher beide Bedingungen befriedigt. Bei ungeradem p ist dies nicht nothwendig und daher muß in diesem Fall im allgemeinen noch α oder β als gerade Zahl vorausgesetzt werden. Der Fall $p = 2$,

den wir vorzugsweise im Auge haben, verlangt diese Einschränkung nicht.

Setzen wir die Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_p = 0$, so geht die Function $\vartheta(u_1, u_2 \ldots u_p, a)$ über in

$$\sum^{x_1, x_2, \ldots, x_p} e^{\pi i \omega \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)} = \Phi(\omega), \qquad (14)$$

worin $x_1, x_2, \ldots, x_p$ alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe durchlaufen. Die Transformation (5) ergiebt dann nach der Formel (7)

$$\Phi(\omega) = T\Phi\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right), \qquad (15)$$

worin T durch (13) bestimmt ist. Um diese Formel anzuwenden, wäre es noch nothwendig, die mehrfache Gauss'sche Summe

$$\sum^{\lambda} e^{\frac{-\pi i \alpha}{\beta} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)}$$

zu berechnen, wozu ich die allgemeinen Methoden in meiner Abhandlung „Ueber die mehrfachen Gauss'schen Summen", Crelles Journal Bd. 74, gegeben habe.

Für den Fall $p = 2$ soll aber sogleich ein einfacheres Hilfsmittel angewandt werden, um diese Constante zu bestimmen.

§ 15.

Anwendung auf die Functionen $\Theta(k, \omega)$.

Die Functionen $\Theta(k, \omega)$, die auf der linken Seite der Formeln (F) und (G) vorkommen, gehören nun zu den im Vorigen behandelten Functionen $\Phi(\omega)$.

Nach § 10 (10) ist

$$\Theta(k, \omega) = \sum^{x,y} q^{2(ax^2 + bxy + cy^2)}.$$

Wenn wir also in den Formeln des vorigen Paragraphen setzen

$$e_{1,1} = 2a, \qquad e_{1,2} = b, \qquad e_{2,2} = 2c,$$
$$m = 4ac - b^2,$$

und wenn wir unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Zahlen verstehen, die den Bedingungen

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \beta \equiv 0 \pmod{m}$$

genügen, so ergiebt sich, wenn wir eine numerische Constante N_s einführen, nach (15) des vorigen Paragraphen

$$\Theta\left(k, \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = N_s(\alpha+\beta\omega)\,\Theta(k, \omega). \tag{16}$$

Die Constante N_s, die nach § 14 (13) den Ausdruck hat

$$N_s = \frac{-i\beta\sqrt{m}}{\sum\limits^{\lambda_1, \lambda_2} e^{\frac{-2\pi i\alpha}{\beta}(a\lambda_1^2 + b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2)}}. \tag{17}$$

läßt sich aber aus der Formel (F) selbst bestimmen mit Benutzung der Transformation der Function $\vartheta_{11}(v)$.

Setzen wir

$$v' = \frac{\omega}{\alpha+\beta\omega}, \quad \omega' = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega},$$

so ist nach einer bekannten Formel (Ell. F. § 34)

$$e^{-\pi i\beta v v'}\,\vartheta_{11}(v', \omega) = \text{const.}\,\vartheta_{11}(v, \omega),$$

woraus durch logarithmische Differentiation

$$-2\pi i\beta v' + \frac{1}{\alpha+\beta\omega}\,\frac{\vartheta'_{11}(v', \omega')}{\vartheta_{11}(v', \omega')} = \frac{\vartheta'_{11}(v, \omega)}{\vartheta_{11}(v, \omega)}.$$

Hierin setzen wir $v' = s : m$ und erhalten, wenn wir wieder $\beta = m\beta'$ setzen, und die Periodengleichung der Function $\vartheta_{11}(v)$ benutzen, nach der Formel

$$\frac{\vartheta'_{11}(v+s\beta'\omega, \omega)}{\vartheta_{11}(v+s\beta'\omega, \omega)} = -2s\pi i\beta' + \frac{\vartheta'_{11}(v, \omega)}{\vartheta_{11}(v, \omega)}$$

$$\frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{s}{m}, \omega'\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s}{m}, \omega'\right)} = (\alpha+\beta\omega)\frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{\alpha s}{m}, \omega\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{\alpha s}{m}, \omega\right)}. \tag{18}$$

Nun setzen wir in der Formel (F)

$$\sum^{k}\Theta(k, \omega) = \frac{\tau}{4\pi\sqrt{m}}\sum^{s}(-m, s)\,\frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{s}{m}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s}{m}\right)} \tag{19}$$

ω' für ω und wenden links die Formel (16), rechts die Formel (18) an. Dadurch kommt, da man unter dem Summenzeichen αs

durch s ersetzen darf:

$$\sum N_k \Theta(k, \omega) = \frac{\tau}{4\pi\sqrt{m}}(-m, \alpha) \sum^{s} (-m, s) \frac{\vartheta'_{11}\left(\frac{s}{m}\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{s}{m}\right)},$$

und also durch Vergleichung mit (19)

$$\sum N_k \Theta(k, \omega) = (-m, \alpha) \sum \Theta(k, \omega). \tag{20}$$

Diese Gleichung muß in Bezug auf ω identisch sein, und daraus ziehen wir folgenden Schluß.

Da die beiden Formen (a, b, c) und $(a, -b, c)$ dieselben Zahlen darstellen, so ist

$$\Theta(k, \omega) = \Theta(k^{-1}, \omega),$$

dagegen sind für zwei verschiedene und nicht entgegengesetzte Classen k, k' auch die Functionen

$$\Theta(k, \omega) \text{ und } \Theta(k', \omega),$$

von einander verschieden.

Denn jede primitive quadratische Form (a, b, c) stellt Primzahlen dar, und umgekehrt ist eine Primzahl nur durch die Formen zweier entgegengesetzen Classen darstellbar [1]). Wenn man also $\Theta(k, \omega)$ und $\Theta(k', \omega)$ nach steigenden Potenzen von q ordnet, so müssen, wenn die Classen k, k' weder identisch noch entgegengesetzt sind, in jeder dieser Functionen Potenzen von q vorkommen, die in der anderen fehlen.

Da nun andererseits, wie (17) zeigt, auch N_k für entgegengesetzte Classen denselben Werth hat, so kann (20) nur dann bestehen, wenn überhaupt alle N_k einander gleich und gleich $(-m, \alpha)$ sind; und hiernach erhält die Transformationsformel (16) die einfache Gestalt

$$\Theta\left(k, \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = (-m, \alpha)(\alpha + \beta\omega)\Theta(k, \omega). \tag{21}$$

---

1) Vgl. Schering, Liouvelle's Journale Bd. IV. Ser. 2°. 1859 und des Verfassers Abhandlung, Mathem. Annalen. Bd. 20. 1882.

§ 16.

Absolute Invarianten der Transformations-Gruppe $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$

Die linearen Transformationen

$$(\mathfrak{G}') \qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \beta = m\beta',$$

in denen $\beta \equiv 0 (\text{mod } m)$, bilden für sich eine Gruppe und in der Gruppe aller linearer Transformationen

$$(\mathfrak{G}) \qquad \begin{pmatrix}a, & b\\ c, & \partial\end{pmatrix}, \quad a\partial - bc = 1,$$

einen Theiler. Man kann die gesammte Gruppe $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}'$ ableiten, wenn man $\mathfrak{G}'$ mit gewissen in endlicher Anzahl vorhandenen Substitutionen

$$(\mathfrak{L}) \qquad \begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \varkappa, & \varrho\end{pmatrix}, \qquad \lambda\varrho - \varkappa\mu = 1,$$

zusammensetzt, die man so zu bestimmen hat, daß

$$(1) \qquad \begin{pmatrix}a, & b\\ c, & \partial\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \varkappa, & \varrho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$$

wird, oder

$$\begin{pmatrix}\varrho, & -\mu\\ -\varkappa, & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & \partial\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}.$$

Dies giebt für ϱ und μ die Bedingung

$$(2) \qquad \varrho b - \mu\partial \equiv 0 (\text{mod } m),$$

und wenn man also ϱ gleich dem größten gemeinschaftlichen Theiler von m und ∂ annimmt und $m = \varrho\sigma$ setzt, so kann man μ eindeutig aus (2) bestimmen, wenn man ein vollständiges Restsystem nach dem Modul σ dafür festsetzt. Da aber ϱ und μ relativ prim sein müssen, so können wir nur die unter den σ Werthen μ brauchen, die relativ prim zum größten gemeinschaftlichen Theiler e von ϱ und σ sind, deren Zahl

$$\frac{\varrho}{e}\varphi(e)$$

ist. Endlich werden zu jedem Werthsystem ϱ, μ für $\lambda, \varkappa$ eine beliebige unter den unendlich vielen Lösungen von $\lambda\varrho - \mu\varkappa = 1$

ausgewählt. Daraus ergiebt sich, daß wir in (1) jede Transformation von $\mathfrak{G}$ ein und nur einmal erhalten, wenn $\mathfrak{L}$ aus

$$\nu = \psi(m) = \sum \frac{\varrho}{e}\varphi(e) = m\prod\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

Elementen besteht (Ell. F. § 71). Hierin durchläuft im Summenzeichen ϱ die sämmtlichen Divisoren von m, im Productzeichen p die sämmtlichen in m aufgehenden Primzahlen. $\psi(m)$ ist aber auch der Grad der Transformationsgleichung der elliptischen Functionen für den Transformationsgrad m.

Die Invariante der elliptischen Functionen $j(m\omega)$ bleibt durch die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}'$

$$\omega' = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$$

ungeändert und nimmt durch die Substitutionen von $\mathfrak{L}$ ν verschiedene Werthe $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ an, die die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$F_m(\lambda) = F_m(\lambda, j(\omega)) = 0,$$

der sogenannten Invariantengleichung sind (Ell. F. § 72). Wir wollen eine Function von ω, die durch die Substitutionen einer Gruppe ungeändert bleibt, eine zu dieser Gruppe gehörige Function nennen. Ist nun u irgend eine zu der Gruppe $\mathfrak{G}'$ gehörige Function, die durch die Substitutionen $\mathfrak{L}$ die Werthe $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ annimmt, so bleibt

$$\sum_{1,\nu}^{\iota} \frac{u_\iota}{x-j_\iota} = \frac{\Psi(x)}{F_m(x)}$$

durch die Substitutionen der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$ ungeändert, und ist also rational außer durch x durch $j(\omega)$ ausdrückbar. Setzt man dann $x = j_1 = j(m\omega)$, so folgt

$$u = \frac{\Psi(j(m\omega), j(\omega))}{F'_m(j(m\omega))}. \tag{3}$$

Daraus der Satz

Eine zu der Gruppe $\mathfrak{G}'$ gehörige Function ist rational durch die beiden Invarianten $j(m\omega)$, $j(\omega)$ ausdrückbar und ist also Wurzel einer Transformationsgleichung.

Ich habe diesen Satz, der in der Theorie der Modulfunctionen von Klein-Fricke eine Hauptrolle spielt, in meinem Buche in

dieser Form nicht ausdrücklich ausgesprochen, und bin daher hier etwas ausführlicher darauf eingegangen.

§ 17.

Algebraische Natur der Function $\Theta(k, \omega)$.

Ich knüpfe wieder an die Formel (21) § 15 an, um aus den Functionen $\Theta(k, \omega)$ Functionen abzuleiten, die nach dem Satze des vorigen Paragraphen Wurzeln von Transformations-Gleichungen sind. Man erhält unter anderen solche Functionen, wenn k, k' zwei verschiedene nicht entgegengesetzte Classen sind, in den Quotienten

$$\Theta(k, \omega) : \Theta(k', \omega).$$

Um aus einer einzigen Function $\Theta(k, \omega)$ eine zur Gruppe $\mathfrak{G}'$ gehörige Function abzuleiten, dividieren wir sie durch ϑ_{00}^2, so daß die Formeln (F), (G) die Formen annehmen (§ 11)

$$(1)\quad \begin{aligned} \sqrt{m}\sum^{k}\frac{\Theta(k, \omega)}{\vartheta_{00}^2} &= \frac{\tau}{4}\sum^{s}(-m, s)\,X_s, \\ \sqrt{m}\sum^{k}(\chi(m', k)\frac{\Theta(k, \omega)}{\vartheta_{00}^2} &= \frac{\tau}{4}\sum^{s', s''}(m', s')(-m'', s'')\,Y_{s,s'}\,. \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Aenderung der Function $\Theta(k, \omega) : \vartheta_{00}^2$ durch lineare Substitution nach Ell. F. § 33, 34 und nach § 15 (21) untersuchen, so zeigt sich, daß diese Function durch die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

ungeändert bleibt, wenn

$$(\mathfrak{G}''')\quad \begin{aligned} &1)\ \ \alpha \equiv 1, \quad \delta \equiv 1 \pmod 2 \\ &2)\ \ \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0 \pmod 2 \\ &3)\ \ \beta \equiv 0 \pmod m \\ &4)\ \ (4m, \alpha) = 1. \end{aligned}$$

Die Substitutionen, die diesen Bedingungen genügen, bilden unter sich eine Gruppe $\mathfrak{G}'''$, die ein Theiler von $\mathfrak{G}'$ ist. Lassen wir die Bedingung 4) weg, so erhalten wir eine umfassendere Gruppe $\mathfrak{G}''$. Zu der letzteren gehört die Function $\Theta^2(k, \omega) : \vartheta_{00}^4$.

Ist m ungerade, so gehört zur Gruppe $\mathfrak{G}'''$ die Function

$$(2)\quad \sqrt{m}\,\frac{\vartheta_{00}(0, m\omega)}{\vartheta_{00}(0, \omega)} = \frac{1}{\sqrt{M}},$$

deren Quadrat den Jacobischen Multiplicator giebt, und die Function

$$\sqrt{M}\,\frac{\Theta(k,\omega)}{\vartheta_{00}^{3}}$$

kann rational ausgedrückt werden durch M und $\varkappa^2$. Ist $m \equiv 4 \pmod 8$, so gehört zur Gruppe $\mathfrak{G}'''$ der Quotient

$$\sqrt{m}\,\frac{\vartheta_{00}\left(0,\frac{m\omega}{2}\right)}{\vartheta_{00}(0,2\omega)} \tag{3}$$

und ist $m \equiv 0 \pmod 8$)

$$\sqrt{m}\,\frac{\vartheta_{00}\left(0,\frac{m\omega}{4}\right)}{\vartheta_{00}(0,4\omega)}. \tag{4}$$

Ueber die Formeln (1) möge noch folgende allgemeine Bemerkung Platz finden.

Die Wurzeln der Theilungsgleichung zerfallen in Reihen, die den einzelnen Wurzeln einer Transformationsgleichung entsprechen.

Adjungiert man eine Wurzel der Transformationsgleichung, so hängt die Bestimmung der Wurzeln der Theilungsgleichung, die der entsprechenden Reihe angehören, von einer Abelschen Gleichung ab. Die erste der beiden Formeln (1) leistet für diese Abel'sche Gleichung genau das, was die Gauss'schen Summen für die Kreistheilungsgleichungen leisten, nämlich die Bestimmung der Perioden der Wurzeln vom Index 2, und eine weitere Zerlegung in Perioden für den Fall eines zusammengesetzten Theilers giebt die zweite der Gleichungen (1).

Zusatz zu § 8 der zweiten Mittheilung.

Im § 8 ist für die Classenzahl einer positiven Stammdiscriminante Δ die Formel (1) abgeleitet

$$\left(\frac{T+U\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{h} = \frac{\prod\limits^{\beta}\sin\frac{\beta\pi}{\Delta}}{\prod\limits^{\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{\Delta}}, \tag{1}$$

worin α und β zusammen ein vollständiges Restsystem (modulo Δ) durchlaufen und

$$(\Delta, \alpha) = +1, \quad (\Delta, \beta) = -1$$

ist. Die weiteren Vereinfachungen, die Dirichlet mit Anwendung der Kreistheilungstheorie an diesen Ausdruck knüpft, wobei er vier verschiedene Fälle unterscheidet, lassen sich bei Anwendung unserer Bezeichnung sehr zusammenziehen.

Wir setzen

$$\Theta = e^{\frac{-2\pi i}{\Delta}},$$

dann

$$A(x) = \Pi(x-\Theta^\alpha),$$
$$B(x) = \Pi(x-\Theta^\beta),$$
$$F(x) = A(x)B(x),$$

so daß $F(x) = 0$ die irreducible Kreistheilungsgleichung ist Wir haben

(2)
a) $F(1) = \Delta$, wenn Δ eine ungerade Primzahl
b) $F(1) = 2$ „ $\Delta = 8$,
c) $F(1) = 1$ in allen übrigen Fällen.

Es ist ferner

$$(3) \quad \begin{aligned} A(x)+B(x) &= Y(x), & 2A(x) &= Y(x)+\sqrt{\Delta}\,Z(x), \\ A(x)-B(x) &= -\sqrt{\Delta}\,Z(x), & 2B(x) &= Y(x)-\sqrt{\Delta}\,Z(x), \end{aligned}$$

worin $Y(x)$ und $Z(x)$ ganzzahlige ganze rationale Functionen von x sind; daraus folgt

$$(4) \qquad Y^2(x) - \Delta Z^2(x) = 4F(x).$$

Die Formel (1) giebt

$$\left(\frac{T+U\sqrt{\Delta}}{2}\right)^h = \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{B(1)^2}{4F(1)}.$$

Wir setzen in den Fällen (2)

a) $Y(1) = \Delta z, \quad Z(1) = y, \quad y^2 - \Delta z^2 = -4,$
b) $Y(1) = 4z, \quad 2Z(1) = y, \quad y^2 - \Delta z^2 = -4,$
c) $Y(1) = y, \quad Z(1) = z, \quad y^2 - \Delta z^2 = 4$

und erhalten in allen drei Fällen

$$\left(\frac{T+U\sqrt{\Delta}}{2}\right)^h = \left(\frac{y+\sqrt{\Delta}\,z}{2}\right)^2,$$

woraus man noch schließen kann, daß h in den Fällen a), b) ungerade, im Falle c gerade ist.

Ueber die Spectralanalyse der Interferenzfarben optisch zweiaxiger Krystalle. I.

Von

Th. Liebisch.

Wenn in einem optisch zweiaxigen Krystall die Ebene der optischen Axen für rothes Licht senkrecht steht auf der Ebene der optischen Axen für blaues Licht, so muß der Krystall für eine bestimmte Wellenlänge des Lichtes einaxig sein. Eine genaue Bestimmung dieser mit der Temperatur veränderlichen Wellenlänge ist bisher nur in einem Falle ausgeführt worden. F. Lippich und V. von Zepharovich[1]) verbanden einen Axenwinkelapparat mit einem Spectroskop, in welchem an Stelle des Oculars ein Spalt angebracht war; die undeutlich erscheinenden Interferenzbilder wurden durch eine Cylinderlinse corrigirt. Mit Hülfe dieser Vorrichtungen zeigte Brookit aus Tirol[2]), in welchem die Ebenen der optischen Axen für rothes Licht parallel (001) und für blaues Licht parallel (010) liegen, an einer Stelle des Spectrums, welche der Wellenlänge $\lambda = 0{,}000555$ mm entsprach, eine unverkennbare, wenn auch nicht sehr scharfe einaxige Interferenzfigur.

Eine wesentlich einfachere Methode beruht auf der Spectralanalyse der Interferenzfarben, welche Platten, deren Grenzflächen senkrecht zur ersten Mittellinie stehen, im senkrecht einfallenden Licht zwischen gekreuzten Nicols zeigen. Wird die Platte so eingestellt, daß die Intensität des austretenden Lichtes ein Maximum ist, so fehlen in dem Spectrum alle Lichtsorten, für welche der Gangunterschied Γ der beiden gebrochenen Wellen in der Platte eine ganze Anzahl von Wellenlängen erreicht. Insbesondere fehlt die Lichtart, für welche die Platte gerade einaxig, der Gangunterschied also Null ist. Prüft man nun mehrere Platten von verschiedenen Dicken, so wird der schwarze Interferenzstreifen, welcher dem Werthe $\Gamma = 0$ entspricht, seine Lage im Spectrum behalten, während die übrigen Interferenzstreifen eine von der Dicke abhängige Verschiebung erfahren. Am einfachsten gestaltet sich die Beobachtung an einem Präparat, welches an verschiedenen Stellen ungleich dick ist; alsdann wird sich durch eine Verschie-

---

1) V. von Zepharovich, Zeitschr. f. Kryst. 8, 580; 1884.

2) In den von Zepharovich hinterlassenen Aufzeichnungen ist als Fundort angegeben: Nillbachgraben bei Virgen; vgl. F. Becke, N. Jahrb. f. Min. 1893. I. — 254 —.

bung des Präparates in seiner Ebene nur die Lage derjenigen Interferenzstreifen ändern, welche den von Null verschiedenen Werthen des Gangunterschiedes entsprechen.

Dieses Verfahren läßt sich sehr bequem an einem Mikroskope durchführen, welches auf einem drehbaren Objecttische zwei auf einander senkrecht stehende Schlittenführungen und an Stelle des gewöhnlichen Oculars ein Abbe'sches Mikro-Spectroskop mit einer Ångström'schen Wellenlängenscala besitzt[1]). Mit Hülfe dieser Vorrichtungen kann man die Interferenzfarben bestimmter Stellen eines Präparates der Reihe nach spectral zerlegen und in dem auf das Spectrum projicirten virtuellen Bilde der Scala sofort die Wellenlänge λ_0 des schwarzen Interferenzstreifens, welcher $\Gamma = 0$ entspricht, ablesen.

Die Untersuchung eines Präparates im senkrecht einfallenden Lichte unter dem Mikroskope hat gegenüber der Beobachtung im convergenten Lichte auch den Vorzug, daß leicht verfolgt werden kann, wie sich an verschiedenen Stellen eines inhomogenen Krystalls die Wellenlänge λ_0 ändert.

Endlich kann man auch die Abhängigkeit der Wellenlänge λ_0 von der Temperatur bestimmen, indem man auf dem Objecttische einen Erhitzungsapparat anbringt. —

Dieselbe Methode kann angewendet werden auf eine zur optischen Axe parallele Platte eines einaxigen Krystalls, in welchem der Charakter der Doppelbrechung das Vorzeichen ändert, wenn man von rothem zu blauem Lichte übergeht, um die von der Temperatur abhängige Wellenlänge zu bestimmen, für welche der Krystall isotrop ist. —

Die Untersuchung einer Reihe von Brookitkrystallen ergab, daß die Wellenlänge λ_0 nicht nur mit dem Fundorte wechselt, sondern auch zuweilen von dem Bau der Krystalle abhängig ist. Eine von Abbildungen begleitete Beschreibung werde ich in dem Neuen Jahrbuche für Mineralogie veröffentlichen.

Göttingen, Februar 1893.

---

1) Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891. S. 454, Fig. 245, 246; S. 469, Fig. 258, 259.

Versuche über Suspensionen. I.

Von

G. Bodländer in Clausthal.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.)

Um für die Lösung der Frage nach der Natur der Suspensionen Material beizubringen, erschien es wünschenswert, die Ursachen zu ermitteln, welche eine Suspension zu stören geeignet sind. In der Literatur finden sich vereinzelte Angaben[1]), daß Zusätze gewisser Stoffe zu Suspensionen eine Klärung derselben in kurzer Zeit bewirken; indessen fehlt es an systematischen Untersuchungen über die Natur der Körper und Körperklassen, sowie über die Mengenverhältnisse der einzelnen Stoffe, welche auf Suspensionen klärend einwirken.

Es wurde zunächst das Verhalten von Suspensionen von Kaolin in Wasser gegen Zusätze gelöster Stoffe untersucht. In einer Kaolinsuspension schweben erdige und glimmerartig-schuppige Teilchen, die auch nach sehr langem Stehen sich nicht vollständig absetzen. Zusätze gewisser Stoffe bewirken, daß das suspendirte Kaolin sich flockig zusammenballt und schnell zu Boden setzt. Diese Wirkung wird fast ausnahmslos von den elektrolytisch leitenden Körpern hervorgerufen; dagegen sind die Nichtleiter wirkungslos. Von letzteren wurden untersucht Methyl-, Aethyl-, Isobutylalkohol, Aethylaether, Acetaldehyd[2]), Paraldehyd[2]), Aceton[2]), Rohrzucker, Traubenzucker, Milchzucker, Phenol, β-Naphtol, Anilin. Organische Säuren — auch Pikrinsäure — klären Kaolinsuspensionen. Diese Verhältnisse ließen eine quantitative Feststellung der Wirkung der klärenden Substanzen wünschenswert erscheinen, um zu ermitteln, ob auch hierin sich ein Zusammenhang zwischen Leitungsvermögen und Klärungsvermögen ergiebt.

Die quantitative Untersuchung wurde so vorgenommen, daß eine Suspension von Kaolin in verschiedene gleich große Cylinder

---

1) Th. Scheerer, Einige Beobachtungen über das Absetzen aufgeschwemmter pulverförmiger Körper in Flüssigkeiten. Pogg. Ann. 82, 419—429. 1851.

Ch. Schloesing, Sur la précipitation des limons par des solutions salines très-étendues. Compt. rend. 70, 1345—48. 1870.

Adolf Mayer, Ueber die Einwirkung von Salzlösungen auf die Absetzungsverhältnisse thoniger Erden. Forsch. auf dem Geb. d. Agrikulturphysik von E. Wollny. II, Heft 3, 1879. (Nur im Auszuge zugänglich.)

Carl Barus, Subsidence of fine solid particles in liquids. Bull. U. St. Geol. Survey. Nr. 36. 1886. Amer. Journ. of Sc. (3) 37. 122.

2) Nur die ganz säurefreien Präparate sind wirkungslos.

von 9,3 cm Höhe und 3,7 cm Durchmesser eingefüllt wurde und teils mit bestimmten Zusätzen der zu prüfenden Stoffe, teils ohne solche stehen gelassen wurde. Die Wirkung eines Klärungsmittels ergab sich aus der Feststellung, um wieviel eine Suspension, die einen Zusatz erhalten hatte, nach Ablauf einer bestimmten Zeit weniger Kaolin enthält, als die nämliche Suspension ohne Zusatz.

Der Kaolingehalt einer Suspension wurde in einigen Versuchen durch Eindampfen eines bestimmten Volumens derselben (20 ccm) und Wägung des Rückstandes nach gelinder Erwärmung, eventuell unter Abzug der nicht flüchtigen Zusätze zum Wasser ermittelt. In den meisten Versuchen wurde die Kaolinmenge indirect durch Wägung eines bestimmten Volumens der Suspension bei bekannter Temperatur in einem Sprengel'schen Pyknometer festgestellt. Ist d die Dichte des suspendirten Kaolins, so verdrängen x Gramm desselben x/d Gramm Wasser, erhöhen also das Gewicht der Suspension gegen das Gewicht des gleichen Volumens Wasser von gleicher Temperatur um

$$s = x - \frac{x}{d}$$

Gramm. Es ist also

$$x = s\frac{d}{d-1}.$$

Die Dichte des Kaolins betrug 2,5. Es ergiebt sich daher die Menge des suspendirten Kaolins durch Division von s durch 0,6. Da die Menge des Kaolins in einer Suspension, wenn dieselbe eine Zeit lang ruhig gestanden hat, in den verschiedenen Tiefen verschieden ist, so mußten die Proben in allen Versuchen aus der gleichen Tiefe entnommen werden; dies geschah, indem die Pipette respective das Ansatzrohr des Pyknometers bis zu einer bestimmten Marke eingetaucht und dann in dieser Stellung fixirt wurde. Da in jedem Versuch die Suspension eine Höhe von etwa 8 cm einnahm, die Pipette aber nur bis zu 4,5 cm eingetaucht wurde, so war es ausgeschlossen, daß etwas vom Bodensatz angesaugt wurde. Mit jeder zu prüfenden Suspension waren zwei Cylinder gefüllt worden und der Kaolingehalt wurde durch Probenahme aus beiden Cylindern ermittelt. Es ergab sich immer eine ziemlich nahe Uebereinstimmung der beiden einander controllirenden Bestimmungen, sowohl wenn beide nach der Pyknometermethode ausgeführt wurden, als wenn eine nach dieser, die zweite durch directe Wägung erfolgte. Für alle Versuche diente eine Suspension des nämlichen geschlämmten Kaolins. Das von Th. Schuchardt in Görlitz

bezogene Präparat war frei von Sand und gab an Wasser keine löslichen Substanzen ab. Durch Behandlung mit Salzsäure wurde aus dem Kaolin eine 0,37 % Calciumcarbonat entsprechende Menge Kalk und eine Spur von Magnesia extrahirt. Nur für die Versuche der zweiten Reihe wurde durch Säuren gereinigtes Kaolin angewandt; für die Versuche der ersten Reihe diente das ungereinigte Präparat. Von demselben wurde eine größere Menge mit ausgekochtem destillirtem Wasser zu einem mäßig dicken Brei angerührt und aus diesem wurden durch Verdünnung mit Wasser die für die einzelnen Versuche dienenden Suspensionen bereitet.

Bei allen klärenden Stoffen ergab sich, daß die klärende Wirkung nicht proportional ist der Menge des Zusatzes. Von jedem Stoffe konnten bis zu einer bestimmten Grenze Zusätze zur Suspension gegeben werden, ohne daß die Suspension nach längerem Stehen weniger Kaolin enthielt, als eine unter sonst gleichen Bedingungen aufgestellte zusatzfreie Suspension. Zusätze über jene Grenze hinaus bewirkten dann eine Klärung, die um so vollständiger ausfiel, je weiter die Grenze überschritten war. In der folgenden Tabelle sind einzelne Versuche mitgetheilt, aus denen die Existenz eines Grenz- oder Schwellenwerthes der Einwirkung ersichtlich ist; die Auswahl ist eine willkürliche, da alle klärenden Substanzen dasselbe Verhalten zeigen.

Tabelle I.

Zugesetzte Substanz	Dauer des Absetzens	Temp.	100 ccm der Suspension enthalten		
			Zusatz		Kaolin, nach dem Absetzen
	Minuten		mg	mg-Aequiv.	g
Salzsäure (H Cl)	90	17,8°	0	0	0,6795
100 ccm Suspension enthalten vor dem Ab-			0,7274	0,020	0,6585
setzen (Nullpunkt)			0,9092	0,025	0,6735
0,8875 g Kaolin			0,9819	0,027	0,6020
			1,0819	0,030	0,4415
Schwefelsäure	70	20,5	0	0	0,7760
$\frac{1}{2}(H_2SO_4)$			0,5880	0,012	0,7490
Nullpunkt 1,0365 g			0,6860	0,014	0,7690
			0:7840	0,016	0,7740
			0,8575	0,0175	0,7725
			0,9065	0,0185	0,7590
			1,2250	0,025	0,6935
			1,3720	0,028	0,6075
			1,4210	0,029	0,4780

Zugesetzte Substanz	Dauer des Absetzens	Temp.	100 ccm der Suspension enthalten		
			Zusatz		Kaolin, nach dem Absetzen
	Minuten		mg	mg.-Aequiv.	g
Phosphorsäure $^1/_3$ (H_3PO_4) Nullpunkt 1,1110 g	88	17,5	0	0	0,8640
			3,2560	0,1110	0,8560
			3,7429	0,1276	0,8650
			4,2339	0,1443	0,8980
			4,5672	0,1554	0,8830
			4,8840	0,1665	0,8355
			5,2096	0,1776	0,2950
			5,5352	0,1887	0,0985
			11,7216	0,3996	0,0440
Baryumhydroxyd $^1/_2$ [$Ba(OH)_2$] Nullpunkt 0,9230 g	104,5	19,0	0	0	0,7280
			2,1347	0,0250	0,7135
			2,9886	0,0350	0,7250
			3,8425	0,0450	0,4235
Kaliumhydroxyd (KOH) Nullpunkt 0,9820 g	99	13,6	0	0	0,8000
			7,1570	0,1556	0,7775
			9,5427	0,2075	0,6505
			11,9283	0,2593	0,3465
Zinksulfat $^1/_2$ ($ZnSO_4$) Nullpunkt 1,0030 g	88,5	21,2	0	0	0,7595
			1,4104	0,0184	0,7385
			1,8805	0,0245	0,2900
Ammoniumnitrat (NH_4NO_3) Nullpunkt 1,0665 g	89	17,3	0	0	0,7975
			5,3300	0,0667	0,8215
			10,6600	0,1333	0,7785
			15,9900	0,2000	0,7640
			21,3200	0,2667	0,6940
			26,6500	0,3333	0,2350

Die Thatsache, daß erst oberhalb einer gewissen Concentrationsgrenze eine Einwirkung des Zusatzes auf die Suspension erkennbar wird, könnte bei den Säuren durch eine Abstumpfung derselben durch den kohlensauren Kalk erklärt werden, sodaß erst nach Auflösung desselben die freie Säure zur Geltung käme. Eine ähnliche Erklärung würde aber für die Basen und für die neutralen Salze nicht aufgestellt werden können und auch für die Säuren ist sie nicht ausreichend, da spätere Versuche mit gereinigtem, von

Calciumcarbonat freiem Kaolin dieselbe Erscheinung bei Säuren, Basen und Salzen ergaben.

Es giebt also für jeden, Kaolinsuspensionen klärenden Körper einen Schwellenwerth der Concentration, unter welchem er ohne Einfluß auf die Suspension ist, während oberhalb des Schwellenwerthes die klärende Einwirkung rasch mit der Concentration zunimmt.

Der Schwellenwerth ist eine für jeden Körper charakteristische Größe und für die Vergleichung der einzelnen Stoffe nach ihrer Wirksamkeit auf Suspensionen, wäre eine genaue Kenntniß dieses Werthes am meisten geeignet. Da sich aber zwischen mehreren unter ganz gleichen Bedingungen aufgestellten Suspensionen gewisse, wenn auch kleine Unterschiede im Kaolingehalt ergeben, so läßt sich die Grenze nicht scharf ermitteln, an welcher sich ein Einfluß eines Zusatzes eben bemerkbar macht. Sicherer schien es, für den Vergleich einen etwas höheren Grad der Klärung zu wählen. Es wurden deshalb diejenigen Mengen der wirksamen Stoffe bestimmt, deren Zusatz bewirkt, dass eine Suspension nach längerem Stehen doppelt so viel Kaolin absetzt als bei gleich langem Stehen ohne Zusatz. Die Versuchsdauer war gewöhnlich 90 Minuten, die Menge des in 100 ccm suspendirten Kaolins betrug zu Anfang eines jeden Versuches etwa 1 Gramm; nach 90 Minuten langem Stehen ohne Zusatz hatten sich 0,2—0,25 Gramm Kaolin abgesetzt. Die Menge des in der Suspension zu Beginn enthaltenen Kaolins, die Temperatur und die Zeitdauer des Absetzens konnten innerhalb gewisser Grenzen variiren, ohne daß bei dem gewählten Maaßstabe die Zahlen für die Wirksamkeit der einzelnen Substanzen sich änderten. Es ergab sich dies aus zahlreichen zu diesem Zwecke angestellten Versuchen.

In der nachfolgenden Tabelle II sind die wirksamen Stoffe nach den in Milligramm-Aequivalenten ausgedrückten Mengen geordnet, die zu 100 ccm Suspension gesetzt deren Kaolingehalt doppelt so stark erniedrigen als bloßes Absetzen ohne Zusatz in gleicher Zeit. Die von den einzelnen Substanzen dafür nöthigen Mengen wurden nie durch Extrapolation, sondern immer nur durch Interpolation innerhalb möglichst enger Grenzen berechnet, wenn nicht die Versuchsbedingungen direct den gesuchten Werth ergaben. Bei dem zum Vergleich gewählten Klärungsgrade steigt dieser sehr rasch bei geringer Vergrößerung des Zusatzes und deshalb führt die Interpolation zu sehr genauen Vergleichswerthen. Tastversuche ergaben zuerst die Grenzen, innerhalb derer einerseits eine Einwirkung überhaupt stattfindet und diese andererseits nicht

zu stark ist. Zwischen diesen Grenzen liegende wechselnde Mengen wurden dann von jeder Substanz zu drei bis vier Proben zugesetzt und deren Einwirkung wurde quantitativ bestimmt. Zur Controlle wurden in anderen Versuchen diejenigen Mengen verschiedener Substanzen, die die doppelte der spontanen Fällung bewirkten, gleichzeitig zu verschiedenen Proben derselben Suspension gesetzt und ihre Wirkung verglichen.

Tabelle II.

Zugesetzte Substanz		100 ccm der Suspension enthalten	
Name	Formel [1])	mg	mg.-Aequiv.
Bleiacetat	$^1/_2(Pb[C_2H_3O_2]_2)$	1,369	0,01085
Kupfervitriol	$^1/_2(CuSO_4)$	0,939	0,01180
Silbernitrat	$(AgNO_3)$	2,228	0,01313
Kaliumthonerde-Alaun	$^1/_4(KAl[SO_4]_2 + 12H_2O)$	1,833	0,01540
Zinksulfat	$^1/_2(ZnSO_4)$	1,728	0,02147
Salpetersäure	(HNO_3)	1,564	0,02490
Eisenammon-Alaun	$^1/_4(NH_4Fe[SO_4]_2 + 12H_2O)$	3,353	0,02780
Salzsäure	(HCl)	1,018	0,02800
Trichloressigsäure	$(C_2Cl_3O_2H)$	4,767	0,0293
Schwefelsäure	$^1/_2(H_2SO_4)$	1,445	0,0295
Baryt	$^1/_2(BaO_2H_2)$	3,560	0,04167
Ammonthonerde-Alaun	$^1/_2(NH_4Al[SO_4]_2 + 12H_2O)$	5,821	0,0515
Chlorcalcium	$^1/_2(CaCl_2)$	3,120	0,0563
Chlormagnesium	$^1/_2(MgCl_2)$	2,711	0,05747
Magnesiumsulfat	$^1/_2(MgSO_4 + 7H_2O)$	13,350	0,1088
Oxalsäure	$^1/_2(C_2O_4H_2)$	6,66	0,148
Phosphorsäure	$^1/_3(H_3PO_4)$	5,542	0,170
Kaliumhydroxyd	(KOH)	9,562	0,2083
Salmiak	(NH_4Cl)	12,28	0,2300
Ammoniumnitrat	(NH_4NO_3)	22,66	0,2833
Kaliumnitrat	(KNO_3)	30,47	0,302
Natriumhydroxyd	$(NaOH)$	15,99	0,4001
Chlorkalium	(KCl)	30,60	0,412
Chlornatrium	$(NaCl)$	32,39	0,555
Ammoniumsulfat	$^1/_2([NH_4]_2SO_4)$	101,14	0,5383
Kaliumsulfat	$^1/_2(K_2SO_4)$	220,00	2,537
Natriumcarbonat	$^1/_2(Na_2CO_3)$	405,60	7,540
Ammoniak	(NH_3)	365,20	17,5613

1) Die Gewichte beziehen sich auf wasserfreie oder wasserhaltige Substanz, je nachdem in der Klammer die entsprechende Formel angeführt ist; die Brüche vor der Klammer bezeichnen den Bruchtheil des Molekulargewichtes, der als Aequivalentgewicht angenommen wurde.

Aus den Zahlen dieser Tabelle ergiebt sich, daß auf die geprüfte Kaolinsuspension die sauer reagierenden Salze, resp. diejenigen, die nicht ohne hydrolytische Spaltung in Säure und Base stark erwärmt werden können, die stärkste Klärwirkung ausüben; es folgen erst die starken, dann die schwachen Säuren, die fixen Basen, die neutralen Salze und zuletzt das Ammoniak, ohne daß eine Körperklasse von der anderen scharf getrennt wäre. Wenn das Leitungsvermögen die Klärfähigkeit bedingte, müßten die starken Mineralsäuren die erste Stelle einnehmen. Daß dies nicht der Fall ist, wird darauf zurückzuführen sein, daß die Säuren nicht vollständig als solche zur Wirkung gelangten, sondern zum Theil durch das Calciumcarbonat, das dem Kaolin anhaftet, neutralisirt wurden. Die von dem Kaolin abfiltrirte Flüssigkeit enthielt, wenn Säuren zur Klärung angewandt waren, immer freie Säure, aber weniger als angewandt worden war und daneben das entsprechende Calciumsalz. Auf die hydrolytisch spaltbaren Salze wirkt in den großen Verdünnungen das Calciumcarbonat bei gewöhnlicher Temperatur wahrscheinlich nur wenig ein und deshalb wird ihre Wirkung nicht abgeschwächt. Um die störende Einwirkung des Calciumcarbonats zu umgehen wurde eine Entfernung desselben versucht.

Bei der Reinigung des Kaolins durch Behandlung mit überschüssiger Salzsäure bot die Entfernung der letzten Reste von Säure und Chlorcalcium durch Filtration oder Decantation Schwierigkeiten, weil das Kaolin in je reinerem Wasser es suspendirt war, sich um so schwieriger absetzte und trübe durchs Filter ging. Ein Hilfsmittel fand sich in der Anwendung von Kohlensäure, die, schon unter geringerem als Atmosphärendrucke im Wasser gelöst, Kaolinsuspensionen rasch klärt. Durch wiederholtes Auswaschen mit reinem Wasser, Einleiten von Kohlensäure und Decantiren gelang es, alle Chlorverbindungen von dem Kaolin zu trennen; die Kohlensäure wurde zuerst durch Waschen mit Wasser, zuletzt durch Einleiten von kohlensäurefreier Luft verdrängt.

Die mit der reinen Kaolinsuspension angestellten Versuche sind in der Tabelle III niedergelegt.

Tabelle III.

Zugesetzte Substanz		100 ccm der Suspension enthalten	
Name	Formel	mg	mg.-Aequiv.
Salpetersäure	(HNO_3)	0,1008	0,0016
Trichloressigsäure	$(CCl_3 . CO_2H)$	0,2595	0,0016
Chlormagnesium	$^1/_2 (MgCl_2)$	0,0758	0,0016
Salzsäure	(HCl)	0,0618	0,0017
Essigsäure	$(CH_3 . CO_2H)$	0,1020	0,0017
Bleiacetat	$^1/_2 (Pb[CH_3 . CO_2]_2)$	0,2622	0,0017
Schwefelsäure	$^1/_2 (H_2SO_4)$	0,0980	0,0020
Chininchlorhydrat	$(C_{20}H_{24}N_2O_2 . HCl + 2 H_2O)$	1,0450	0,0026
Chlorcalcium	$^1/_2 (CaCl_2)$	0,1634	0,0029
Natriumnitrat	$(NaNO_3)$	1,1320	0,0133
Ammoniakalaun	$^1/_4 (AlNH_4[SO_4]_2 + 12 H_2O)$	1,5490	0,0136
Weinsäure	$^1/_2 (C_4H_6O_6)$	1,0200	0,0136
Phosphorsäure	$^1/_3 (H_3PO_4)$	0,5368	0,0183
Baryumhydroxyd	$^1/_2 (BaO_2H_2)$	3,8205	0,0500
Oxalsäure	$^1/_2 (C_2O_4H_2)$	16,6430	0,3700
Natriumhydroxyd	$NaOH$	47,3760	1,1856

Bei dem Vergleiche der Werthe dieser Tabelle mit den entsprechenden der Tabelle II zeigt sich, daß das gereinigte Kaolin gegen Säuren und Salze weit empfindlicher ist als das Calciumcarbonat enthaltende; Basen wirken aber erst in stärkerer Concentration klärend auf die gereinigten Suspensionen ein als die ungereinigten. Der Grund hiervon ist vielleicht, daß dem gereinigten Präparate trotz des sehr häufig wiederholten Auswaschens noch chemisch nicht nachweisbare Spuren Salzsäure oder Kohlensäure anhaften, deren Menge unterhalb des Schwellenwerthes liegt und die deshalb die Bildung der Suspension nicht verhindern, deren Wirkung aber sich zu der geringer Zusätze von Säuren und Salzen addirt; von den Basen wird durch die anhaftende Säure eine gewisse Menge neutralisirt und deshalb ist ein stärkerer Zusatz von ihnen erforderlich um Klärung zu bewirken.

Welcher Ursache dies auch zuzuschreiben ist, die Thatsache selbst, daß minimale Zusätze zu den Suspensionen eine starke Wirkung ausüben, ist beachtenswerth. Salzsäure wirkt noch in einer Verdünnung von 1 Teil in fast $1^1/_2$ Millionen Teilen Wasser deutlich auf die Kaolinsuspension ein und nicht viel größere Concentrationen sind von Chlormagnesium, Schwefelsäure und anderen Säuren zur Klärung erforderlich.

Diese kleinen Mengen wirksamer Substanz lassen es ausgeschlossen erscheinen, daß eine chemische Einwirkung derselben auf das suspendirte Kaolin stattfindet. Die Menge des letzteren ist bis 10000 mal so groß als die Menge der Substanzen,

welche seine Ausfällung bewirken. Auch würde die Verschiedenheit der klärend wirksamen Stoffe gegen eine chemische Einwirkung derselben auf das Kaolin sprechen. Noch weniger kann man annehmen, daß eine Beschwerung des Kaolins durch die Absorption der aufgelösten Substanzen die mechanische Ursache der raschen Klärung der Suspensionen sei. Die Dichte des Wassers und seine Zähigkeit können nur in so minimaler Weise durch die Gegenwart der gelösten Stoffe modificirt sein, daß auch hierdurch nicht die Wirkung der Zusätze erklärt werden kann. Eher könnte man annehmen, daß zwischen dem Wasser und dem Kaolin eine gewisse schwache Anziehung besteht, vermöge welcher das Kaolin in der ungeklärten Suspension schwebend erhalten wird. Im Wasser gelöste Stoffe könnten vermöge ihrer stärkern Anziehung dem Kaolin das lose gebundene Wasser entziehen und es dadurch zum Absetzen bringen. Will man aber allgemein die Existenz einer Anziehung zwischen gelöstem Stoff und Lösungsmittel zugestehen, so dürfte nicht nur den Elektrolyten eine solche Anziehung zum Wasser zugeschrieben werden, sondern auch Nichtleiter müßten dieselbe ausüben. Der Annahme einer Anziehung zwischen Kaolin und Wasser widerspricht aber die Thatsache, daß Nichtleiter keine Klärung der Suspensionen von Kaolin bewirken, auch wenn größere Mengen von ihnen zugegen sind.

Dieser letztere Umstand macht einen Zusammenhang zwischen der Klärfähigkeit und Leitfähigkeit wahrscheinlich. Für diesen Zusammenhang spricht auch, daß, wie aus der Tabelle III hervorgeht, die besten Leiter, die starken Säuren, das stärkste Klärungsvermögen besitzen, während die schlecht leitenden Säuren, z. B. Phosphorsäure, auch geringe Klärwirkung ausüben. Ein sehr wichtiger Umstand ist ferner, daß die elektrolytisch einander aequivalenten Mengen der starken Säuren gleichen Einfluß auf die Suspensionen ausüben. Daß aequivalente Mengen Bleiacetat und Chlormagnesium dieselbe Wirkung ausüben, wie starke Säuren, kann wohl darauf zurückgeführt werden, daß in der äußerst starken Verdünnung diese Salze vollständig hydrolytisch gespalten sind und daß vorzugsweise die in ihnen enthaltene Säure zur Wirkung gelangt. Aehnliches kann auch für die übrigen stark wirkenden Salze angenommen werden, da dieselben schon in größerer Concentration durch Erwärmung teilweise in Säure und Base zerfallen. Daß die Essigsäure sich den starken Säuren anschließt, kann auf nahezu vollständige elektrolytische Dissociation in der enormen Verdünnung zurückgeführt werden. Daß, während nach Tabelle II die fixen Basen gut klären, der schlechte Leiter Ammoniak nur sehr wenig klärt, ist ein fernerer Beweis für den Zusammenhang zwischen

Klärvermögen und Leitvermögen. Im einzelnen treten allerdings mannigfache Abweichungen zwischen der Reihenfolge der nach der Leit- oder Klärfähigkeit geordneten Körper hervor; dieselben können nur zum Teil darauf zurückgeführt werden, daß die Klärfähigkeit in Verdünnungen untersucht werden konnte, in denen die Bestimmung der Leitfähigkeit versagt. Temperaturerhöhung verstärkt die Klärfähigkeit der meisten Stoffe etwas, aber weit weniger als ihr Leitvermögen. Welche Nebenwirkungen außer der elektrolytischen Dissociation das Verhalten der Körper gegen Suspensionen bedingen, läßt sich bisher nicht angeben. Auch läßt sich nicht mit Sicherheit feststellen, in welchem causalen Zusammenhang die Klärfähigkeit mit der Leitfähigkeit steht, solange nicht der empirische Zusammenhang genauer verfolgt ist.

Clausthal, Bergakademie. Februar 1893.

Ueber das Project eines Bauernparlaments zu Heilbronn und die Verfassungsentwürfe von Friedrich Weygandt und Wendel Hipler aus dem Jahre 1525.

Von

August Kluckhohn.

Sowohl die Darsteller der deutschen Geschichte im Zeitalter der Reformation von L. v. Ranke bis auf Fr. v. Bezold und G. Egelhaaf, als die Forscher auf dem Gebiete der Geschichte des Bauernkrieges verweilen mit Vorliebe bei den Reichsreformgedanken, womit sich die Führer einzelner Bauernhaufen, namentlich die des sogenannten hellen Haufens des Odenwaldes und des Neckarthals, im Frühjahr 1525 trugen. Da ist es vor allem das Project der Berufung eines Congresses von Abgeordneten verschiedener Landschaften nach Heilbronn, das die Aufmerksamkeit auf sich zieht. Und von den politisch denkenden Köpfen unter den Bauernräthen erregt in erster Linie der Feldschreiber oder Bauernkanzler Wendel Hipler, dem man die großartigsten Reformgedanken beilegt, die Theilnahme der Forscher. Zwar mußten gründliche und unbefangene Historiker sich längst überzeugen, daß bäuerliche Abgeordnete in größerer Zahl sich niemals in Heilbronn versammelt und noch weniger eine parlamentarische Thätigkeit daselbst entwickelt haben; aber an Stelle des Parlaments trat in manchen Geschichtsbüchern die sogenannte Bauernkanzlei, der man eine ausgedehnte Competenz beilegte. Auch der angebliche Heilbronner Reichsverfassungsentwurf, die vermeintliche Arbeit Wendel Hip-

lers, ließ sich, wenn man genauer zusah, weder mit dem geplanten Parlament, noch mit dem sogenannten Bauernkanzler in unmittelbare Verbindung bringen, erwies sich vielmehr als ein noch dazu sehr unselbständiges Werk eines kurmainzischen Beamten Weygandt in Miltenberg; aber es fehlte doch viel, daß man sich über den Ursprung dieses Reformprojectes, sowie über die wirklichen Verfassungspläne Hiplers und über sein Verhältniß zu dem an Reformentwürfen reichen Weygandt Klarheit zu verschaffen gesucht hätte. Vielmehr ist der jüngste Darsteller der deutschen Geschichte im sechszehnten Jahrhundert, G. Egelhaaf (S. 594 ff.), wieder in frühere Irrthümer zurückgefallen; er läßt von Hipler dem Bauernparlament zu Heilbronn einen Verfassungsentwurf vorlegen, den er als eine große staatsmännische That, auf welche die Augen der Nation gerichtet waren, feiert. Fr. v. Bezold (Gesch. der deutschen Ref. S. 493 ff.) steht zwar, wie es sich von ihm nicht anders erwarten läßt, dem fraglichen Verfassungsentwurfe kritischer gegenüber, aber er räumt ihm doch unter den verschiedenen Projecten der Bauern „die bedeutendste Stelle" ein und nimmt an, daß beide, Hipler und Weygandt, sich das Programm zu eigen gemacht haben, während doch kein Zeugniß dafür beigebracht werden kann, daß Hipler auf die sog. Reformation, die Weygandt ihm zusandte, irgend etwas gegeben oder sie gar geeignet gefunden habe, die Grundlage für eine vollständige Neugestaltung des Staats und der Gesellschaft zu bilden.

Es schien mir daher der Mühe werth zu sein, sowohl dem Project des Heilbronner Parlaments, als den Weygandt-Hipler'schen Reformgedanken in einer besonderen Untersuchung näher zu treten.

Bis in die ersten Tage des Monats Mai bildeten allgemein die 12 Hauptartikel die Grundlage, auf der die aufrührerischen Bauern sich zu einer christlichen Brüderschaft zusammen schlossen. Ein über das vage und vieldeutige Zukunftsbild eines göttlichen Regiments hinausgehendes Programm, einen greifbaren Plan, nach welchem eine Reform des Reichs, sei es mit, sei es ohne den Kaiser und die Stände, hätte durchgeführt werden können, tritt auch bei den Führern derjenigen Bauernhaufen, bei denen in den letzten Stadien der Bewegung bemerkenswerthe Projecte einer Reichsreform auftauchen, noch nicht zu Tage. Zwar verlangen schon zu Anfang des April die aufrührerischen Oehringer Bürger und die mit ihnen vereinigten Bauern in ihren Verhandlungen mit den Grafen von Hohenlohe, daß an die Stelle der 12 Artikel die in Aussicht genommene „neue Reformation"

treten solle, sobald diese (durch den „ganzen hellen Haufen“) aufgerichtet und beschlossen sein werde, und demgemäß heißt es auch in dem am 11. April abgeschlossenen Vertrage, daß er nur Gültigkeit haben solle bis zu jener Reformation [1]). Aber eben der „helle lichte Haufe“, zu dem sich die Oehringer Bauern mit den Odenwäldern und den Neckarthalern unter der Feldhauptmannschaft des Georg Metzler von Ballenberg vereinigten, verübte gegen den Willen des obersten Führers so furchtbare Gewaltakte — ich erinnere nur an die Weinsberger Gräuelthat —, daß man von ihm am wenigsten eine Verfolgung höherer politische Ziele erwarten konnte. So bildete denn auch noch um Georgi 1525, als Statthalter und Regiment mit dem vor Heilbronn liegenden hellen Haufen durch abgeordnete Räthe über eine friedliche Beilegung des Aufruhrs verhandelten, die erste und letzte Forderung, welche die Bauern erhoben, die Anerkennung der 12 Artikel; sie waren nur bereit, falls die Fürsten jene Artikel anzuerkennen sich verpflichteten, den einen oder anderen durch eine neue Bestimmung, „so gut und göttlichem Recht gemäß“ wäre, zu ersetzen, aber ohne daß ein Fürst oder sonst einer vom Adel oder auch ein Geistlicher dabei wäre, sondern „sonst hochgelehrte Leute und Doctoren, die dann von dem lichten und hellen Haufen dazu verordnet würden“ [2]).

Aber kaum sind 10 Tage vergangen, so zeichnen sich gerade die Führer des Odenwälder und Neckarthaler Bauernheeres durch Mäßigung und politisches Verständniß so sehr vor den Hauptleuten und Räthen anderer Haufen aus, daß eine von ihnen ausgehende, zu Amorbach am 4. Mai festgestellte Erklärung der 12 Artikel nebst Zusätzen nichts Geringeres bezweckte, als das Programm der Bauern auch dem Adel annehmbar zu machen, ja die ganze bäuerliche Bewegung in gesetzmäßige Bahnen zurückzuleiten, indem nur die Leibeigenschaft, der kleine Zehnte und der Todfall für immer beseitigt, die übrigen Leistungen und Pflichten aber bis auf eine künftige Reformation fortbestehen und der Obrigkeit wieder Gehorsam geleistet werden sollte [3]).

1) Oechsle, Beiträge zur Geschichte des Bauernkrieges (1830) S. 266, 267 ff.

2) Fritz von Lidnach an Markgraf Kasimir, d. am Montag sant Jorgentag im 25 jar (s. l.) im Bamberger Archiv, Bauernkriegsakten, Ansb. Serie, T. 1, fol. 104 u. 105.

3) Nach einem, um einen Tag später datirten Exemplar (s. Stälin, Wirtemberg. Gesch. IV, 1 S. 296 Anm. 1) abgedruckt bei Oechsle S. 272 ff. — In seiner eigenen Lebensgeschichte (s. Götz Graf von Berlichingen-Rossach S. 365) geht Götz von Berlichingen sowohl auf die Entstehung wie auf den Inhalt der Amorbacher Erklärung unter Betonung des eigenen Antheils an derselben näher ein.

Es ist nicht zweifelhaft, daß diese Wendung zusammenhängt mit dem Uebertritt des Götz von Berlichingen zu dem Bauernheere. Zwar bedürfen die Vorgänge, unter denen sich die Vereinigung des Ritters mit den Aufständischen vollzog, im Einzelnen noch immer der Aufhellung. Was Götz selbst in seiner Biographie von den Umständen erzählt, unter denen er in die christliche Brüderschaft aufgenommen und zum obersten Feldhauptmann erhoben wurde, wird man stets mit Mißtrauen ansehen müssen [1]). Aber so sehr auch der Autobiograph diesen Bericht zu seinen Gunsten, theils absichtlich, theils auch wohl durch das Gedächtniß getäuscht, gefärbt hat, so viel scheint doch festzustehen, daß Götz die zeitweilige Uebernahme der Hauptmannschaft vor allem an die Bedingung geknüpft hat, daß die Bauern dem planlosen Zerstören entsagten und vorläufig zum Gehorsam gegen die Obrigkeit und zur Leistung des größeren Theiles der hergebrachten Dienste und Lasten zurückkehrten. In seiner Lebensbeschreibung aber scheint er das allgemeine Versprechen, das er sich bei der Vereinigung mit den Bauern von den Räthen und Hauptleuten inbezug auf die Einschränkung der viel mißbrauchten 12 Artikel und die Beobachtung besserer Kriegszucht geben ließ, mit einem Vertrage verwechselt zu haben, dessen Gegenstand schon die Amorbacher Beschlüsse vom 4. Mai gewesen wären.

Es liegt aber auf der Hand, daß Götz bei dem großen Mißtrauen, das die Masse der Bauern ihm entgegen brachte, nicht neben einem Georg Metzler zum obersten Anführer erhoben worden wäre, wenn nicht die gemäßigte und zugleich auf die Gewinnung des Adels gerichtete Tendenz einflußreiche Vorkämpfer unter den Räthen und Hauptleuten gehabt hätte. Noch weniger ließe sich ohne diesen Umstand der Versuch erklären, durch die Amorbacher Beschlüsse die aufrührerische Bewegung zu zügeln. Daß dieser Versuch an der Widersetzlichkeit der Bauern, welche, weit entfernt, ihre vermeintlichen Freiheiten sich schmälern zu lassen, vielmehr die Urheber der neuen Artikel todt zu schlagen drohten, im Wesentlichen scheiterte, läßt den Muth derer, welche der zuchtlosen Masse entgegen zu treten wagten, nur um so größer erscheinen.

Unter den Männern, welche in dem Lager der Bauern die Sache der Mäßigung und Ordnung verfochten und politisch klar genug dachten, um die Vereinigung des Adels mit den Aufständi-

1) Götz Graf von Berlichingen Rossach, Gesch. des Ritters G. v. B. S. 68 ff. Vergl. dazu aus den Prozeßschriften S. 324, 348, 424.

schen in ihrer Bedeutung für beide Theile zu ermessen, steht Wendel Hipler in vorderster Reihe. Götz von Berlichingen bezeichnet ihn (Selbstbiographie S. 70) vor anderen als denjenigen, mit dessen Hülfe er jenen angeblichen Vertrag über die Rückkehr der Bauern zum Gehorsam oder richtiger die Amorbacher Deklaration zustande gebracht; er nennt ihn einen „feinen geschickten Mann und Schreiber, als man ungefähr einen im Reich finden sollt."

Wie Hipler zu den Bauern gekommen, und welche Rolle er zu Anfang bei ihnen gespielt, ist aktenmäßig noch nicht aufgeklärt. Nach Oechsle's Darstellung (S. 79 ff.), die sich auf ehemalige öhringische Archivalien stützt, zum Theil aber auch auf Denunciationen zu beruhen scheint, hätte der frühere Sekretär der Grafen von Hohenlohe, ein verschlagener, ehrgeiziger und habsüchtiger Mann, sich wegen seines nakten Egoismus sowohl mit seinen Herren wie mit seinen Nachbarn überworfen und aus Rache Bürger und Bauern gegen die Grafen aufgehetzt. Oechsle meint auch, daß Hipler mit Georg Metzler das Eindringen der Odenwälder in das Hohenlohische verabredet hätte, schreibt es aber zugleich seinem Einflusse zu, wenn in dem Vertrage der Bauern mit den Grafen Albrecht und Georg auf die Reformation Rücksicht genommen wurde, die durch den „ganzen hellen Haufen" aufgerichtet werden sollte. Die Vermuthung, daß Hipler, so bald er der Bewegung sich anschloß, ihr höhere Ziele steckte, gewinnt an Gewicht durch die Nachricht, daß er schon in Weinsberg, unmittelbar nach der fürchterlichen Osterscene, um die längst in Aussicht genommene Berufung Berlichingens an die Spitze des hellen Haufens sich eifrig bemühte, und in Neckarsulm, wo er seinen Zweck erreichte, auch den verständigen, aber leider von dem Bauernrathe verworfenen Vorschlag machte, anstatt der zuchtlosen, immer wechselnden Banden besoldete Lanzknechte in Dienst zu nehmen.

Von Hipler selbst haben sich 3 Briefe erhalten, die er am 10. Oct. und 18. Nov. 1525 — der dritte ist undatirt — an Götz von Berlichingen (Lebensbeschreibung desselben S. 413 ff.) gerichtet hat. Sie scheinen absichtlich unklar gehalten zu sein und sind um so vorsichtiger zu benützen, als sie die ausgesprochene Bestimmung hatten, in den Händen des Empfängers als Zeugnisse seiner Unschuld zu dienen. Wir brauchen daher dem Verfasser nicht zu glauben, wenn er wiederholt versichert, daß er gegen seinen Willen, verfolgt von seinen Hohenloheschen Feinden, nothgedrungen sich für einige Zeit in den Schutz der Bauern habe

begeben müssen, obwohl deren Werk ihm nicht gefallen. Gleichwohl scheint er darin Recht zu haben, daß er von Anfang an bemüht gewesen, zwischen dem odenwäldischen Adel, als dessen Diener er sich betrachtet habe, und den Bauern zu vermitteln. Daneben habe er auch den Bauern allerlei Schriften machen helfen, wie an den löblichen Bund zu Schwaben, auch an andere Fürsten und Herren, dazu Verträge mit Mainz, Wertheim, Rheineck. Er nimmt endlich auch, in voller Uebereinstimmung mit Berlichingen, das Verdienst in Anspruch, in Amorbach, wo er sich zuerst vertragsmäßig den Bauern angeschlossen haben will, zur Ermäßigung der 12 Artikel und zur Einschränkung der Leidenschaften der Bauern das Seinige beigetragen zu haben.

Wir dürfen nach alledem mit Sicherheit annehmen, daß, wenn irgend einer, so Wendel Hipler von Anfang an darauf ausgegangen ist, die bäuerliche Bewegung zu einer politischen Neugestaltung Deutschlands zu benützen, und daß es unter seiner eifrigen Mitwirkung geschah, wenn die Amorbacher Erklärung der 12 Artikel überall eine „gemeine Reformation“, bis zu deren Durchführung die einzelnen Artikel gelten sollten, in Aussicht nahm. Aber während man auf die allgemeine Durchführung der Beschlüsse vom 4. Mai verzichtete und nach wie vor auch die schlichte Anerkennung der ursprünglichen 12 Hauptartikel als die entscheidende Bedingung des Beitritts zu dem großen Bauernbunde hinstellte[1]), begann der Plan einer durchgreifenden Reform des Reichs insofern eine greifbarere Gestalt anzunehmen, als von den Hauptleuten und Räthen der Odenwälder und Neckarthaler beschlossen wurde, eine Versammlung von Abgeordneten einzelner Bauernhaufen aus verschiedenen Gegenden Deutschlands nach Heilbronn zu berufen.

In „der Peuerisch und Protestirende Krieg“ von Jakob Schlusser, einer mit Zusätzen vermehrten Verdeutschung des Gnodalius, der seinerseits im Wesentlichen eine lateinische Uebersetzung des P. Harer ist, findet sich p. 34, nachdem die Verträge des Odenwälder Haufens mit dem Statthalter des Erzbischofs von Mainz, d. Miltenberg am 7. u. 12. Mai, mitgetheilt worden sind, folgende Nachricht:

„Item nach Freytag nach Jubilate schirst sollen drey ver-

1) So Berlichingen und Metzler in ihrer Zuschrift an den Bischof von Würzburg vom 4. Mai bei Lorenz Fries, Gesch. d. B.-Krieges in Ostfranken, herausg. von Schäffler u. Henner I, 191 ff., während sich der Statthalter des Erzbischofs von Mainz in dem Miltenberger Vertrag vom 7. Mai allerdings auf die 12 Artikel „sammt der auch darin begriffenen Erklärung und denen dieser angehängten zu Amorbach verfaßten Artikel“ verpflichtet. Zimmermann I, 71.

ständig Mann aus Aschaffenburg und den Orten darumb gelegen, welche am allererfarnsten und beredtlichen seind, gesandt werden gen Heilprun, daselbst hin alle Versamblung der anderen Hauffen und (besser: auch) gleicherweiß beschrieben seind.

Item eine Ordnung und Reformation ist, für Jaren verruckt, auf Ordnung und Austrag Rechtens gestellt mit zwölf Hauptartikeln und derselben jeder in vier sonderlich Puncten declariert, die findet man zu Frankfurt, die mitzubringen oder auf Sonntag Cantate die gen Heilprun zu antworten Wendel Hiplern, dem Veldschreiber.

Item die Artikel, so zu Amorbach gestellt worden, seind zu Aschaffenburg bei Johan Schemingen zu forderen.

Item zu Frankfurt bei Mattheis Schlickarten die Artikel, so ich nächst bei ihnen gelassen, auch zu fordern".

Das ist die erste sichere Kunde, die wir von dem Plane, Abgeordnete der verschiedenen Bauernhaufen nach Heilbronn zu berufen, besitzen. Aber die Aufschlüsse, welche uns Schlussers Mittheilungen bieten, lassen noch mancherlei Fragen offen. Denn wir haben nicht etwa einen von den Führern des Bauernheeres verfaßten Beschluß in urkundlicher Form vor uns, sondern nur ein kurzes Referat darüber, das ein dabei Betheiligter niedergeschrieben hat. Das ergibt sich deutlich aus dem letzten Absatz, wo der Verfasser von sich selbst in der ersten Person redet.

Nach Heilbronn also, wohin aus dem soeben erst in den Bauernbund aufgenommenen Aschaffenburg drei der erfahrensten und beredtsten Männer gesandt werden sollen, ist eine Versammlung von Vertretern aller Haufen[1]) ausgeschrieben worden. Als Termin wird die Zeit nach dem 12. Mai oder der 12. Mai selbst (je nachdem man in dem „nach Freitag nach Jubilate schierst" auch das erste „nach" gelten läßt oder nicht) angegeben. Dazu stimmt es, daß im nächsten Absatz als der Tag, an welchem zu Heilbronn dem Wendel Hipler wichtiges Verfassungsmaterial übergeben werden soll, der 14. Mai genannt wird. Die Berufung der Versammlung müßte demnach, auch wenn wir die Veranstaltung derselben uns möglichst beschleunigt denken, schon in der ersten Woche des Mai beschlossen worden sein, schwerlich aber vor den Amorbacher Beschlüssen vom 4. Mai, die unsere Aufzeich-

1) Während nach Schlusser eine Versammlung aller Bauernhaufen nach Heilbronn ausgeschrieben war, wissen Oechsle und Andere nur zu berichten, daß nach Schwaben, an den Rhein und in den Elsaß geschickt worden sei. Von Thüringen ist hier keine Rede, vielleicht nur deßhalb nicht, als dort der Aufstand vor Anfang Mai von geringerer Ausdehnung war.

nung als bekannt voraussetzt. Denn wie man die „verrückter Jahren“ erschiene „Ordnung und Reformation“ (Friedrich III.) von Frankfurt mitbringen oder auf Sonntag Cantate nach Heilbronn Wendel Hipler, dem Feldschreiber, überantworten soll, so sind zu Aschaffenburg die zu Amorbach gestellten Artikel bei Joh. Schemingen zu haben. Ob etwa auch schon gedruckt? Das wird man bezweifeln müssen. Johann Schemingen stand oben an unter den 8 Vertrauensmännern, welche nach den Beschlüssen des 12. Mai, wie Schlusser berichtet, das ganze Erzstift in Eid und Pflicht nehmen sollten. Wir dürfen in ihm einen angesehenen Bürger vermuthen, wie es zu Frankfurt a. M. Matthäus Schlickart war, von dem man die Artikel fordern sollte, „so ich nächst bei ihm gelassen“. Welche Artikel hierunter zu verstehen sind, vermag ich ebensowenig zu sagen, wie ich den Verfasser der Aufzeichnung, der hier von sich in der ersten Person redet, festzustellen vermöchte. Offenbar handelt es sich um einen Mann von leitendem Einfluß. Da er es dem von ihm Beauftragten freistellte, aus Frankfurt die sog. Reformation Friedrich III. für ihn mitzubringen oder sie in Heilbronn dem W. Hipler auszuhändigen, so darf man vermuthen, daß er selbst an dem Bauerncongreß theilnehmen wollte.

Noch wichtiger für die Geschichte der projectirten Versammlung ist ein zweites Actenstück, das von W. Hipler, also von dem Manne verfaßt ist, dem eine leitende Rolle zu Heilbronn zugedacht war. Rommel, Gesch. von Hessen, III, 1. Anmerk. S. 208 ff. hat dieses Schriftstück schon 1827 aus dem Reg.-Arch. in Cassel zum Abdruck gebracht, Oechsle (S. 153 ff.) im Jahr 1830 aus dem Oehringer Archiv, Bensen, Gesch. des B.-K. in Ostfranken S. 277, kennt es aus Zweifel's Chronik von Rotenburg a. d. T., Lorenz Fries (I, 443) fand ein von Hipler selbst geschriebenes Exemplar unter anderen Bauernbriefen[1]). Man bezeichnet das

1) Das schon 1832 erschienene Werk: Walchner und Bodent, Biographie des Truchsessen Georg III. von Waldburg, wo sich, so weit ich zu erkennen vermag, S. 312 gleichfalls Hiplers Programm abgedruckt findet, ist mir leider nicht zugänglich. Es geschah mit Berufung auf diese jedenfalls seltene Publikation — auch die Würzburger Universitätsbibliothek besitzt sie nicht —, daß Baumann jenes Aktenstück bei dem Abdruck des „Schreibers des Trugsessen Georg“ (Quellen zur Geschichte des Bauernkriegs in Oberschwaben S. 589) fortließ. Daß im Uebrigen der den Maiereignissen am Neckar und am Rhein ferner stehende „Schreiber“ keine zuverlässige Auskunft über den Ursprung der sog. Heilbronner Verfassung geben kann, liegt auf der Hand. Er läßt zuerst einen Ausschuß bilden, der in Heilbronn berathen soll, wie eine Verfassung im Reich zu machen, und wen sie dazu verordnen wollen, ob Bürger oder Bauern. „Nachmalen kommen etliche der Bauernräthe zusammen, machten eine Verfassung einer Refor-

Aktenstück in der Regel als eine Instruction, die Hipler für den Besuch des Heilbronner Tags entworfen. Richtiger nennt es Baumann ein Programm; denn es handelt sich um eine Aufzählung und kurze Erörterung aller Punkte, worüber in Heilbronn nach Hiplers Meinung verhandelt werden soll („nachfolgend Sachen sind zu Heilbronn zu bedenken und zu betrachten“).

Die hier aufgeworfenen Fragen betreffen aber viel mehr die einheitliche Durchführung des Krieges als die in Aussicht genommene Reformation. Die Abgeordneten aller Haufen sollen nämlich einander mittheilen, unter welchen Bedingungen ein jeder die eroberten Flecken, Städte, Schlösser und Dörfer aufgenommen hat, und mit einander berathen, was daran zu bessern sei, wenn man noch mehr erobern würde. — Jeder Haufe soll ferner dem andern seine Feldordnung und andere Artikel zum Zweck der Vergleichung und Verbesserung vorlegen. — Es soll sodann berathen werden, was von jedem Haufen noch zu erobern sei, welchen Widerstand er darin finden könnte und welcher Hülfe er bedürfen würde; besonders wenn dieser odenwäldische Haufe das Stift Würzburg erobert hätte, daß er sich dann nur noch gegen Schwäbisch Hall wende. Die anderen Haufen sollen sich erklären, ob sie zu diesem Zuge auch mitwirken, oder ob sie stillsitzen wollen. Welcher Beistand gegen den schwäbischen Bund nöthig sein könnte? Wie man gegen Pfalz, Brandenburg, Baden, Hessen und die bayerischen Fürsten vorgehen soll, ob gütlich oder mit Ernst? Wie der Adel anderer Länder in die Vereinigung zu bringen wäre? Ob Fürsten, Herren und Adel für ihren Verlust an Zehnten, Ungeld, Handlohn aus den geistlichen Gütern angemessen entschädigt werden sollen? Ob man Unterstützung suchen soll bei ausländischen Fürsten, welche ihre armen Leute milder behandeln als andere, z. B. bei dem Kurfürsten von Sachsen? Wenn Gott soviel Glück gäbe, daß die Haufen zum Theil vermindert und der gemeine Mann an seine Arbeit gewiesen werden könnte, ob dennoch in dieser Gegend ein Aufgebot behalten werden, und wer der Hauptmann und Rath bleiben soll, um Ordnung, Friede und Recht zu handhaben?

Was dagegen zu thun, wenn der Kaiser fremde Soldaten ins Land bringen oder andere Fürsten Rüstungen vornehmen sollten? Wie man sich gegen den Kaiser verantworten, oder ob man ihm zuvorschreiten soll?

---

mation“, worauf der große Reformations-Entwurf folgt. Vielleicht ist dies die älteste Quelle für die Bedeutung, die man irriger Weise dem sog. Heilbronner Parlament in verfassungsgeschichtlicher Beziehung beigelegt hat.

Nach dem allen ist erst von einer noch in weitem Felde liegenden Reformation die Rede. Zunächst soll man sich über die Zeit und die Stadt, in der die Reformation vorzunehmen d. h. zu berathen wäre, verständigen. Sodann darüber, wer dazu erfordert werden soll, Gelehrte, Bürger oder Bauern, und wie viele? Ob man Fürsten, Herren und Edlen gestatten soll, eine Anzahl Räthe abzuordnen, um bei der Reformation die Widerpartei zu halten. — Wer von des gemeinen Mannes wegen alle notdürftigen Gebrechen vortragen soll, damit nach den Anträgen beider Theile die dazu verordneten Männer nach billigen Grundsätzen die Reformation verfassen mögen, jedoch unter der Hauptbedingung, daß die Beschwerden aufgehoben werden? — Von wem der Aufwand für die Verordneten und die Wortführer bestritten werden soll?

Man hat auf Oechsle's Versicherung hin (S. 153) allgemein angenommen, daß diese angebliche Instruction vor Würzburg entstanden und dort dem großen Bauernrathe der vereinigten odenwälder und fränkischen Heere zur Genehmigung vorgelegt worden sei. Ich halte diese Annahme aus verschiedenen Gründen für irrig. Einmal redet das Programm nur im Namen des Odenwäldischen und Neckarthaler Haufens, der für sich allein Würzburg erobern und dann auf Schwäbisch-Hall ziehen will, ohne der am 7. Mai vollzogenen Verbindung mit dem vor Würzburg lagernden fränkischen Haufen im mindesten zu gedenken. Sodann entspricht die maßvolle, einem Ausgleich mit Fürsten und Adel geneigte Gesinnung, die in den Artikeln zu unverholenem Ausdruck kommt, durchaus nicht dem Geist, der die fränkischen Bauern und die mit ihm vereinigten Würzburger Bürger beherrschte. Aus Lorenz Fries (I, 203 ff.) weiß man, wie hartnäckig und verblendet alle Erbietungen des dortigen Domkapitels, selbst die Anerkennung der 12 Artikel, zurückgewiesen wurden, wenn nicht auch das Schloß der Zerstörung preisgegeben würde, so daß nicht allein Götz von Berlichingen, sondern selbst Florian Geyer seinem Unwillen und Zorn freien Lauf ließ. Und wie Götz, so hat auch Hipler nach der Niederwerfung des Aufruhrs das fränkische Heer beschuldigt, ihre bei den Odenwäldern und Neckarthalern erfolgreichen Bemühungen, die Leidenschaften zu mäßigen, vereitelt zu haben. Endlich ergiebt sich aus der Antwort, welche die vor Würzburg vereinigten fränkischen Bauern nebst den Würzburger Bürgern am 9. Mai den Wortführern der Besatzung des Frauenberges gaben (L. Fries I, 205) auf das Unzweideutigste, daß sie das, was sie Reformation nannten, nicht etwa von einem Congreß der Abgeordneten aller Bauernhaufen, sondern von der Landschaft des

Herzogthums Franken erwarteten. Wie hätte man den verbissenen, kurzsichtig-partikularistischen Bauernführern die Hipler'schen Artikel zur Genehmigung vorlegen dürfen? Daß es geschehen, beruht lediglich auf einer Combination Oechsle's.

Nicht anders verhält es sich mit der Behauptung, daß von dem großen Bauernrath neben Wendel Hipler noch Peter Locher von Külsheim und Hans Schickner von Weißlensburg nach Heilbronn abgeordnet worden seien Diese beiden Männer finden wir allerdings am 13. Mai zusammen mit W. Hipler in Heilbronn thätig, sie handelten aber nicht, soviel wir zu erkennen vermögen, im Auftrage und mit Vollmacht des großen Würzburger Bauernrathes, sondern nur im Namen der Odenwälder und Neckarthaler Vereinigung, der sie beide angehörten. Sie waren nämlich mit W. Hipler kaum in Heilbronn angekommen — wenn sie anders an den ursprünglich festgesetzten Termin sich hielten —, als durch den Sieg, den das Heer des Schwäbischen Bundes unter dem Truchsessen von Waldburg bei Böblingen über die Württemberger und Schwarzwälder Bauern am 12. Mai erfocht, die Situation auch für die Neckarthaler und Odenwälder sich plötzlich in gefährlicher Weise umgestaltete. Die 3 Abgeordneten zu Heilbronn, schon am 13. Mai über die große Niederlage unterrichtet, suchen nun sofort Vertheidigungsanstalten zu treffen, sie rufen die Jaxt- und Kocherthaler, sowie die Oehringer zu Berathungen nach Weinsberg, begeben sich dann selbst in das Neckarthal, wollen erst in Laufen, dann in Weinsberg ein Feldlager errichten, aber überall fehlt es in Stadt und Land an genügendem zuverlässigen Anhang, so daß die letzte Hoffnung sich auf das Heer vor Würzburg richtet. Heilbronn hat Hipler schon am 13. Mai mit seinen Collegen verlassen. Nehmen wir selbst an, daß sie schon mehrere Tage zuvor dorthin gekommen wären, so hätten sie doch nicht die Zeit gefunden, große Reformpläne zu entwerfen. Es sollte daher in der Geschichte des Jahres 1525 ebensowenig von einem Heilbronner Verfassungsentwurf wie von einem Bauernparlament die Rede sein. Aber auch der Ausdruck „Bauernkanzler" entspricht den Thatsachen nicht, wenn anders damit gesagt sein soll, daß dieser sog. Kanzler die Geschäfte aller vor Würzburg vereinigten Haufen führte. Seine Autorität reichte nicht über das Herrschaftsgebiet der vereinigten Heere des Neckarthales und des Odenwaldes hinaus und bewährte sich auch hier in den Tagen der Gefahr schlecht genug.

Aber ist nicht von Heilbronn eine Manifestation von allgemeiner Bedeutung, ein Schreiben an den Adel in Franken nicht allein, sondern auch in den umliegenden Landschaften ausgegangen?

Oechsle bringt (S. 281) das Aktenstück, wodurch der Adel weit und breit zum Beitritt zu der christlichen Vereinigung aufgefordert werden sollte, mit der Versicherung zum Abdruck (S. 155), daß es Hipler in Heilbronn eins seiner ersten Geschäfte habe sein lassen, jenes Schreiben zu entwerfen. Daß es aus der Feder des Feldschreibers in Heilbronn hervorgegangen, glaubt er mit Sicherheit daraus schließen zu dürfen, daß es in dem „Original“ des Oehringer Archivs heiße: „Diese Schrift ist von W. Hiplern begriffen in Heibronn“ (s. Oechsle, Vorrede XX, Anm.).

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß wir in dem abgedruckten Dokument nicht eine Originalausfertigung, sondern nur ein undatirtes Concept vor uns haben, welches, gleich anderen Schriften Hiplers, noch bei seinen Lebzeiten in die Hände der Grafen von Hohenlohe gekommen zu sein scheint (Gesch. des Götz von Berlichingen S. 413). Ein ausgefertigtes Exemplar ist meines Wissens nirgends zum Vorschein gekommen, was doch höchst wahrscheinlich der Fall sein würde, wenn an alle jene Herren vom Adel geschrieben worden wäre, auf die der Verfasser des Concepts in den der Hauptadresse (die Ritterschaft des Landes Franken, gemeiniglich und sonderlich) nachfolgenden Notizen hinweist: „desgleichen etlichen andern sondern Geschlechtern vom Adel mut. mutand. Man mag auch in andern umliegenden Landen denen vom Adel schreiben.“ Darauf folgt eine Reihe von Angaben, allgemeinen und persönlichen. An alle diese aber soll geschrieben werden im Namen von „Hauptleut und gemein Versammlung zu N. und N.“

Das Ausschreiben selbst beginnt mit der Klage, daß geistliche und weltliche Fürsten den Armen nicht allein das Wort Gottes seit langem vorenthalten, sondern sie auch mit unerträglichen Neuerungen und Auflagen bis zu gänzlicher Erschöpfung beschwert und auch den Adel sehr geschädigt haben. Dabei haben sich insbesondere die geistlichen Fürsten viel arglistiger als Juden und Türken bewiesen. Daher sind sie, die Bauern, zum Aufstand („in Versammlung“) bewogen worden, obwohl sie gern der weltlichen Obrigkeit gehorsam wären. Indem sie aber besorgen, von großen Fürsten und Herren, namentlich den geistlichen, nicht erhört zu werden, während sie bei manchen weltlichen Fürsten und gemeinem Adel viel christliche Liebe und Treue, auch Förderung des Wortes Gottes wahrgenommen haben, so bitten sie in aller Unterthänigkeit und um christlicher brüderlicher Liebe willen, daß die Adressaten gemeiner Lande Beschwerden erwägen, zur Ablegung derselben verhelfen und zur Erreichung eines besseren Standes ihretwegen mit des Reiches löblichem Regiment, auch weltlichen Für-

sten und Herren, ihren Obrigkeiten, freundliche Unterhandlung beginnen[1], auch sich von ihnen nicht abwenden und darüber in 10 oder 12 Tagen eine genügende Erklärung („förderlichen unverlängten Verstand") geben wollen. Denn in „solcher Gebrechlichkeit und Beschwerden" noch länger zu verharren, sind sie keineswegs gemeint.

Es handelte sich also um den Versuch, die Ritterschaft Frankens und der umliegenden Landschaften für die Bauernbewegung zu gewinnen. Man erkennt aber leicht, daß es zu der Zeit, wo die Schlösser weit und breit in Flammen standen und ein großer Theil des Adels in dem erzwungenen Anschlusse an den einen oder anderen Bauernhaufen seine einzige Rettung sah, ganz an den Voraussetzungen fehlte, von denen jenes Schreiben ausging. Wir werden es richtiger in die Tage der beginnenden Bewegung, noch vor die Uebernahme der Hauptmannschaft vonseiten Berlichingens setzen, also in die Zeit, wo es noch möglich schien, daß Bauern und Adel einander gegen die Fürsten die Hand reichen, und die Ritterschaft ihre Niederlage vom Jahre 1523 im Bunde mit den Bauern wieder wettmachen würde. Es war nicht allein Götz von Berlichingen, sondern ein wachsender Kreis von Verwandten und Freunden, welche, wie die Briefe bei Berlichingen-Rossach S. 399 und 402 ff. zeigen, noch um Ostern 1525 der Meinung waren, die Zeit sei dem Adel günstig, wenn er sie rasch zu nützen verstehe. Man hatte guten Grund, in Briefen nicht offen auszusprechen, was man bei den eiligst betriebenen Berathungen der Nächstgesessenen an „Wegen, die den Sachen dienstlich und gemeinem Adel nützlich", zu empfehlen hatte. Zu denjenigen Bauernfreunden aber, mit denen Götz schon damals im geheimen Einverständniß war, gehörte sicherlich Hipler. Was konnte näher liegen, als daß er den Versuch machte, die Hauptleute und das gesammte Bauernheer zu einem dem Adel entgegenkommenden Schritte zu bewegen. In dem Bauernrathe freilich konnte, wenn ihm anders der Entwurf jenes Schreibens vorgelegt wurde, die gemäßigte Gesinnung und die zahme Sprache, die hier zum Ausdruck kamen, unmöglich gefallen.

Ich habe bisher von dem fraglichen Rundschreiben als von einer Arbeit Hiplers gesprochen. Als von ihm zu Heilbronn verfaßt, war ja das im Oehringer Archiv aufbewahrte Exemplar gekennzeichnet. Von wem die betreffende Notiz herrührt, sagt Oechsle nicht. Wahrscheinlich entstammt sie schon der Zeit, als man in den aufgefundenen Papieren des Bauernschreibers nach An-

1) Diese Stelle ist in dem Oechsle'schen Abdruck verderbt.

klagematerial forschte. Seine Autorschaft wird man aus seiner Handschrift geschlossen haben. Weshalb man aber Heilbronn als Entstehungsort angenommen, läßt sich nicht sagen. Man kann jedoch, da Hipler oft genug in Heilbronn gewesen sein wird, diese Annahme gelten lassen, auch wenn man die zweite Woche des Mai, wo Hipler sich nachweisbar in Heilbronn aufgehalten, als Entstehungszeit verwerfen muß. Dagegen hat es mit der Autorschaft Hiplers eine eigenthümliche Bewandtniß, die bis jetzt meines Wissens von keiner Seite bemerkt worden ist.

Vergleicht man nämlich das fragliche Schreiben mit den von Weygandt aus Miltenberg herrührenden und von ihm an Hipler gesandten Schriftstücken verfassungsgeschichtlichen Inhalts, so findet man darunter eins, das bis auf einige wenige Aenderungen und Zusätze wörtlich damit übereinstimmt (L. Fries I, 441). Diese Zusätze betreffen in erster Linie Beschwerdeartikel, die nach Weygandts Intention dem Ausschreiben beigelegt werden sollten [1]). Dann wird zum Schlusse noch einmal versichert, daß man sich gern „aller christlichen Gehorsam und Billichkeit" weisen lassen wolle. Ferner stimmen Eingangs- und Schlußformel schon deshalb nicht überein, weil Weygandt dies von ihm verfaßte Schreiben nicht allein für „etliche Geschlecht vom Adel", sondern auch für die Reichsstädte bestimmt hatte. So bemerkenswerth demnach auch die Modificationen waren, denen Hipler den Vorschlag Weygandts unterwarf, so bewies er doch, indem er das Wesentliche sich aneignete, daß er auf das Urtheil des anderen etwas gab. Wer aber war Weygandt? [2])

Ueber Weygandts Persönlichkeit, Leben und Wirken sind wir nur sehr dürftig unterrichtet. Daß er kurmainzischer Keller zu Miltenberg im Odenwald war, frühzeitig sich der Reformation an-

---

1) Statt: „so bitten wir in aller Unterthänigkeit" u. s. w., heißt es: „so schicken wir euch unser anliegend beschwerden, bittend in aller unterthänigkeit, durch gots christlicher und bruderlicher lieb willen: wollet der armen groß beschwerde, die alle in schriften nit verfast, aber durch euren verstand woll ermessen werden mogen, und sonderlich diese ausgetruckte, die, als wir hoffen, zu ablegung aller beschwerden uns armen nit allein, sondern den gemeinen stetten und adel nützlich, christlich und furtreglich, dazu weltlichen fursten und obrickeiten nit schedlich sein sollen, erwegen, uns mit rath und furderung zu ervolgung bessers stands etc.

2) Der Name wird verschieden geschrieben. Stumpf und Zimmermann z. B. schreiben Weigand, Oechsle und Bensen: Weigant, L. Fries: Waygand, Weygand und in der Unterschrift des abgedruckten Briefs Weygant; Stälin endlich hat Weygandt und verdient um so mehr Beachtung, als er sich auf ein Schreiben im Württ. St. A. bezieht.

schloß und ihre Ausbreitung begünstigte, an der Revolution des Jahres 1525 aber in viel geringerem Grade als der ihm befreundete W. Hipler offenen Antheil nahm, sondern mehr in der Stille mit seiner Feder in ihrem Dienste thätig war, das ist eigentlich alles, was wir über Weygandts Leben und Wirken wissen. Noch am 3. Mai will er in dem Bauernlager zu Amorbach nur auf Befehl der Hauptleute erschienen sein, welche, nach einer Nachricht, von ihm, dem Kurmainzischen Finanzbeamten, 600 fl. aus der erzbischöflichen Kasse verlangten, nach einer anderen Nachricht aber ihm zu seinem eigenen Schaden ein Anlehen abpreßten[1]). Daß er bis dahin der bäuerlichen Vereinigung wenigstens äußerlich noch nicht angehörte, dafür spricht auch der Umstand, daß man ihm erst zu Amorbach urkundlich bezeugte, er habe sich mit Weib und Kind in die Verbrüderung begeben, und daß man zugleich bei Verlust von Leben und Gut Jedermann gebot, ihn ganz ungeschätzt, unbeleidigt und unbedrängt, wie einen anderen Mitbruder, zu halten. Aber aus der schriftstellerischen Thätigkeit, die Weygandt im Interesse der Bewegung entwickelte, ergiebt sich zur Genüge, daß er schon seit Wochen mit ihr lebhaft sympathisirte, indem er von der in gemäßigte Bahnen zu leitenden Revolution eine Umgestaltung der öffentlichen Verhältnisse Deutschlands im demokratisch-socialistischen Sinne erhoffte.

Den Entwurf zu einem Ausschreiben an Adel und Städte, den er seinem Gesinnungsgenossen Hipler zusandte, habe ich schon besprochen und dabei auch bemerkt, wie weit sich Hipler Weygandts Vorschlag aneignete. Merkwürdiger aber, als das Ausschreiben selbst, sind die „Artikel“, die Weygandt ihm beigefügt wissen wollte, Hipler aber bei dieser Gelegenheit noch unbenützt ließ. Es sind jedoch weniger Beschwerdeartikel, wie sie das Rundschreiben einmal bezeichnet, als Reformvorschläge oder kurz hingeworfene Gedanken über politische, wirthschaftliche und kirchliche Verbesserungen. Man wird sie zumeist unpraktisch, weil unter den damaligen Verhältnissen wenigstens unausführbar, aber zum Theil auch zukunftsreich finden, indem sie auf Ziele hinweisen, welche die Gegenwart erst erreicht hat.

Der Verfasser verlangt ungehinderte Predigt des göttlichen Wortes durch geistliche Diener, welche nach dem Wort Gottes (durch die Obrigkeit) gesetzt und gegeben werden, ohne daß für die Gemeinde das Recht der Wahl und der Absetzung gefordert

1) Das eine berichtet Zimmermann (II, 67) aus „Bundesakten“; das andere Stälin, IV, 1, 297.

wird. Alle Klöster dagegen sollen zu gemeinem Nutzen gebraucht, aller Bettel abgestellt, alle gegenwärtigen Pfründeninhaber auf eine Einnahme von 100 fl. (Bischöfe von 1000 fl.) beschränkt, alles übrige aber sammt den Kirchenschätzen und Kleinoden an die weltliche Obrigkeit und „gemeinen Nutzen“ oder, wie es an anderer Stelle heißt, zu Erhaltung gemeinen Rechts, des Reichs Sachen und Ordnung dienen. Außerdem sollen aus den geistlichen Gütern, die also alle zur Säkularisation bestimmt erscheinen, die weltlichen Fürsten, Herren, Städte und Edle, für die Verluste, die sie an Zoll, Ungeld und Schätzung erleiden, entschädigt werden. Zölle sollen nur noch so weit entrichtet werden, als zur Erhaltung von Wegen, Stegen und Brücken nöthig ist. Das Ungeld und andere directe Steuern, so wie das Hauptrecht (Besthaupt) werden beseitigt und der Handlohn (Laudemium) ermäßigt. Auch die Leibeigenschaft soll wegfallen; ebenso bittet man, wegen des kleinen Zehnten Einsehen zu haben und ihn zu beseitigen, während Fürsten, Herren, Städten und Edlen alle ihre erblichen Rechte, große Zehnten, Gült, Zins und Dienste erhalten bleiben sollen. Die Jagd wird einem Jeden auf seinem Erdreich frei stehen, ebenso der Fischfang in fließendem Wasser, so weit nicht erbliches oder erworbenes Recht entgegensteht.

Mehrere Artikel handeln unter der Versicherung, daß man gern kaiserlicher Majestät und weltlicher Obrigkeit gehorche, von der Besserung der Gerichtsbarkeit, von der Bestellung der Landgerichte und des Kammergerichts mit fleißigen, eine rasche und billige Justiz sichernden Richtern und mit einem Fiskal, welcher von Amtswegen das Unrecht straft, das an den Armen begangen wird. Jedes Orts soll ein Hauptmann mit etlichen vom Adel bestellt werden, das kaiserliche Recht zu beschirmen, Urtheile zu vollstrecken und daneben auf Kaiser, Fürsten und des Reichs anliegende Geschäfte zu warten. Das Alles mag von geistlichen Gütern bestritten und daneben auch der Adel erhalten werden, während man Bauern und Fußvolk zur Arbeit anhalten soll. Es entsprach einer weit verbreiteten Forderung, daß die großen Kaufmannsgesellschaften (Fuggereien) abgeschafft, so wie, daß eine gemeine vollwerthige Reichsmünze geprägt würde. Von da war nur noch ein Schritt zu dem Verlangen der Einführung von einerlei Maß und Gewicht in allen deutschen Ländern. Zum Schlusse wird gebeten, um alles, was aus den vorgeschlagenen Reformen sich ergiebt oder sonst zu christlicher Ordnung nutz und nöthig sein mag, berathen und abfassen zu lassen, das Reichsregiment mit 12 vom Adel, 12 von Reichsstädten, 12 von gemeinem Volk und 7

christlichen Lehrern oder Predigern zu verstärken, welche bei Treuen und Eiden nicht von einander treten sollen, sie haben denn durch Stimmenmehrheit alle Stücke beschlossen. Endlich sollen Leute verordnet werden, welche des Reiches und alle christlichen Sachen hinfort handeln und vollstrecken, „nicht mit Pomp, großer Zehrung und Verlängerung, wie bisher geschehen ohne alle Fruchtbarkeit.“

Es begreift sich, daß Hipler und andere Führer der bäuerischen Bewegung ein so weit aussehendes Programm, das die Interessen des Adels und des Bürgerthums zugleich befriedigen sollte, nicht für geeignet hielten, den Adel, um den es ihnen zunächst zu thun war, zu gewinnen.

Aber wenn auch Weygandts Artikel eine offizielle Verwendung nicht fanden, so blieben sie doch nicht ganz ohne Frucht. Die Amorbacher Deklaration der 12 Artikel nebst Zusätzen ist, wie eine Vergleichung lehrt, mit unter ihrem Einfluß entstanden. Auch der Vorschlag, die weltlichen Fürsten und Herren vom Adel für das, was sie an Zehnten, Ungeld, Handlohn nachlassen würden, aus geistlichem Gut zu entschädigen, hat Hipler sich in dem für die Heilbronner Versammlung entworfenen Programm angeeignet. Andere ansprechende, weil maßvolle und an das Bestehende anknüpfende Reformgedanken freilich wurden durch den ungestümen Lauf der Ereignisse alsbald überholt, so namentlich der Vorschlag, die Ausführung des geplanten Verfassungswerks dem durch 43 Vertrauensmänner verstärkten Reichsregiment zu übertragen.

Nach allem Vorausgehenden brauche ich nicht zu sagen, daß ich die fragliche Schrift Weygandts nicht später als in die Mitte des Monats April setze. Ist diese Annahme richtig, so kann er sich nicht auf das vorliegende Aktenstück beziehen, wenn er in einem Briefe an Hipler vom 18. Mai sagt: Ich habe Euch jüngst einige Artikel u. s. w. zugeschickt.

Aber auch der weitere Inhalt des Briefes, auf den ich zurückkommen werde, läßt es nicht zweifelhaft erscheinen, daß mit den jüngst übersandten Artikel nicht die im Anfange der Bewegung entstandene Schrift, sondern der sog. Heilbronner Verfassungsentwurf gemeint ist. Daß man dies, nachdem Oechsle einmal den falschen Weg mit so grosser Zuversicht betreten hatte, so lange verkennen konnte, ist ein neuer Beweis dafür, wie viel noch immer daran fehlt, daß die wichtigsten Dokumente zur neueren Geschichte mit derselben Sorgfalt geprüft werden, die man den Urkunden des Mittelalters schon lange angedeihen läßt. Der vorliegende Fall wird aber dadurch noch frappanter, daß man nur den seit 10 Jah-

ren in vollständiger Ausgabe vorliegenden Lorenz Fries (I, 431 ff.) nachzusehen braucht, um sofort das Richtige zu erkennen.

Fries erzählt nämlich (I, 431), daß er unter anderen Briefen eine „Ordnung“ gefunden, die der Keller zu Miltenberg, Friedrich Weygandt, „der auch der Odenwäldischen Brüder einer gewesen, begriffen und einem, Wendel Hipler genannt, gen Würzburg in das Lager zugesandt, der die fürter den Hauptleuten, zu bessern, zustellen sollt“ [1]). Unmittelbar darauf gelangt der schon erwähnte Brief Weygandts vom 18. Mai („dem ehrbaren, achtbaren Wendel Hiplern; in abwesen: den Hauptleuten des hellen, lichten Haufens, meinen günstigen Junkern, Herren, Freunden und lieben Brüdern“) zum Abdruck, und dann heißt es bei Fries weiter (S. 434): „Nun folgt hernach die Ordnung, davon oben Meldung beschieht, also anfangend: Item welcher Gestalt ein Ordnung oder Reformation zu Nutz und Frommen aller Christenbrüder zu begreifen und aufzurichten sei.“ Die nun folgende Reformation füllt im Druck 7 Seiten aus. S. 441 aber fährt der fränkische Geschichtschreiber fort: „Neben obverlauteter Ordnung hat auch der gemeldete Weygandt eine Schrift begriffen, welcher Gestalt er für gut bedacht, an etliche Geschlechter vom Adel und Reichsstädte zu schreiben“, worauf dieses Rundschreiben nebst den uns bekannten „Artikeln“, die er neben obberührter Missive mit zuschicken für gut angesehen, zum Abdruck kommen. Es kann also gar kein Zweifel darüber bestehen, daß L. Fries unter den „Artikeln“, auf die Weygandt in seinem Briefe vom 18. Mai Bezug nimmt, den angeblichen Heilbronner oder Hipler'schen Verfassungsplan versteht, während die „Artikel“, die er Weygandt dem Entwurfe eines Rundschreibens an Adel und Reichsstädte beifügen läßt, bestimmt sind, in den Kreisen der Ritterschaft und des städtischen Bürgerthums für die bäuerliche Bewegung Propaganda zu machen. L. Fries irrt nur darin, daß er die beiden letzteren Schriftstücke in eine zu späte Zeit versetzt: er läßt sie offenbar erst nach der „Ordnung oder Reformation“ entstehen. Ob auch erst nach dem Briefe Weygandts vom 18. Mai? Das wäre doch nach der damaligen Lage der Dinge kaum denkbar, und doch müßte in jenem Briefe neben der „Reformation“ auch von den anderen Artikeln die Rede sein, wenn sie nach jener von Weygandt an Hipler gesandt worden wären.

1) Diese Worte lassen darauf schließen, daß die „Ordnung“ oder der „Reformation“, die Fries vor sich hatte, nicht allein von Weygandts Hand geschrieben war, sondern noch von einer Bemerkung begleitet war, die dem Geschichtsschreiber zu der Behauptung Veranlassung gab, daß der Entwurf nach des Einsenders Meinung den Hauptleuten in dem Lager vor Würzburg vorgelegt werden sollte.

Also auch Lorenz Fries ist an dieser Stelle, an der so viele gestrauchelt sind, von Flüchtigkeit nicht ganz freizusprechen [1]).

Was nun den angeblich Hipler'schen, in Wahrheit Weygandt'schen Verfassungsentwurf anbetrifft, den zum ersten Mal Oechsle (S. 285 ff.) nach 2 Abschriften aus den öhringischen Archiven und nach einem Exemplar im k. Staatsarchiv in Stuttgart, dann Bensen nach „Zweifel's Original“ in der Rothenburger Chronik zum Abdruck brachte [2]), bis mit Lorenz Fries ein verbesserter Text erschien, so ist diese Arbeit schon wegen ihrer fast vollständigen Uebereinstimmung mit der sogenannten Reformation Friedrich III., jener viel besprochenen Flugschrift aus dem Jahre 1523, so häufig zum Gegenstande einer eindringenden Kritik gemacht worden, daß es an dieser Stelle nur weniger Bemerkungen bedarf [2]).

1) Den richtigen Sachverhalt hat schon A. S. Stumpf, in seinen Erfurt 1802 erschienenen „Denkwürdigkeiten der deutschen, besonders fränkischen Geschichte“, erkannt. Indem er Heft 2 seine Skizze der Geschichte des Bauernkrieges, wie schon Oechsle, Vorrede Anmerk., und Bensen S. 586 Anm. 5 bemerkt haben, ganz dem Lorenz Fries entnahm, erkannte er auch mit demselben dem Keller zu Miltenberg den großen Reformationsentwurf zu. Da er aber andererseits in seiner Oberflächlichkeit so weit ging, Weygandt auch die Urheberschaft der 12 Hauptartikel zuzusprechen, so fiel es Oechsle nicht schwer, ihn alles Credits bei der Nachwelt zu entkleiden, wenn er auch der richtigen Ansicht über den Ursprung des streitigen Verfassungsplanes nur die grundlose Behauptung entgegegenstellen konnte, daß zur Entwerfung desselben ein besonderer Ausschuß nach Heilbronn geschickt worden sei.

Eigenthümlich ist die Stellung, die Egelhaaf (I, 596, 97) zu der Frage der Autorschaft des von ihm kritisirten Verfassungsentwurfs einnimmt. Es ist ihm nicht entgangen, daß Weygandt die „Ordnung“ an Hipler nach Würzburg gesandt hat, aber daß er sie verfaßt habe, folgt für ihn daraus nicht. Auch für mich daraus allein nicht. Aber kann Egelhaaf etwa, abgesehen von der oben S. 283 Anm. angezogenen Aeußerung des „Schreibers“ des Truchsessen auch nur einen Schein des Beweises für die nachfolgenden Behauptungen beibringen? „Soviel ist sicher: indem die sogenannte, vor 2 Jahren erschienene und damals zunächst ohne Wiederhall gebliebene Reformation Friedrichs III. jetzt unzweifelhaft von Hipler in einer folgenschweren Krisis unserer Nation aufgenommen worden ist, wird sie thatsächlich sein Werk: er vertritt sozusagen Pathenstelle an ihr. Für das, was sie enthält, übernimmt er die Verantwortlichkeit: er fordert das zu berufende Parlament auf, die in der Schrift enthaltenen Grundsätze feierlich zu bestätigen, das Wort umzusetzen in Thaten. Die von Hipler dem Parlament „vorgelegte“ Ordnung fordert sonach“ etc.

2) Nachdem schon oft auf den nahen Zusammenhang zwischen der mit dem Namen Friedrich III. geschmückten, zuerst im Jahre 1523 erschienenen Reformation und dem sogen. Heilbronner Verfassungsentwurf hingewiesen worden war, lieferte C. Hegel in der allgemeinen Monatsschrift für Wissenschaft und Litteratur (1852) S. 564 ff. den Beweis, daß die Arbeit der „Heilbronner Kanzlei“ lediglich in einer veränderten Redaction der früheren Schrift bestehe, die in abgekürzter Gestalt und mit einigen Umgestaltungen und Zusätzen wörtlich darin aufgenommen

Es wird von keiner Seite mehr bestritten, daß der angebliche Heilbronner Entwurf im Wesentlichen den Inhalt der „Reformation Friedrich III." wiedergiebt, theils im Wortlaut, theils in abgekürzter Fassung. So sind namentlich alle erbaulichen und rhetorischen Bestandtheile, zu denen wir auch die Vorrede und den „Beschluß" rechnen, von Weygandt beseitigt worden. Was er dagegen an sachlichen Bestimmungen hinweggethan oder neu hinzugefügt hat [1]), ist nicht der Art, daß der Charakter des Ganzen dadurch geändert würde und Weygandt's Arbeit an Selbständigkeit gewonnen hätte. Wenn er gleichwohl die Schrift von 1523 im Wesentlichen sich aneignete und seine Redaction, ohne wie es scheint, die Vorlage nur zu nennen, Hipler und den Hauptleuten des hellen Haufens als Grundlage der geplanten Reichsreform empfiahl, so wird sich dies daraus erklären, daß er in diesem umfassenden Programm die meisten der Gedanken ausgedrückt fand, die ihn längst beschäftigten.

Schon die Artikel, die Weygandt früher an Hipler gesandt, enthielten so viel mit dem angeblichen Heilbronner Verfassungsentwurf Uebereinstimmendes, daß man annehmen möchte, dieser sei ihm schon damals nicht fremd gewesen, aber von ihm für den zunächst verfolgten Zweck, Adel und Städte mit der bäuerlichen Bewegung zu befreunden, nicht geeignet befunden und deshalb bis zu dem Zeitpunkt zurückgehalten worden, wo die rasch fortschreitende Revolution den Boden für einen vollständigen Neubau des Staats und der Gesellschaft geebnet hatte.

Gemeinsam war den „Artikeln" und der „Ordnung" der Grundsatz einer durchgreifenden Säkularisation, um die Kosten für die Bestreitung öffentlicher Bedürfnisse, einer geordneten Armenpflege und einer angemessenen Unterhaltung der Prediger zu gewinnen.

sei. Wenn Homeyer dagegen (Monatsberichte der k. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1856, S. 291 ff.) den Heilbronner Entwurf als das Ursprünglichste hinstellte, aus dem erst die sogen. Reformation hervorgegangen, so ist er von Fischer, Hamburg 1850 (Jahresbericht des Johanneum), gründlich widerlegt worden. Fischer, dessen treffliche Untersuchung zu wenig bekannt geworden, hat auch schon die Unmöglichkeit erwiesen, daß der große Reformentwurf auf einem Parlament zu Heilbronn entstanden sein könnte.

1) Es fehlen Artikel 4 (wonach ein jeder Stand wohl und ehrlich gehalten werden soll) und Artikel 13 (daß die Gehorsamen des Reichs die neue Ordnung durchführen helfen und eine Reichswehr gebildet werden soll). Zusätze finden sich ebenfalls nur an 2 Stellen. Einmal wird gegen die Betheiligung der Geistlichkeit an weltlichen Geschäften als Beispiel angeführt, daß im vorhergehenden Jahre der Erzbischof von Mainz mit lauter Clerikern, unter Ausschluß aller weltlichen Räthe, eine Versammlung abgehalten, und zweitens, daß die Gesellschaften der Fugger, Höchstetter und Welser als solche genannt werden, die, weil sie Arm und Reich beschweren, abgeschafft werden sollen.

Gemeinsam ist ferner beiden Aktenstücken der Grundsatz der freien Verkündigung des göttlichen Wortes durch geeignete Prediger, welche den Gemeinden nach den „Artikeln“ gesetzt, nach Weygandts Redaction der Reformation aber, abweichend von der Vorlage, durch die Gemeinden gewählt und abgesetzt werden können. Außer dem Kaiser, als dem Oberhaupt des Reichs, lassen beide Entwürfe den weltlichen Fürstenstand bestehen, wollen ihn auch im Besitz entsprechender Einkünfte erhalten; beide vindiciren ihm ferner die Aufgabe, den Interessen des Reichs zu dienen, den Frieden zu schirmen, den Frommen und Gehorsamen, Wittwen und Waisen zu ihrem Recht zu verhelfen, nur daß der große Verfassungsentwurf schärfer die Unterwerfung aller Fürsten, Grafen, Ritter u. s. w. unter die Herrschaft des göttlichen Worts und die Abstellung der von ihnen bisher den Armen auferlegten Beschwerden betont, auch nicht den weltlichen Fürsten und Herren vollständigen Ersatz für die ihnen zugemutheten Opfer, sondern nur standesgemäße Unterhaltung zusichert.

Maßvoll zeigt sich Weygandt in beiden Fällen inbezug auf die agrarischen Forderungen, die indeß in dem großen Verfassungsentwurf fast zurücktreten hinter den Interessen des gewerbfleißigen und handeltreibenden Bürgerthums. Die Forderungen der Artikel hinsichtlich der Beseitigung von Zöllen, Ungeld, Geleitsgeldern, Steuern und anderen Abgaben, ferner hinsichtlich der großen Handelsgeschäfte und Capitalmächte — nicht über 1000 fl. in einem Geschäfte! —, endlich hinsichtlich einheitlicher Münzen, Maße und Gewicht erfahren in der „Reformation“ überall eine breite Ausführung. Zölle, Geleitsgelder, Steuern jeder Art hören ganz auf, insofern sie nicht für den gemeinen Nutzen unentbehrlich sind. Andererseits sollen aber auch alle Städte, Communen und Gemeinden im Reich nach göttlichem und natürlichem Recht, gemäß christlicher Freiheit, reformirt werden, damit aller Eigennutz unterdrückt und den Armen wie den Reichen geholfen werde. Welch vieldeutige Worte!

Eine Reform des Gerichtswesens hatten auch schon die Artikel in Aussicht genommen. Gründlicher geht die Ordnung oder Reformation vor. Unter Ausschließung der Rechtsgelehrten und der Geistlichen von allen öffentlichen Aemtern und unter Beseitigung des bisher im Reiche geltenden weltlichen Rechts, an dessen Stelle das göttliche und natürliche treten soll, wird das Justizwesen ganz von Grund aus, freilich auch in durchaus schematischer Weise neu geordnet. Eine Stufenfolge der Gerichte baut sich von den Stadt- und Dorfgerichten bis zu dem Kammergericht in der Art

auf, daß unter diesem 4 Hofgerichte, darunter wieder 16 Landgerichte und unter diesen 64 Freigerichte stehen. Alle diese Gerichte, deren Instanzenzug vorgeschrieben ist, sind mit je 16 Richtern besetzt, welche von den veschiedenen Ständen, unter Bevorzugung des Adels und noch mehr der Städte, der Fürsten- wie der Reichsstädte, ernannt werden. Am meisten werden Fürsten, Grafen und Herren noch beim Kammergericht berücksichtigt, zu dem sie zusammen 4 Richter stellen, unter dem Vorsitz eines von ihnen, während für alle anderen Gerichte die Ritterschaft eben so viele Mitglieder ernennt, wie Fürsten, Grafen und Herren zusammengenommen, und überall der Vorsitz einem vom Adel gebührt. Den Reichsstädten wird bei der Besetzung der Gerichte der verschiedenen Classen kein größerer Antheil zugestanden — bald 3, bald 4 Beisitzer — als den Landstädten, und nur den übrigen Communen und Gemeinden im Reich werden in dem einen und anderen Falle, wo die übrigen Gruppen nur je 3 Mitglieder zu einem Gericht stellen, deren 4 bewilligt.

Es ist klar, daß bei dem ganzen Reformproject die Fürsten am schlechtesten weg kommen. Während die geistlichen ganz beseitigt werden, wird auch die Stellung der weltlichen nach allen Seiten herabgedrückt. Daß sie, wie andere bisherige Stände, alle Hoheitsrechte und Regalien verlieren, kann man zwar F. v. Bezold (S. 494) nicht zugeben[1]; aber allzuviel blieb ihnen nicht übrig. So wurde ihnen, wie den Städten, auch das Recht, Bündnisse irgend welcher Art zu schließen, abgesprochen, da allein kaiserlicher Schirm und Friede im Reiche gelten soll und zwar in so sicherer Weise, daß auch Ausländer überall zu Roß, Wagen, Wasser und zu Fuß völlig unbehindert reisen können und auch eines besonderen kaiserlichen Geleits gar nicht bedürfen.

Während man dem Kaiser die herkömmliche Stellung an der Spitze des Reichs lassen will, geht man doch keineswegs darauf aus, sie zu verstärken und unabhängig zu machen. Die Steuer, die ihm unter Berufung auf Matthäi am 22. vorbehalten wird, kommt in 10 Jahren nur einmal zur Erhebung. Im übrigen vermied es der von demokratischen und socialistischen Tendenzen getragene Entwurf über das bedenkliche Thema der monarchischen

---

1) Der betreffende Artikel lautet vielmehr: Beschließlich, daß alle Bündniß der Fürsten, Herren und Städte abgethan und allein kaiserlicher Schirm und Friede gehalten werde ohne alles Geleit und Beschwerde und alle Verschreibung derhalben aufgerichtet, „bei Verlierung aller Freiheit, Lehen und Regalien“.

Spitze sich rückhaltlos auszusprechen. Klarer und schärfer dagegen tritt das Bestreben, dem Reiche die wirthschaftliche und politische Einheit zu erringen, hervor, und die in dieser Richtung liegenden Reformvorschläge sind es vor allem gewesen, was den Urhebern oder Ueberarbeitern des großen Verfassungsplans den Ruhm tiefer staatsmännischer Einsicht und hoher patriotischer Gesinnung eingetragen hat. Man hat dabei nur zu bereitwillig darüber hinweggesehen, daß dem alle öffentlichen Verhältnisse von Grund aus umgestaltenden, mit kühner Phantasie entworfenen Verfassungsbau die Möglichkeit der Ausführung fehlt. Ranke zwar, welcher (Deutsche Gesch. im Z.A. d. Ref. II, 204, 1. Aufl.) die hier zu Tage tretenden Ideen einer radikalen Umwälzung erst in der französischen Revolution wiederfindet, ist der Meinung, daß sie schon 1525 angesichts der sich immer weiter ausbreitenden Bewegung nicht ohne Aussicht gewesen. Aber hätten auch wirklich die bewaffneten Bauernhaufen das Feld gegen die Fürsten behaupten können, sie würden doch nach allem, was wir heute über sie wissen, wenn auch einig im Zerstören, so doch nimmer mehr einträchtig gewesen sein im Aufbau einer neuen Staats- und Gesellschaftsordnung, die ihnen Arbeit und Zucht zumuthete und den höheren Ständen neben oder über ihnen eine gesicherte Stellung zuwies.

Auch Roscher (Geschichte der Nationalökonomie in Deutschland S. 87) scheint den Heilbronner Reformplan, wie er ihn nennt, noch zu günstig zu beurtheilen, wenn er ihn als eine höchst merkwürdige Arbeit bezeichnet, „ihrer Zeit in auffallendem Grade voraus, aber darum praktisch so gut wie unwirksam, aber in wichtigen Dingen eine Prophetin auf die Gegenwart“. Richtiger hat schon Hegel (a. a. O. S. 665) das Werk als ein in die Luft gebautes, um die Wirklichkeit unbekümmertes, aus radikaler Tendenzmacherei entsprungenes Phantasiegebilde gekennzeichnet. „War der ganze ursprüngliche Plan“, sagt Hegel von der sog. Reformation Friedrichs III., „wohl nicht mit dem Gedanken an eine mögliche Ausführung entworfen, so bezeichnet er doch unverkennbar und in noch schärferem Gegensatze zu den bestehenden Verhältnissen, als irgend einer unserer neueren Verfassungsentwürfe die revolutionäre Richtung auf Niederwerfung und Gleichmachung der gegebenen Zustände und Einrichtungen nach einem abstracten und völlig leblosen Schematismus, der den Vorzug der Vernunftmäßigkeit und Consequenz auf eine überaus leichte Weise in Anspruch nimmt“. — Nicht günstiger lautet endlich das Urtheil Baumgartens, wenn er (Gesch. Karls V. II, 402) von den aus der Mitte der Bauern hervorgegangenen Reformplänen kurzweg sagt,

daß sie „überall den Stempel des Utopischen trugen, wie begründet viele ihrer Beschwerden waren“.

Merkwürdiger Weise hat Weygandt selbst bezweifelt, ob der von ihm neuredigirte Reformplan ohne weiteres ausgeführt werden könne. In der mehrfach erwähnten Zuschrift an Hipler vom 18. Mai sagt er: „Aber ich besorg, es sei und werde noch zur Zeit beschwerlich, solches derselben Gestalt anzufangen, es wäre denn der Fall, daß Gott seine Gnade dem armen christlichen Volk zur Erlösung verliehe“ u. s. w. Es sei von nöthen, meint er, daß zuvörderst alle geistlichen Fürsten und die Ihrigen in das Bündniß und die Einigung der gemeinen Haufen der Bürger und Bauern getrieben würden auf die 12 Artikel, gleich dem Erzstift Mainz und, wie man sagen höre, auch anderen Stiften mehr. Von dem Stift Würzburg leiste nur noch das Schloß Widerstand. Ihm schiene es gut, sich mit den Inhabern des Schlosses auf leidliche Weise zu verständigen, um die Vergießung christlichen Blutes zu verhüten und die Zeit nicht zum Nachtheil christlicher Brüderschaft zu versäumen. „Denn dieweil Herzog Friedrich von Sachsen. der ein Vater aller Evangelischen gewesen ist, Todes verschieden († 5. Mai), so ist meines Erachtens ein großer Trost unseres Theils gefallen“. Weygandt räth, Cöln, Trier und andere geistliche Fürsten mehr sofort in ein Bündniß zur Haltung der 12 Artikel zu bringen, ehe sie sich mit den weltlichen Fürsten vereinigten und fremde Nationen auf ihre Seite brächten. Es wäre auch gut, dem Kaiser zu schreiben und ihm anzuzeigen, daß die Handlung anders nicht als „zu christlicher, göttlicher und billiger Reformation und zum Gehorsam der Fürsten gegen das h. röm. Reich“ vorgenommen sei, während früher die römischen Kaiser wenig Gehorsam gefunden. Damit möchte Karl „aufgehalten werden der Rache und Gegenwehr“. Und wenn alsdann die geistlichen Fürsten alle in das Bündniß der 12 Artikel gebracht, so müßten die weltlichen Fürsten, Grafen, Herren und die von der Ritterschaft auch in die Vereinigung zur Reformation erfordert werden, und dann müßte dasselbe mit den Reichsstädten geschehen, die sich nicht sehr widersetzen würden. „Das wäre diesem Anfang ein End gemacht“ — — — „und würde“, fährt Weygandt in seiner geschmacklos construirenden Manier fort, „furter aus diesem End und Beschluß ein neuer Anfang wurzeln und folgen, das wäre die Reformation“. Es würde dann von nöthen sein, daß fremde, redliche, hochgelehrte und geschickte Personen zur Reformation erwählt und an gelegene Statt erfordert würden. Diese würden ohne Zweifel die jüngst an Hipler übersandten Artikel alle oder deren viele bestätigen. „Das wäre dem anderen An-

fang ein Mittel gemacht und solch' Mittel trüge das Ende auf seinem Rücken; denn welcher Fürst oder Herr das nicht halten, sein Brief und Siegel vergessen und brechen würde, den würde sonder Zweifel sein eigen Volk todtschlagen, und säßen die anderen Brüder in Friede und Ruhe". „Dergestalt wäre die Sache zu gutem End gebracht und blieb ewiglicher Friede und fürderlich Recht dem Armen als dem Reichen, soweit die deutsche Nation und das ganze römische Reich grenzt und reicht".

Nichts kann für unseren Verfassungskünstler charakteristischer sein, als daß er die Durchführung seiner Projekte zum Zwecke der Herstellung ewigen Friedens und gleichen göttlichen Rechts in letzter Linie gesichert sieht durch die Fäuste der Bauern, welche die unbotmäßigen Fürsten todtschlagen werden. Aber auch das charakterisirt Weygandt, daß er, weit ab von den kriegerischen Bauernhaufen und fern von den furchtbar drohenden Ereignissen, die sich überall in dem siegreichen Kampfe der Fürsten gegen die Revolution vollziehen, noch nach der Mitte des Mai in der Einsamkeit seines Odenwälder Landstädtchens von dem ewigen Frieden und dem gleichen Recht aller Brüder träumt. Daß ihm dabei einzelne gute Gedanken kommen, soll nicht geleugnet werden. Aber auch sie beruhen zumeist auf falschen Voraussetzungen und ändern nichts an dem unpraktischen, durch und durch doctrinären Wesen Weygandt's. Wir werden nicht irren, wenn wir annehmen, daß seine Rathschläge vom 18. Mai eben so wenig, wie der von ihm neu redigirte große Reformplan, besonderen Eindruck auf Hipler gemacht haben würden, auch wenn nicht das verhängnißvolle Ereigniß von Böblingen den Feldschreiber des hellen Haufens des Odenwaldes und des Neckarthals genöthigt hätte, alle Sorge auf die Abwehr des überlegenen, unaufhaltsam herannahenden Feindes zu richten. Denn nicht allein, daß Hipler inmitten der Geschäfte und der großen Ereignisse lebte: er besaß auch, soviel wir nach dem Wenigen, was wir aus seiner Feder besitzen, zu beurtheilen vermögen, praktisch verständigen Sinn, also die erste der Gaben des Staatsmannes. Sein staatsmännischer Ruf aber, soweit von einem solchen überhaupt die Rede sein kann, wird um so gesicherter sein, je weniger ihm nach den vorstehenden Ausführungen von den radikalen Verfassungsprojecten Weygandts zur Last gelegt werden kann.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1892.

(Fortsetzung.)

La Société Imp. des Naturalistes de Moscou:
Bulletin. Année 1892. N. 2. Moscou 1892.
Kaiserl. livländische gemeinnützige und ökonomische Societät:
Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen für die Jahre 1889, 1890 u. 1891. Dorpat 1892.
Les Algues d. P.-K.-A. Schousboe recoltées au Maroc, et dans la Meditérranée de 1815—1829 et déterminées par M. Ed. Bornet. (Extrait des Mémoires de la Société nationale et de Cherbourg. T. XXVIII. 1892). Paris 1892.
La Société Mathématique de France:
Bulletin. Tome XX. N. 5. Paris 1892.
Kongelige Danske Videnskabernes Selskab:
Fortegnelse over i Tidsorummet 1742—1891. Kobenhavn 1892.
La Société Hollandaise des sciences a Harlem:
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXVI. 3me Livr. Harlem 1892.
La Sociedad Científica Argentina:
Anales. Tomo XXXIII. Entrega V. VI. Tomo XXXIV. Entr. I. Buenos Aires 1892.
United States Naval Observatory:
Observations made during 1888. Washington 1892.
U. S. Geological Survey:
Mineral Resonrees of the U. S. 1889 and 1890.
American Academy of Arts and Sciences:
Proceedings. N. S. Vol. XVIII. Wh. S. Vol. XXVI. Boston 1891.
The Kansas University Quarterly:
Vol. I. October 1892. N. 2. Kansas.
Geographical Society of California:
Special Bulletin: „Did the Phoenicians discover America?"
The Journal of Comparative Neurology. Vol. II. Sept. 1892. Pages 89—136. Granville Ohio 1892.
a. Principles of the Algebra of Physics by A. Macfarlane.
b. On Exact Analysis as the Basis of Language by A. Macfarlane. (From Transactions of the Texas Academy of Sciences). Austin Texas 1891.
The Worlds Congress Auxiliary of the Worlds Columbian Exposition of 1893. Original Announcement.
The Parliament of Religions at the World's Fair:
Reprinted from the Missionary Review of the World. New York 1892.
Deutscher wissenschaftlicher Verein zu Santiago (Chile):
Verhandlungen. II. Band. 4. Heft. Santiago 1892.
Medicinische Fakultät der Kaiserl.-Japan-Universität:
Mittheilungen. Band I. No. V. Tokio 1892.
Deutsche Gesellsch. für Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tokio:
Mittheilungen. 50. Heft. Bd. V. S. 439—512. Yokohama. A. Ascher u. Co.

Dezember 1892.

Kön. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin:
Sitzungsberichte. XLI—XLIX. 1892. Berlin 1892.

Nassauischer Verein für Naturkunde:
Jahrbücher. Jahrgang 45. Wiesbaden 1892.

Leopoldina. Heft XXVIII. N. 19–22. Okt. Nov. 1892. Halle a/S. 1892.

Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
Berichte über die Verhandlungen. Philologisch-historische Classe. 1892. I. II. Leipzig 1892.

Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
Zeitschrift. 46. Band. III. Heft. Leipzig 1892.

Astronomische Gesellschaft:
Vierteljahrsschrift. 27. Jahrgang. 3. Heft. Leipzig 1892.

Naturforschende Gesellschaft zu Leipzig:
Sitzungsberichte. 17. u. 18. Jahrg. 1891–1892. Leipzig 1892.

K. B. Akademie der Wissenschaften zu München:
Sitzungsberichte. Philosophisch-philologische und historische Classe. 1892. Heft III. München 1892.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
Neues Lausitzisches Magazin. 68. Band. 2. Heft. Görlitz 1892.

Handbuch der organischen Chemie v. Dr. F. Beilstein. 3. Aufl. 11. u. 12. Lieferung (B. 1. Liefer. 11, 12). Hamburg 1892.

Lotos: Jahrbuch für Naturwissenschaft. Neue Folge. XIII. Band der ganzen Reihe 41. Band. Wien 1893.

Oesterreichische Gesellschaft für Meteorologie:
Meteorologische Zeitschrift. 1892. Heft 11. November. Wien 1892.

K. K. Sternwarte zu Prag:
Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1888—1891. Appendix zum 49., 50., 51., u. 52. Jahrgang. Prag 1893.

Historischer Verein für Steiermark:
a. Mittheilungen. XL. Heft. Graz 1892.
b. Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 24. Jahrg. Graz 1892.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
a. Anzeiger 1892. November.
b. Acta historica. T. XII b.
c. Sprawozdanie komisyi Fizyograficznej. T. XXVII. Kraków 1892.

Königl. Ungarisches geologisches Institut:
a. Mittheilungen aus dem Jahrbuche. X. Band. 1. 2. Heft.
b. Földtani Közlöny. Jahrg. XXII. Heft 5—10.
c. Geologische Karte von Bakony.
d. Supplement Catalog. Budapest 1892.

Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 10. Band. Erste Hälfte. Berlin. Budapest 1892.

Nature. Vol. 47. N. 1205—1210. London 1892.

The Royal Microscopical Society:
Journal 1892. Part 6. December. London.

The R. Astronomical Society:
Monthly notices. Vol. LIII. N. 1. Nov. 1892. London 1892.

The London Mathematical Society:
Proceedings. N. 449. London 1892.

Arthur Cayley Sc. D., F. R. S.
The collected mathematical papers. Vol. V (vom Verfasser). Cambridge 1892.

Geological Survey of New South Wales. Department of Mines Palaeontology. N. 5. Sidney 1892.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
a. Handelingen en Mededeelingen 1890—91 en 1891—92.
b. Levensberichten 1891 en 1892.
c. Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. 11. Deel (Nieuwe Reeks, derde Deel) derde en vierde Aflever. Leiden 1892.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXV. Aflever. 3 en 4. Deel XXXVI. Aflever. 1.
b. Nederlandsch-Indisch Placaatboek 1602—1811. Deel X. 1776—87.
c. Notulen van de Algemeene en Bestuursvergaderingen. Deel XXX. 1892. Aflevering 1. 2.
d. Bijdragen tot de Kennis van het Tompake wasch-Verhandelingen. Deel XLVII. 1e Stuck. Batavia 1892.

Aanoullingen en Verbeeteringen to de Lampongsch-Hollandsche Woordenlist in de Lampongsche Texten. Door O. L. Helfrich. (Verh. Bat. Gen. deel XLV. 4e stuk). Manna 1891.

La Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie (Odessa). Tome XVII. P. 1 et Section mathématique Tome XIV. Odessa 1892.

L'Académie Imp. des Siences de St. Petersbourg. VIIe Série. Tome XXXVII. N. 2:
a. Ueber die Ammoneen der Artinsk-Stufe etc. v. A. Karpinsky (vom Verfasser). St. Petersbourg 1889.
b. Mélanges Physiques et Chimiques (Tirés du Bulletin de l'Acad. Imp. d. Sc. de St. Petersbourg. Tome XII.) v. A. K.
c. Ueber das Vorkommen Untersilurischer und Cambrischer Ablagerungen im Gouvernement Minsk. v. A. K.
d. Mélanges Géologiques et Paléontologiques (Tires du Bulletin de l'Acad. Imp. d. Sc. de St. Petersbourg. Tome I.) v. A. K.
e. Geologische Karte des Ostabhanges des Urals. 3 Blätter. v. A. K.

Académie Royale de Belgique:
a. Bulletin. 62e année, 3e série, Tome 24. N. 9—11.
b. Annuaire 1893. Cinquante-neuvième année. Bruxelles 1892.

Société Geologique de Belgique:
Annales. Tome XIX. 3me Livr. Liège 1891—92.

La Reale Accademia delle Scienze di Torino:
a. Mémorie. Série Seconda. Tomo XLII.
b. Programm für den neunten Bressa'schen Preis. Torino 1892.

Reale Istituto Lombardo di Science e Lettere:
a. Rendiconti. Serie II. Vol. XXIV. Vol. XXVII. Milano 1884, 1891.
b. Memorie. Vol. XVI—XVII della Serie III. Fasc. III e ultimo.
Vol. XVII—XVIII della Serie III. Fasc. I. Milano 1892.

Il Terzo Centenario di Galileo Galilei a Padova. Firenze 1892.

Università di Padova. Onoranze centenarie a Galileo Galilei. Discorso del Rettore Magnifico. Padova 1892.

L'Anno Accademico 1891—92. Nella R. Università di Padova 1892.

La Reale Accademia dei Lincei:
a. Atti. Rendiconti. Serie quinta. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. 2. Sem. Fasc. 9°. 10°. 11°.
b. Atti. Serie quarta. Classe di Scienze morali storiche e filologiche. Vol. X. Parte 2a. Notizie degli Scavi. Luglio-Agosto 1892.
c. Rendiconti. Classe di Scienze Morali storiche e filologiche. Serie quinta. Vol. I. Fasc. 10—11. Roma.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
Bollettino delle pubblicationi Italiane 1892. N. 166—168. Firenze 1892.

La Société Mathématique de France:
Bulletin. Tome XX. N. 6.

Les Épopées françaises. Vorrede und Anzeigen von Leon Gautier. Paris 1892.

United States coast and geodetic Survey:
Bulletin. N. 25. Washington 1892.

The Alumni Report. Vol. XXIX. Nov. 1892. N. 2. Philadelphia. Pen.

Buffalo Medical and Surgical Journal:
Whole Number CCCLXXIV Dec. 1892. Vol. XXXII. N. 5. Buffalo 1892.

The American Journal of Philology:
Vol. XIII, 3. Whole N. 51. Baltimore 1892.

Tre Texas Academy of Science:
Transactions. Vol. I. Number 1. Nov. 1892. Austin 1892.

Bibliography of the Works of Paul Anton de Lagarde by Richard J. H. Gottheil, Prof. in Columbia College New York.
(Reprinted from the Proceedings of the American Oriental Society. Washington 1892).

La Société Scientifique du Chili:
Actes. Deuxième année. Tome II. 1. 2. Livr. Santjago 1892.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio:
Mittheilungen. Supplementheft II und III zu Band V.

Nachträge.

ΑΘΗΝΑ. IV. Band, 3. Heft. Athen 1892.

Johns Hopkins University Circulars:
Vol. XII. N. 101. Nov. Baltimore 1892.

Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in den Jahren 1891—1892.

Flora Batava. 299e 300e Aflevering. Leiden.

Ungarische Revue 1892. Zwölfter Jahrgang. X. Heft. Dezember (2 Exempl.). Budapest 1892.

Grossherzogliche Sternwarte zu Karlsruhe:
Veröffentlichungen. Viertes Heft. Karlsruhe 1892.

Botanisches Centralblatt. XIII. Jahrgang. N. 51. 1892. Cassel.

Die Lichtstrahlen von Dr. G. H. Otto Volger gen. Senkenberg.
(Separatabdruck aus dem 76. Jahresberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Emden). Emden 1892.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

24. Mai. № 8. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zwei Briefsammlungen des Welfenmuseums in Hannover.

Von

F. Frensdorff.

Durch die Denkschrift: Das Königliche Welfen-Museum zu Hannover im J. 1863 (Hannover 1864, Hahnsche Hofbuchhandlg.) S. 37 war ich auf Briefe dieser Sammlung aufmerksam geworden, die für die Geschichte der Universität Göttingen und die Gelehrtengeschichte des 18. Jahrhunderts Ausbeute versprachen. Es hieß nemlich in der genannten Schrift: unter den Autographen von bedeutenden Staatsmännern Militairs Gelehrten etc. befinden sich ein Briefwechsel D. G. Strubens mit dem Hofrath Pütter 1748—1763 und eine Anzahl Briefe des Ministers G. A. v. Münchhausen aus der Zeit von 1748—1770 gleichfalls an diesen. Meine durch die Königliche Universitäts-Bibliothek der Königlichen Verwaltungscommission vorgelegte Bitte, die bezeichneten Briefschaften hier einsehen und benutzen zu dürfen, wurde, nachdem die Genehmigung der vorgesetzten Stelle in Berlin eingeholt war, gewährt, und ich habe mich im Sommer 1891 in den Räumen der K. Bibliothek mit den gedachten Papieren eingehend bekannt machen können. Ueber die Art und Weise, wie die Briefe in

das Welfenmuseum gekommen waren, ließ sich leider nichts in Erfahrung bringen.

Die Angabe der Denkschrift, daß ein Briefwechsel Strubes mit Pütter vorliege, erwies sich als unrichtig. Es waren wie nur Briefe von Münchhausen, so auch nur Briefe von Strube an Pütter vorhanden, so daß beide Sammlungen sich als Theile des reichen Briefschatzes herausstellten, den Pütter hinterlassen haben muß und von dem sich bisher nur Bruchstücke in einzelnen Codices der Göttinger Bibliothek gefunden haben.

I.

Von Strube an Pütter gerichtete Briefe sind 19 vorhanden, mit 1748 April 4 beginnend und bis 1763 Mai 12 reichend, alle aus Hannover datirt. Der Briefschreiber ist der berühmte Verfasser der „Nebenstunden“ und der „Rechtlichen Bedenken“, David Georg Strube (1694—1776), der seit 1740 als advocatus patriae mit dem Titel eines geheimen Justizraths der hannoverschen Regierung zur Seite stand, 1758 Director der Justizkanzlei zu Hannover wurde und 1772 den Titel eines Vicekanzlers erhielt. Als der erste und angesehenste Jurist des Landes verehrt, galt er zugleich in ganz Deutschland als einer der vorzüglichsten Vertreter der Wissenschaft des gemeinen Rechts, war aber nicht blos im Gebiete des Privatrechts, sondern auch auf dem des öffentlichen Rechts sein langes Leben hindurch thätig, so daß Pütter von ihm rühmen durfte, ohne weder ein systematisches noch compendiarisches Werk vom Staatsrechte geschrieben zu haben, habe fast kein Schriftsteller größere Verdienste um diese Wissenschaft als er errungen [1]). Oder, um das noch ehrenvollere Zeugniß eines ihm persönlich ferner stehenden Mannes, J. J. Mosers, anzuführen: Strube ist einer der ächten und ersten Staatsrechtsgelehrten, verstehet das alte und das neue, hat ehrliche Grundsäze und viele Erfahrung und seine Schrifften seynd brauchbar [2]). In den Universitätssachen, namentlich in allem, was sich auf die juristische Facultät bezog, war er einer der vertrautesten Rathgeber Münchhausens. War schon dadurch die Anknüpfung zwischen Strube und Pütter gegeben, so kam noch hinzu, daß Pütter mit Strubes Sohn, Julius Melchior, nahe befreundet war. Sie hatten sich in Wetzlar kennen gelernt und von da aus zusammen die gelehrte

1) Litteratur des T. Staatsrechts I 394.

2) Neueste Geschichte der Teutschen Staats-Rechts-Lehre (Frankf. a/M. 1770) S. 137.

Reise nach Regensburg und Wien gemacht. Der Briefwechsel mit D. G. Strube begann gleich in dem ersten Jahre, nachdem Pütter, von jener Reise heimgekehrt, in sein Göttinger Amt eingetreten war. Die Briefe Strubes vertheilen sich nicht über die ganzen 15 Jahre, die sie umfassen, gleichmäßig[1]). Am reichsten ist das erste Jahr des Briefwechsels bedacht; es hat nicht weniger als acht Nummern aufzuweisen, und es sind zum Theil Briefe größern Umfanges. Nach mehrjähriger Pause beginnen die Briefe mit 1754 wieder, ohne daß aber mehr als ein Brief durchgehends auf das Jahr käme. Zudem sind unter diesen spätern Schreiben manche ganz kurz, Begleiter litterarischer Sendungen oder Danksagungen für empfangene. Der Inhalt ist überwiegend gelehrter Natur; nur an ein paar Stellen ist die politische Zeitgeschichte, der siebenjährige Krieg, die Besetzung des Landes durch die Franzosen berührt.

Der Reichthum des ersten Jahres an Briefen erklärt sich vornehmlich aus einer gelehrten zwischen den Correspondenten verhandelten Controverse, zu welcher Pütters Ausarbeitung eines Jus Germanicum, das er in den einzelnen fertig gewordenen Druckbogen an Strube übersandte, den Anstoß gegeben hatte. Alle Briefe des J. 1748 haben es mit Bemerkungen Strubes zu dieser Schrift zu thun, mit Ausnahme eines, der Pütter zur erlangten Doctorwürde gratulirt (6)[2]). Pütter war nemlich seit Jahr und Tag Professor in Göttingen, ohne Dr. juris zu sein. In Marburg, wo er seit Ostern 1744 als Privatdocent thätig war, hatte er nur die Licentiatenwürde erworben. Wie wir aus Goethes Briefen wissen, der selbst nur Licentiat war, „haben in Teutschland beide Gradus gleichen Werth“ (v. J. 1771 Nr. 79, Bd. II S. 1 Weimarsche Ausg.). Für einen Professor, der an der Verleihung akademischer Grade theilnehmen wollte, war es auf die Dauer unmöglich, bei der Licentiatenwürde zu bleiben, und da das Doctorat üblicherweise nur bei der Universität nachgesucht werden konnte, die die Licentia zur Erlangung der Doctorwürde (licentia adspirandi ad summos honores) gewährt hatte — denn das war die eigentliche Bedeutung — so ist es erst durch einen Revers der Göttinger juristischen Facultät, bei einem gleichen Vorkommniß

1) Daß übrigens diese Briefsammlung sowenig als die nachher zu besprechende vollständig die in der angegebenen Zeit wirklich ergangenen Briefe umfaßt, zeigt z. B. der Pütters Selbstbiogr. I 315 mitgetheilte Brief Strubes v. 1757, der hier fehlt.

2) 16. August. Die Nummern im Text beziehen sich auf die Briefe in ihrer chronologischen Ordnung.

in Marburg keine Einsprache erheben zu wollen, erreicht worden, daß Pütter im Sommer 1748 bei Anwesenheit K. Georg II. in Göttingen zum Doctor promovirt werden konnte (Pütters Selbstbiogr. I 199).

So lange Pütter in den Gegenständen, die seinen eigentlichen Beruf bildeten, nicht dociren konnte, weil ältere Ordinarien des Fachs vorhanden waren, richtete er seine akademische Thätigkeit auf andere Gebiete. Zu ihnen gehörte das deutsche Privatrecht, das ihn schon in Marburg beschäftigt hatte, aber doch vorzugsweise um seiner Beziehung zum deutschen Staatsrecht willen interessirte. In Marburg hatte er seiner Vorlesung Heineccius Elementa juris Germanici (Halae 1736, 3. ed. 1746) zu Grunde gelegt, in Göttingen wählte er das hier beliebtere Buch, die Elementa juris Germanici civilis (Jen. 1736) Engaus, der sein Lehrer in Jena gewesen war. Auf die Dauer sagte ihm keins von beiden zu. Strube stimmte ihm bei: beym Heineccio findet man vielmehr was ehmals in Teutschland Rechtens gewesen, als die heutiges Tages übliche jura, und des Engau Arbeit ist gar zu seicht (1). Er freute sich deshalb über den Entschluß Pütters selbst ein jus Germanicum auszuarbeiten und versprach sich davon großen Nutzen. Das Studium des deutschen Rechts war zur Zeit noch jung, und sein Werth weder an den Universitäten noch außerhalb derselben anerkannt. Die einen sahen es als ein imaginaires Recht an, das von einigen Privat-Doctoren propria auctoritate an den Haaren herbeigezogen war, mit dem einzigen Erfolge neben die beiden schon vorhandenen jura incerta noch ein drittes jus aeque incertum zu etabliren[1]). Andere verkannten die große Anmuth der alten teutschen Gebräuche und Gesetze nicht, wollten es aber für Lehrzwecke doch kaum anders als Zusatz zum Lauterbach billigen[2]). Für ein Lehrbuch des jus Germanicum kam alles darauf an, die richtige Abgrenzung gegenüber dem Historischen zu finden und doch das Historische, soweit es zum Verständniß des geltenden Rechts erforderlich, nicht vermissen zu lassen. Beide Gesichtspunkte machte Strube geltend: „es nimt viele wieder das studium juris Germanici ein, daß sie wenig mehres in den davon handelnden Büchern finden, als die von Lindenbrog, Baluzio und andern gesamlete alte Teutsche Rechte enthal-

1) Sam. v. Cocceji in der Vorrede § 23 und dem Eingang § 6 zum Project des Corporis juris Fridericiani (Halle 1749).

2) Scheidts Gutachten v. Dec. 1748, in meiner Abhandlg.: Die ersten Jahrzehnte des staatsr. Studiums in Göttingen (Gött. 1887) S. 11.

ten. Deren größer Theil ist in Abgang kommen, auch es vielleicht nicht rathsam, ihn wieder einzuführen. Die annoch übrige ziemlich häufige reliquiae juris antiqui werden aber aus den alten Legibus und Kapitularibus, denen man fidem historicam nicht versagen kann, billig erleutert.“ (1). Aber die oberste Forderung, die er stellt, bleibt doch, das Werk in foro brauchbar zu machen, die Materien, welche annoch Nutzen haben, auszuführen. Dadurch werde das Vorurtheil zerstört, als sei das studium juris Germanici überflüssig, und auch die akademische Jugend von dessen Nutzen überzeugt werden. (1 u. 7). Die Grenzen, innerhalb deren Strube übrigens dem deutschen Rechte fortdauernde Geltung zugestand, waren eng bemessen. Aus dem Satze, daß „wenige alte Gesetze fürhanden, welche um gantz Teutschland zu verbinden gemachet worden“ und die „mehreste Teutsche Rechte aus den Institutis der besondern Völcker herfließen, die jedoch, da dieser Völcker Sitten und Verfaßung sehr übereinkam, in vielen Stücken einstimmig sind“, folgert er: „daß wan, wie v. g. in hiesigen Landen das Sachsen Recht ausdrücklich abgeschaffet ist, eo ipso auch das Teutsche Recht überhaupt abgeschaffet worden, weil wir kein andres gehabt, daher für denjenigen, welcher sich darin gründet, die Vermuthung nicht militiret.“ Aber er fährt fort: „solcher Abrogation ohngeachtet ist dennoch ein großer Theil des juris Saxonici in Uebung geblieben, und fürnemlich dasjenige, so man nicht abschaffen konnte, ohne Fürsten und Herrn oder ihre angesehenste Unterthanen zu schaden“ (2). Die Erhaltung deutschen Rechts in Gestalt städtischer und bäuerlicher Rechtsquellen ist hier übersehen worden. Als Pütters Buch im Herbst 1748 fertig vorlag, hoffte Strube, der Verf. werde docendo et respondendo de jure zur Vermehrung des Buches Gelegenheit finden und zu einem Systema juris Germanici fortschreiten. Er versprach ihm auch, was ihm bei seiner Arbeit zur Ergänzung dienliches vorkomme, am Rande seines Exemplars zu notiren. Pütters Thätigkeit auf diesem Gebiete ist aber nicht über die Elementa juris Germanici privati hodierni hinaus gediehen. Die erste Ausgabe von 1748 ist in den beiden noch folgenden von 1756 und 1776 dieselbe geblieben, schon aus dem Grunde, daß der Verfasser seit 1754 über diesen Gegenstand nicht mehr las (Selbstbiogr. I 196), sondern sich seinem eigentlichen Berufsfächern ausschließlich zuwandte.

Der gewählte Titel des Buches zeigt genau das Ziel, das sich der Vf. setzte. In der Einleitung (praecognita juris germanici) wird zwar mit Tacitus angefangen, die Verfassung Deutschlands in älterer und neuerer Zeit characterisirt, aber doch in sol-

cher Kürze, daß die Aufgabe des jus privatum hodiernum nicht vergessen wird. Nur ein Gegenstand wird eingehender behandelt: der Unterschied der Stände (de diversis personarum in Germania ordinibus), was sich aus dem Rechtszustand einer Zeit, in der das Privatrecht ständisch noch sehr verschieden war, und für den Rechtsstoff des deutschen Privatrechts rechtfertigt. Grade das Gebiet des Ständerechts führte zu der erwähnten Controverse zwischen Strube und Pütter. Sie betraf nicht, wie man erwarten sollte, eine Frage des geltenden Rechts, sondern der Rechtsgeschichte, die im vorigen Jahrhundert so oft verhandelte nach der Entstehung des niedern Adels und sein Verhältniß zur Ministerialität und zum Ritterstande. Aus Streitigkeiten hervorgegangen, die sich an die der reichsunmittelbaren Ritterschaft anzuweisende Stellung knüpften, war die Frage seit Anfang des Jahrhunderts unter Betheiligung der gelehrtesten Männer debattirt worden[1], nicht ohne einen Beisatz von Animosität auf beiden Seiten, die einen erfreut den niedern Adel sich als „Knechte Jungens und Mägde von dem hohen Adel vorzustellen", die andern voll Scheu, die Vorfahren derer, die sie in so hochgeehrter Stellung sahen, in der Ordnung der Stände niedriger anzusetzen[2]. Den Kern der historischen Erkenntniß, über den heutzutage alle Forscher einig sind, die ursprüngliche Unfreiheit der Ministerialen[3], hat keiner der Streitenden erfaßt. Die communis opinio sah in dem niedern Adel Abkömmlinge von Freien (ingenui). Auch Strube und Pütter halten daran fest. Was sie trennt, ist die Erklärung des Vorkommens von liberi und ministeriales in den Urkunden und ihrer sorgfältigen Unterscheidung. Pütter sieht darin ein Zeichen ihrer verschiedenen socialen Lage (conditio) bei Gleichheit des Standes (ordo). Strube hält die liberi für Mitglieder des hohen Adels. Es hat heute kein Interesse mehr, die nähere Begründung dieser Ansichten zu verfolgen, die alle dadurch an der Wahrheit vorbeigehen, daß sie die Jahrhunderte nicht zu sondern wissen, die Entwicklung verkennen und sich nicht entschliessen können, die ursprüngliche Unfreiheit von Personen anzuerkennen, deren Nachkommen einen der höchsten

---

1) Eine Uebersicht giebt v. Fürth, die Ministerialen (Cöln 1836) S. VIII ff.

2) Strube, Nebenstunden Thl. IV, 28: Von adelichen Dienstleuten. Strube hatte schon in seinen Observat. juris et hist. Germ. (Hild. 1735) früher die Streitfrage behandelt. Scheidt, Histor. u. diplom. Nachrichten v. d. hohen u. niedern Adel in Teutschland (Hannov. 1754).

3) Schröder, Deutsche Rechtsgeschichte § 42.

Stände im Staate ausmachen. Das Interessante an dem Streite liegt heute nur noch in den praktischen Argumenten, mit denen Strube seine und die allgemeine Meinung stützt. „Unsere ansehnlichste reichste Familien waren mit einander ministeriales, welches nicht seyn konte, wenn diese andern ritterlichen Geschlechtern nachgesetzet wären (3). Der alte Teutsche Adel, den wir jetzt den hohen nennen, war sehr zahlreich, und ich glaube, daß weit mehre zu selbigem gehörige Familien in Teutschland gewesen als anjetzt darin sind. Viele sind ausgangen, und die ärmern ministeriales worden. Ich will nicht schlechterdings negiren, daß es familias equestres gegeben, welche in keinen nexu ministeriali gestanden. Ich zweifle jedoch daran. Wenigstens hat der gesamte hiesige Adel solchen nexum nicht declinirt. Es war sofern in medio aevo beschaffen wie anjetzt. Herrendienste, obwohl sie lästig sind, bringen Ehre und Reichthum. Deswegen trachtet man darnach heutiges Tages, und es geschahe auch für alters. Wenigstens haben sich die mehreste familiae equestres als Dienstleute verbindlich gemacht und sind dadurch reich und mächtig worden, daher ich mir nicht vorstellen kann, daß einige wenige ritterliche Geschlechter, welche ettwa in der alten Freiheit geblieben, für den übrigen einen Rang solten behauptet haben, bevorab da sich zu unsern Zeiten kein Unterschied inter familias equestres äußert." (4).

Andere Bemerkungen Strubes zu den übersandten Druckbogen betreffen die Entstehung der adligen Stifter: „überaus wenige Stifter sind allein für den Adel fundiret. Dieser hat zwar und mehrentheils zu neuern Zeiten die plebejos durch statuta ausgebißen, welche der Pabst ex rationibus politicis wieder die sonstigen principia curiae Romanae in Teutschland einführen laßen" (3). Mehrmals kommt Strube auf die Entstehung des Patriciats zu sprechen, ohne daß seinen Bemerkungen heute noch sonderlicher Werth beizulegen wäre. Aus den Bemerkungen über die Rechtslage des Bauernstandes mögen nur folgende hervorgehoben werden: „Ich vermeine daß sich überaus wenige und vielleicht gar keine homines proprii heutiges Tages in Teutschland finden, die nichts eigenes haben. Wenn aber der Bauer ein simpler conductor ob wohl freyer Mann ist, so gehören die Gebäude gemeiniglich dem Locatori.

In hiesigen Landen, auch ni fallor in Westphalen, sind ungemeßene Dienste leibeigener Leute etwas seltenes und also in dubio wohl nicht zu praesumiren. In Hollstein und Mecklenburg hat es aber eine andere Bewandnis. Da sich bey uns die jurisdictio nobilium vielfältig nicht nur auf ihre eigene colonos, sondern auch

auf anderer Guthsherren Meyer extendiret, so kann freylich diese ex potestate dominica nicht hergeleitet werden."

Die spätern Briefe Strubes haben es allein mit dem jus publicum und dessen praktischer Handhabung zu thun. Er begrüßte es freudig, als Pütter, der sich diesem Gebiete seit 1752 immer ausschließlicher zugewendet hatte, zu einem gewissen Abschluß seiner Studien mit der zweiten Ausgabe seiner Elementa juris publici gelangt war (Selbstbiogr. I 270). Seinen Dank für das Geschenk begleitet er mit folgenden, auch für die Geschichte Göttingens lehrreichen Worten (11): es wird dieses Buch Ew. Hochedelgeb. erworbenen Ruhm vermehren, mithin zur Aufnahme dortiger Universität vieles beytragen, welche nichts so sehr befördert, als wenn das Jus publicum gründlich und brauchbar vorgetragen wird. E. HE. Lehren sind so wohl den Catholischen als Evangelischen und allen denjenigen nützlich, welche die Erhaltung des jetzigen Systematis imperii wünschen, mithin auch den hiesigen principiis gemäs. Diese Sätze gewinnen dadurch noch ein besonderes Interesse, daß sie am 23. Mai 1756, also wenige Wochen vor dem Ausbruch des siebenjährigen Krieges geschrieben sind.

Eine der ersten größern praktisch-publicistischen Arbeiten, die Pütter unternahm, betraf eine Hamburgische Sache. Der Conrector G. F. Richertz war mit dem Rector des Johanneums Joh. Samuel Müller über die Versetzung eines Schülers in Streit gerathen und hatte sich zu öffentlichen Beleidigungen seines Vorgesetzten hinreißen lassen. Das Scholarchat, die aus vier Senatoren, den Oberalten und den fünf Hauptpastoren bestehende Schulbehörde Hamburgs, war eingeschritten und hatte, nachdem seine Warnungen mit neuen Ordnungswidrigkeiten des Conrectors beantwortet waren, zuletzt unter Zustimmung des Senats die Absetzung des Conrectors verfügt. Der Verletzte versuchte diese Disciplinarsache als einen Gegenstand des Civilprocesses zu behandeln, appellirte an das Reichskammergericht und wandelte, da die Appellabilität zweifelhaft war, seine Klage in eine Nullitätsbeschwerde um, gestützt auf angebliche Mängel des gegen ihn eingeschlagenen Verfahrens, insbesondere auf die Weigerung ihm das von dem Rector dem Scholarchat eingereichte Memorial mitzutheilen. Da der Conrector nach eingelegter Appellation seines Amtes entsetzt war, so wurde zugleich Beschwerde wegen „Attentats" erhoben. Die Nullitäts- und Attentatenklage wurde vom Kammergerichte nicht nur angenommen, sondern zunächst mit dem Befehle der sofortigen Wiedereinsetzung des Conrectors beantwortet. Die

Gefahr, in die ein solches Vorgehen die Autorität der städtischen Behörden bringen mußte, zugleich mit der Beobachtung, daß das Kammergericht in der letzten Zeit ungewöhnlich viele Appellationen in Hamburgischen Handelssachen angenommen hatte und dadurch der prompten Justiz Eintrag geschehen war, bewog den Senat auf Anrathen des Archivars Schuback seinen Göttinger Freund Pütter, der sich als Kenner des öffentlichen Rechts nicht nur, sondern insbesondere auch des Reichsprozesses rasch einen Namen erworben hatte, wegen des ganzen am Kammergerichte einzuschlagenden Weges zu consultiren und mit der Wahrnehmung der Angelegenheit namens der Stadt Hamburg zu betrauen. Die Erlaubniß in Hannover wurde ihm unbedenklich ertheilt, und Pütter war so glücklich, durch seine Deduction und persönliche Sollicitation in Wetzlar ein Bürgermeister und Rath der Stadt Hamburg und das collegium scholarchale von der Klage absolvirendes Urtheil des Reichskammergerichts zu erwirken [1]). Zwei Briefe Strubes aus dieser Zeit sind dadurch von Interesse, daß sie die allgemeinen Gesichtspunkte, die sich an den einzelnen Fall knüpfen, hervorheben. Nach heutiger Auffassung würde die nächste principielle Frage sein: kann eine Verwaltungsangelegenheit wie die Hamburgische überhaupt zum Gegenstande oberstrichterlicher Cognition gemacht werden? Zur Zeit des Reiches mußte diese Frage aber principiell bejaht werden, und gegenüber den kleinern Territorien des Reichs ist der Anspruch der Reichsgerichte auf richterliche Beurtheilung ihrer Regierungsmaßregeln auch praktisch bethätigt worden. Pütter hat deshalb den Hamburger Fall unter einem andern principiellen Gesichtspunkte behandelt, von dessen Geltendmachung er sich sicherern Erfolg versprach. Wie er nachher seiner Deduction das Rubrum gab: die Gerichtsbarkeit der höchsten Reichsgerichte in evangelischen Kirchen- und Schulsachen, so stellte er auch in der Beweisführung den Satz voran: von katholischer Seite werden keine Nullitätsklagen in Kirchen- und Schulsachen bei Reichsgerichten für zulässig erachtet noch sind sie in Praxi üblich [2]). An Strubes Aeußerungen über den Gegenstand ist es nun bemerkenswerth, wie er neben der Opposition gegen die Ausdehnung der reichsgerichtlichen Jurisdiction doch den Werth nicht verkennt, der auf das Vorhandensein einer solchen höchsten Rechtscontrolle zu legen ist.

---

1) Selbstbiogr. I 281 ff., 290 ff., 317—325. Die Deduction ist gedruckt in Pütters Auserles. Rechtsfällen I 1 (Gött. 1760) S. 171 ff. Vgl. auch Pütter, Erörterungen II (Gött. 1794) S. 194, 312.

2) Rechtsfälle S. 195.

Hannover den 27 Mai 1754.

E. HE. liefere ich hierdurch das wohlgefaßete Pro Memoria cum adjunctis zurück.

Man hat bemercket, daß das Cammergericht von allen Zeiten her bemühet gewesen seine Jurisdiction zu extendiren. Das exercitium potestatis legislatoriae et judiciariae ist vor alters nicht genau unterschieden. Es werden daher secundum praxin processus erkand, quando princeps vi potestatis extrajudicialiter aliquid mandat; et ubi quis tanquam judex atque pars simul subditum gravat, tunc cessat posterior respectus. Wan die Reichs-Gerichte dieses principium fahren laßen, so müßen sie einen großen Theil der Sachen ad austregas verweisen, welches die processus noch mehr immortalisiren würde.

Ich habe nimmer erlebet, daß advocati, die weit anzüglicher geschrieben als der D. Kellinghausen[1]), vom Cammergericht deswegen gestraffet worden. Die Concipienten sind öfters großer Herren vermögende Ministri und Räthe, mit denen man es nicht so genau nehmen darf.

Ich halte die Hamburgische Gravamina zum Theil vor gegründet, aber zugleich vor allgemein. Den mehresten kleinern Ständen wiederfähret ein gleiches und eben deswegen wird es schwehr fallen, remedur zu erlangen. Denn der referens kan sich mit vielen praejudiciis rechtfertigen und man ändert das Herbringen nicht leicht.

Die abusus appellationum sind unleugbahr. Ex duobus malis autem minimum est eligendum. Ich wolte lieber in der Barbarey als in sehr vielen Teutschen Fürstenthümern und Städten wohnen, wenn keine Reichs-Gerichte oder dieser Gewalt den Unterthanen zu helfen mehr eingeschrencket wäre.

Am meisten ist daran gelegen, daß man die Appellationen in Handlungs-Sachen verhindere, welches vielleicht am füglichsten durch eine Kayserliche interpretationem authenticam geschiehet.

Ein Hertzog zu Jülich und Wolfenbüttel kan die Einwendungen wieder die Cammergerichts-Jurisdiction weiter treiben als eine Reichsstadt, die der archidicasterien nur gar zu sehr bedarf, und welche übelfahren würde, wen man die praxin cameralem änderte und den Mandat-Process einschrenckte.

Die mehresten appellationes geschehen zum Aufenthalt der Sachen in Hofnung, daß sie unbetrieben liegen bleiben sollen. Durch Sollicitationes sind noch Urtheile zu erlangen. Wan sie für den Appellaten ausfallen (wie es mehrentheils geschieht) so werden die Unterthanen bald scheu gemacht. Die Kosten der Sollicitatur dürfen[2]) Hamburgenses nicht fürchten.

D. G. Strube.

Hannover den 27 April 1755.

E. H. gratulire ich zu der erhaltenen guten Urthel in der Hamburgischen Sache[3]).

Das Cammergericht hat von den ersten Zeiten seine Jurisdiction so weit als möglich zu extendiren gesucht. Wider mächtige Stände und alle diejenige, die sich nicht ex rationibus politicis bequemen müßen, wird es aber mit den Erkent-

---

1) Wird Heinrich Kellinghausen (1717—1786), seit 1744 Dr. jur. sein.

2) in dem alten Sinne = brauchen.

3) Das Urtheil vom 14. April 1755 ist abgedruckt in Pütters Rechtsfällen I 220.

nißen in causis ecclesiasticis Evangelicorum wenig ausrichten und man sie nimmer exequiren laßen. Eine solche Collision zu vermeiden, weiset man lieber die Querulanten ob defectum nullitatum ab, und also erhalten Evangelici doch per indirectum den Endzweck.

Ich verharre gantz vollenkommen

E. H.
gehorsamer Diener
D. G. Strube.

Die wissenschaftliche und praktische Beschäftigung Pütters mit dem Staatsrecht und dem deutschen Rechte hatte ihn immer mehr zu dem Gebiete hingedrängt, auf dem beide zusammentrafen: zu dem deutschen Privatfürstenrechte. Eine Grundfrage desselben hatte er in Anlaß eines einzelnen ihn beschäftigenden Falles in der Dissertation des J. 1757 behandelt: de normis decidendi successionem familiarum illustrium controversam. Ihre Uebersendung beantwortete Strube mit einigen Bemerkungen, die seinen abweichenden Standpunkt hinsichtlich der Anwendbarkeit des römischen Rechts darthun: „Von einigen Sätzen bin ich nicht völlig überzeuget und glaube, daß Maximilianus I [bei der Begründung des Reichskammergerichts] auch der Illustrium controversias nach dem Röm. Recht entschieden wißen wollen, wie es auch per secula geschehen. Die mehreste annoch fürhandene pacta familiae sind recentiora und von Römischen ICtis entworfen. In dem Falle, wo das alte Teutsche Recht den regulis aequitatis et prudentiae nicht gemäßer ist als das Römische, so absehe nicht, warum man suchen wolle, jenes wider einzuführen, welches bey den Reichs-Gerichten schwehrlich zu erlangen seyn mögte, und deßen Versuch die jura illustrium nur immer zweifelhafter machet, mithin die Streitigkeiten vermehret. Jedoch laße ich mich gern eines Beßern belehren."

Die Verwicklungen des siebenjährigen Krieges gaben dem fürstlichen Hause Taxis den Muth, auf seine alten Prätensionen zurückzukommen und die Ausübung des Postrechts als eines kaiserlichen Reservatrechts überall im Reiche ungehindert in Anspruch zu nehmen[1]). Braunschweig-Lüneburg gegenüber hätte das, sollte man meinen, besondere Schwierigkeiten haben müssen, da erst 1748 unter kaiserlicher Vermittlung ein Vergleich zwischen beiden Theilen zu Stande gekommen war, der eine Ordnung und zweckmäßige Verbindung zwischen den landesherrlichen und den das Gebiet durchlaufenden Taxisschen Posten getroffen hatte. Aber „in der Zeit, da die Franzosen in der Qualität oesterreichscher

1) Pütter, Erörterungen I 114.

Auxiliarvölker sich fast aller kurbraunschweigischen Länder bemächtigt hatten und der Wienersche Hof deren Aufkünfte mit ihnen theilte", ließ sich der Reichshofrath bereit finden, den Versuch „einer fürstlich Taxischen durch das ganze Reich sich erstreckenden Universal-Postmonarchie" zu verwirklichen und ertheilte den deutschen Verbündeten Frankreichs, Cöln Pfalz und Mecklenburg, das Commissorium, die zu Gunsten der Taxisschen Ansprüche erlassenen Befehle zu vollstrecken [1]). In dieser wichtigen Angelegenheit ergriff Strube die Feder zur „Gründlichen Vertheidigung der Churf. Braunschweig-Lüneburgischen Postgerechtigkeit" (Hannover 1758), und als dagegen in Wien 1759 eine „Reichsgesetzmäßige Prüfung der sg. gründlichen Vertheidigung" erschien, nochmals zu dem „Beweis der Nichtigkeit aller Scheingründe" (Hannov. 1760), dem der Postvertrag von 1748 als Beilage zugefügt war. Strube übersandte seine Deductionen mit kurzen Begleitbriefen vom 19. Nov. 1758 und vom 11. Mai 1760 an Pütter. Dem ersten war eine sachliche Auseinandersetzung vom 24. Aug. 1758 voraufgegangen:

„Die Braunschweig-Lüneb. Postgerechtigkeit ist seit 1656 von dem Taxischen Hause nur deswegen angefochten, weil es supponirt, daß sie ein Reservatum Caesareum sey, diesem asserto aber unserer Seits beständig wiedersprochen, und man hat sich über solcher Frage beym Reichshofrath in keinen Process einlaßen wollen.

Die neuere Wahl-Capitulationes erfordern von dem Fürsten v. Taxis den Beweis eines rechtlichen Herbringens. Er kan es in den hiesigen Landen nicht darthun, weil die landesherrliche Posten älter sind als die Taxischen, sobald diese eingeführet werden wollen, es zur Contestation kommen und sie expresse nur bis auf weitere Verordnung, mithin ex beneplacito verstattet worden. Ueber solches alles geht der Reichshofrath hin, untersuchet gar nicht, ob ein rechtliches Herbringen fürhanden, sondern will alte Kayserliche Mandata und Rescripta exequiren, welche sich auf eine unerlaubte Interpretationem legum imperii gründen, vermöge deren das jus postarum dem Kayser im Reich allein zustehet."

Die Zeiten erschienen günstig, um auch auf dem staatskirchlichen Gebiete mit den gewagtesten Ansichten hervorzutreten. Eine ganze Reihe derartiger Schriften giengen aus einer Presse hervor, die in der Abtei zu St. Emmeran in Regensburg unterhalten wurde und niemand anders als den Abt selbst zum

1) Vgl. die nachher citirten Denkschriften Strubes und Manecke, Braunschw.-lüneb. Staatsrecht (Celle 1859) S. 340.

Verfasser hatten. Johann Baptista Krauß, seit 1742 Abt zu St. Emmeran, hat in den J. 1757—59 eine Anzahl von kirchenpolitischen Brochüren geschrieben, die eine für einen katholischen Geistlichen immerhin reichliche Wissenschaft von teutschen Staatssachen zeigten, sofern sie in die Religion einschlugen, aber in so verwegener Weise gegen das bestehende Recht vorgiengen, daß sie am letzten Ende die Verbindlichkeit des Westfälischen Friedens leugneten[1]). Strube, der Pütter in den J. 1758 und 59 „viele schlechte Ratisbonensia“ zusandte, war der Meinung, die „Einfälle“ des Fürsten zu St. Emmeran verdienten zwar kaum beantwortet zu werden, man habe aber doch in Hannover ein gänzliches Stillschweigen für schädlich gehalten (16). Er hatte deshalb zuerst eine „Entdeckte Verdrehung des Westphälischen Friedensschlusses“ (Frankf. 1758) verfaßt und als vom Fürstbischof ein „Entdecktes Blendwerk“ entgegengesetzt war, in einer „Zugabe“ (Hannov. 1759) die Angriffe des Abts zurückgewiesen. In den protestantischen Kreisen war man schon lange verwundert über die im Angesicht der ganzen Reichsversammlung zu Regensburg vorgetragenen Lehren und ihre den Reichsconstitutionen schnurstracks zuwiderlaufende Duldung, so daß der Kaiser sich zuletzt doch veranlaßt sah, „dem Verfasser in der Stille seine Schreiberei niederzulegen“[2]).

Die schweren Zeiten des siebenjährigen Krieges, unter denen ein großer Theil der Correspondenz geführt wurde, züngeln sonst nur selten in die gelehrte Unterhaltung, obschon doch beide Theile direct genug durch den Krieg betroffen wurden. Am Weihnachtstage 1757 hatte Strube seinen Brief an Pütter mit dem Satze gsschlossen: „die jetzige betrübte Zeiten verbinden uns um de[sto] mehr guten Freunden in dem einstehenden neuen Jahr beßere anzuwünschen. Gott nehme in selbigen E. HE. in seine besondere Obhuth und laße den leidigen Krieg ihre rühmliche Bemühungen nicht stören, sondern verleihe denenselben alles ersinnliche Guthe“ (12). Im nächstfolgenden Sommer freute sich Strube zu hören, daß die französische Invasion in Göttingen nicht mehr Unheil veranlaßt hatte und konnte unterm 24. Aug. melden, daß die Minister von Stade wieder zurückgekehrt seien oder in jenen Tagen zurück erwartet würden. Glaubte man damals der weitern Occupation überhoben zu sein, so hat der südliche Theil des Landes, insbesondere Göttingen noch Jahre lang darunter zu leiden gehabt. Der Sieg

1) J. J. Moser a. a. O. S. 66; Pütter, Litteratur II 159. v. Schulte, Gesch. der Quellen u. Litteratur des canon. R. III 1, 193.

2) Gött. gel. Anzeigen 1759 St. 104; Moser a. a. O.

des Herzogs Ferdinand von Braunschweig bei Minden (1759 Aug. 1) hatte die frohesten Hoffnungen erweckt. „Daß des flüchtigen Feindes Menagement gegen die dortige Universität sich auch beym Abzuge geäußert habe, wünsche ich sehr zu vernehmen“ schrieb Strube am 12. Aug. 1759). „Andern Orten, wo er passiret, ist auf das härteste begegnet und mein Gut bey Hameln nun zum zweyten mahl ausgeplündert. Doch würde es uns noch ärger ergangen seyn, wenn wir nicht durch den erfochtnen herlichen Sieg durch Gottes Gnade aus den frantzösischen Händen errettet wären“ (16). Die letzte die Zeitverhältnisse berührende Aeußerung und eine der letzten des Briefwechsels überhaupt [1]) geht auf die Friedensvorschläge, wie sie vorzeitig in der Litteratur seit 1760 hervortraten: „Hiebey gehen einige Ratisbonensia. Mir ist es unbegreiflich, wie es kluge Leute wagen können, dergleichen Friedensvorschläge zu thun, wie diese Schriften enthalten, da jedoch [2]) deren Bestimmung nicht davon abhänget, was den Europäischen Staaten am nützlichsten ist, sondern wer sich im Stande befindet, dem andern Gesetze vorzuschreiben, deßen sich noch kein kriegender Theil rühmen kann, sondern es wird vermuthlich der Mangel der Kräfte alle nöthigen, ihre weit aussehende projets fahren zu laßen und Temperamenta anzunehmen.“

II.

Wie an Zahl so auch an Inhalt reicher sind die Briefe der zweiten Sammlung, die Briefe von G. A. v. Münchhausen an Pütter. Sie umfassen fast die ganze Zeit von dem Eintritt Pütters in die Universität Göttingen bis zum Tode Münchhausens. Von den 22 Jahren 1748 bis 1770 sind 17 mit Briefen bedacht, die ersten Jahre am reichsten: aus dem J. 1748 sind sieben, aus dem folgenden neun vorhanden. Die Sammlung ist aber bei weitem nicht vollständig. Wir wissen von andern Briefen des Ministers an Pütter. Sieben aus dem Jahre 1749 habe ich früher aus einer Hs. der Göttinger Bibliothek in der Abhandlung: die ersten Jahrzehnte des staatsrechtlichen Studiums in Göttingen (1887) mitgetheilt. Andere hat Pütter in seiner Selbstbiographie angeführt oder abgedruckt (z. B. S. 235, 424). Auch von den Briefen unserer Sammlung ist in dem gedachten Buche Gebrauch gemacht, einer vollständig wiedergegeben: Nr. 47 v. 1767 Janr. 4 = Selbstbiogr. II

1) Brief v. 13. Juli 1760.

2) jedoch = doch.

485. Die Vergleichung ist lehrreich; sie zeigt, daß auch ein so genauer und sorgfältiger Gelehrter wie Pütter auf einen diplomatisch getreuen Abdruck, wie man ihn heute auch von modernen Briefen veranstaltet, keinen Werth legte. Sie berichtigt zugleich einen unschönen Druckfehler. Der Brief enthält einen Dank Münchhausens dafür, daß Pütter einen Antrag als Reichshofrath nach Wien zu gehen abgelehnt hatte „und S[r]. Kgl. Majestät Dienste selbst denjenigen vorziehen wollen, die viel gläntzendes und vortheilhaftes darbieten.“ Der Minister fuhr dann nach dem Drucke fort: es ist diese Gesinnung so wahr und zugleich so preiswürdig, während der Brief lautet: es ist diese Gesinnung so rar u. s. w. Der größte Theil der Briefe ist von Münchhausen eigenhändig geschrieben; nur bei wenigen hat er sich mit der bloßen Unterschrift begnügt. Erklärlich sind die Briefe sehr kurz gehalten, aber auch der kürzeste versäumt nicht die Anrede: Hochedelgebohrner Herr, Hochgeehrtester Herr Professor, die seit 1758 der Formel: Wohlgebohrner Herr, Hochgeehrtester Herr Hofrath Platz macht[1]).

Nach Beendigung seiner fast ein Jahr dauernden peregrinatio academica, zu Ausgang September 1747 trat Pütter seine Stellung in Göttingen an. Da er die Reise zu einem Theile auf öffentliche Kosten ausführte[2]), so erstattete er auch während ihrer Dauer Berichte an den Minister und empfieng von ihm Briefe. Wußte Pütter nun auch, daß Münchhausen mit Mitgliedern der Universität wie Mosheim Haller Gesner in laufendem Briefwechsel stand, so war er doch nicht wenig verwundert, als der Curator mit ihm, der Jüngsten einem, die begonnene Correspondenz fortsetzte. So ehrenvoll der Verkehr für beide Theile war, so wirkt doch unverkennbar auf Münchhausens Seite eine besondere Absicht ein. In den ersten Jahrzehnten der Universität Göttingen läßt sich für manche Fächer anstatt von einer Einwirkung auf das Land, in dem sie lag, von einer Einwirkung des Landes auf die Universität reden. Das gilt besonders für die Rechtswissenschaft. Einen Rechtslehrer namentlich auch für das jus publicum zu gewinnen, wie ihn sich Münchhausen, Strube und andere seiner Umgebung wünschten, war nicht gelungen. So beschloß man ihn sich heran-

1) Die im Folgenden vorkommenden Briefnummern entsprechen der chronologischen Ordnung, so daß aus dem J. 1748: 1—7, 1749: 8—16, 1750: 17, 1753: 18 u. 19, 1754: 20, 1756: 21 u. 22, 1757: 23 u. 24, 1758: 25—29, 1761: 30 u. 31, 1762: 32—35, 1764: 36, 1765: 37—43, 1766: 44 u. 45, 1767: 46 u. 47, 1768: 48—50, 1769: 51—54, 1770: 55 stammen.

2) Vgl. m. Aufsatz: die Anstellung Pütters als Professor in Göttingen (Ztschr. des histor. Vereins für Niedersachsen, Jg. 1883) S. 256 ff.

zuziehen. Ein Verwandter Münchhausens, der Assessor des Reichskammergerichts von Schwarzenfels, hatte auf den jungen Licentiaten in Marburg, der oft zur Vertretung von Rechtsangelegenheiten nach Wetzlar kam und in Marburg Reichsprozeß vortrug, aufmerksam gemacht. Bevor er seine Göttinger Professur antrat, ließ man ihn auf Staatskosten reisen. In Gesellschaft zweier jungen Hannöveraner aus angesehenen Kreisen, Falcke und Strube[1]), besuchte er von Wetzlar aus Regensburg und Wien. Nach Göttingen übergesiedelt, wurde er in seinen Studien durch die Rathschläge Strubes, von denen früher die Rede war (S. 308), und die Hülfsmittel Münchhausens unterstützt. Schon bei dem Besuche, den Pütter auf Veranlassung des Herrn von Schwarzenfels zu Pfingsten 1746 in Hannover, um sich vorzustellen, machte, wies ihm Münchhausen in seinem Cabinette eine Sammlung von mehr als 30 starken Folianten, in denen er für das deutsche Staatsrecht merkwürdige Papiere während seiner Thätigkeit als kurbraunschweigischer Comitialgesandter in Regensburg (1726—28) und nachher als Geheimer Rath in Hannover vereinigt hatte. Er machte ihm zugleich die Hoffnung, die Sammlung in Göttingen, wenn er in den Dienst der Universität eingetreten sein würde, benutzen zu können (Selbstbiogr. I 116). Die große Zahl von Briefen, welche die Jahre 1748 und 1749 aufzuweisen haben, erklärt sich aus der Zusendung jener Collectaneen Münchhausens. Pütter nennt sie einmal Staatsmanuscripte (S. 177), der Ausdruck bezieht sich auf ihren Inhalt, nicht auf das Eigenthum an den Papieren. Münchhausen betrachtete sie entschieden als sein Privateigenthum; er verlangte von Pütter eine Bescheinigung darüber, daß es ihm gehörige Mss. seien. Die Bände, mit fortlaufenden Nummern, nach denen sie citirt werden, und einem Index versehen (13. 14), wurden nach und nach nach Göttingen übersandt und zum Gebrauch Pütters ohne Einschränkung bestimmt. Auch andere, z. B. Böhmer, Achenwall haben solche erhalten, aber hier ist doch bemerkt, Achenwall kann sie „bey seinem Collegio statistico in so weit gebrauchen, daß einigen wenigen geschickten Auditoribus wie z. E. dem Herrn Graven von Bottmer[2]) anleitung gegeben werde,

1) Oben S. 306. Falcke ist Joh. Phil. Konrad, der 1767—76 Subdelegirter Hannovers bei der Kammergerichtsvisitation als Führer der Protestanten eine hervorragende Rolle spielte. Sein Sohn, Ernst Friedrich Hector, der ihm attachirt war, gehörte zu jener Wetzlarer Tafelrunde, die Goethes Umgang im Sommer 1772 bildete, und wird oft von ihm erwähnt.

2) Hans Caspar v. Bothmer, nachher dänischer Gesandter in England. Pütter Selbstbiogr. I 205. Es wird seiner besonders im J. 1758 gedacht, als Frankreich

wie in publicis geschickte relationes abzufaßen" (4). Mag anfangs eine Zurücksendung der Mss. beabsichtigt gewesen sein, Münchhausen ließ sich den Vorschlag Pütters, sie in Göttingen zu belassen, gefallen und wollte nur besonders anmerken, welche Bände er selbst ad evolvendum zuweilen gebrauche (8). Er verlangte denn auch hin und wieder einzelne zurück. „Bey denen jetzigen wunderbahren Zeiten habe ich öfters etwas nachzuschlagen" heißt es in einem Briefe bald nach Ausbruch des siebenjährigen Krieges (22). Außer den Manuscripten hatte Pütter aber auch Bücher von Münchhausen erhalten. Es ist in den Briefen von seinem Coccejus in Folio, seinem mit Papier durchschossenen und mit verschiedenen Notatis versehenen Index über den Lauterbach die Rede (22. 24). Jenes das Lehrbuch des Staatsrechts des Heinrich Cocceji[1]), das seiner Willkürlichkeiten ungeachtet allgemein auf den Universitäten als Lesebuch d. h. als Grundlage der Vorlesungen diente, dieses das compendium juris des Tübingers Lauterbach (1618—1678), das für privatrechtliche Vorlesungen und Erörterungen bis zur Mitte des 18. Jahrh. allgemein als Anhalt benutzt wurde. Ueber das weitere Schicksal seiner Collectaneen hatte Münchhausen keine ausdrückliche Bestimmung getroffen, aber seine Absicht gieng doch dahin, sie der Universität oder Bibliothek Göttingen zuzuwenden. Pütter, der sie unter Genehmigung des Ministers in einem besonders angefertigten Schranke aufbewahrte (12), hat denn auch dafür gesorgt, daß sie nach seinem Tode nicht in Privathände geriethen[2]), und sie sind dann von seinen Erben 1807 der Göttinger Bibliothek überliefert worden[3]). Pütter hat die Münchhausenschen Collectaneen für seine Arbeiten sehr fleißig benutzt, und wenn aus-

---

nachher abgeleugnete Anerbietungen zu einem Separatfrieden durch ihn an K. Georg II gelangen ließ. Schäfer, Gesch. des 7j. Krieges II 1 S. 226.

1) Das Buch ist mit dem übrigen Pütterschen Nachlaß (s. unten) in die Göttinger Bibliothek übergegangen, Cod. ms. Pütter 15 fol. Es ist das von Münchhausen in seiner Jenenser Studentenzeit erworbene Exemplar der Juris publici prudentia compendio exhibita ed. 3 (Francof. ad Viadr. 1705), dessen Octavblätter zwischen Folioblätter eingebunden sind. Auf den letztern stehen von zwei verschiedenen Händen herrührende Noten. Die von Münchhausens Hand zeigen, daß er noch in seiner praktischen Stellung das Buch zu Einträgen benutzt hat.

2) Gött. Gel. Gesch. II 226, Selbstbiogr. I 177.

3) Manuale der K. Bibl. z. 12. Novbr. 1807. Die Zweifel über die Vollständigkeit der Sammlung lösen sich zum Theil dadurch, daß die alte ihr von Münchhausen gegebene Ordnung mehrmals geändert ist; erhalten zum andern Theile ihre Bestätigung durch die ausdrückliche Bemerkung Pütters, daß er die Bände nicht in ganz ununterbrochener Reihe besitze, weil verschiedene nicht gerade ins Staatsrecht einschlagende andern mitgetheilt seien (Selbstbiogr. I 177).

wärts von den trefflichen Hülfsmitteln, die er wie kein anderer zur Hand habe, geredet worden ist, so hat man nicht zum wenigsten diese Sammlung im Sinne gehabt [1]).

Unter den in den Briefen berührten Gegenständen nehmen Pütters persönliche Angelegenheiten keinen erheblichen Raum ein. Ich habe früher an anderer Stelle gezeigt, wie der junge Professor, der an Bewährung seiner eigentlichen Kraft durch die Besetzung der staatsrechtlichen und rechtshistorischen Fächer behindert war, einen Ausweg suchte in neuen Unterrichtsplänen, die dann zu J. J. Mosers Project einer Staatsacademie den Anstoß gaben [2]). Der „Mosersche Plan" wird nur einmal berührt, als Münchhausen die Sendung eines Bandes von Niedersächsischen Kreissachen ankündigt, der nicht allein viel unbekannte, sondern auch solche Materien enthalte, die zu dem Moserschen Plane zu gebrauchen seien (12 v. 1749 April 18). Aber Pütters Wunsch nach größerer und eingreifenderer Thätigkeit tritt auch in der Correspondenz zu Tage. Er verlangt nach dem Beisitz in dem collegio conferendorum honorum und in der Facultät, „um eine und andere gute Disputation zu halten, auch ein practischer Publicist zu werden", wie Münchhausen es übersetzt, dem solcher Wunsch ohnbedenklich und nützlich fürkömmt; nur ersucht er ihn um die Politesse, bevor ihn ein Rescript als extraordinarius assessor in die Facultät (d. h. Spruchfacultät) setze, bei denen Mitgliedern, insbesondere den Herren Wahl und Gebauer, die Sache dahin zu unterbauen, daß sie bezeugten, Pütter solches gerne zu gönnen (10). Die Aufnahme in das Spruchcollegium ist dann allerdings bald gelungen. Schon im Monat seines Eintritts, im April 1749 erhielt er eine sehr umfangreiche und schwierige Arbeit zum Referat und in dem J. 1749 überhaupt sind 10 Sachen von ihm bearbeitet worden (Selbstbiogr. I 223). In die Honorenfacultät ist P. dagegen erst 1755 eingerückt, nachdem er zwei Jahre zuvor ordentlicher Professor geworden war. Während eines Jahres, von Ostern 1762 bis Ostern 1763, hielt sich P. am Gothaischen Hofe auf Ansuchen der Herzogin Louise Dorothea auf, einer sehr geistreichen und gescheuten Dame, die für Voltaire so begeistert war, daß sie ihn zur Ausarbeitung der Annales de l'Empire veranlaßte. Für den Unterricht ihrer Söhne hat sie sich aber nach soliderer Nahrung um-

1) J. J. Moser, neueste Gesch. der Teutschen Staatsrechts-Lehre (Frankfurt 1770) S. 126.

2) Die ersten Jahrzehnte S. 16.

gesehen und von König Georg III. einen längeren Urlaub für Pütter erwirkt, die beiden Prinzen, Ernst und August, in Reichsgeschichte und Staatsrecht zu unterrichten. Auch während dieser Zeit hat Münchhausen mit P. correspondirt und in Universitätsangelegenheiten seinen Rath eingeholt. Da der Urlaub anfangs nur auf ein halbes Jahr ertheilt war, erkundigte sich der Curator besorgt zu Anfang September 1762 nach der Zeit seiner Rückreise (34), hat sich schweren Herzens gleich darauf aber noch zu einer Verlängerung des Urlaubs verstehen müssen. „Herr Geh. Rath von Keller . . . wird E. W. benachrichtiget haben, daß ich nach dem wiederholten Befehl der Frau Hertzogin Durchlaucht in dero längeres Dortbleiben condescendiren müßen, so nützlich auch dero gegenwart in Göttingen jetzo gewesen seyn würde. Ich setze aber anbey zum voraus, daß E. W. alles solchergestalt einrichten werden, damit Sie ohnfehlbar vier Wochen vor nechstkommende Ostern wieder in Göttingen seyn können" (35).

Die litterarischen Arbeiten Pütters bilden seltener, als man vermuthen sollte, einen Gegenstand der Correspondenz. Gewissenhaft holt er des Ministers Genehmigung ein, wenn ihm die Abfassung von Gutachten aufgetragen wird, bei denen politische Bedenken obwalten könnten (36). Auf die Meldung Hallers, daß P. an den Göttinger Gelehrten Anzeigen mitzuarbeiten geneigt sei, verspricht der Minister für die Anschaffung der in Wien, Wetzlar und Regensburg herauskommenden Deductionen zu sorgen, die nach gemachtem Gebrauch der Bibliothek übergeben werden sollen (16). Mit besonderer Genugthuung erfüllte den Minister das Erscheinen von Pütters Versuch einer akademischen Gelehrten-Geschichte von Göttingen im J. 1765 oder wie er das deutsche Buch bezeichnet: de statu Gottingensi. Es wird ihm stückweise zugeschickt, er sorgt für Berichtigungen und Ergänzungen und bestellt 60 Exemplare auf Schreibpapier gegen baare Bezahlung. Er urtheilt über die Schrift: sie sei nicht nur wohl gerathen und werde Pütters Feder Ehre machen, sondern auch sicher die gute Wirkung thun, die man sich davon zu versprechen hat (36, 38—40). Das Buch gieng auf einen Wunsch des Ministers zurück, der dem Publicum eine vollständige und genaue Kunde dessen, was während der ersten dreißig Jahre des Bestehens der Universität Göttingen ihre Lehrer geleistet, ihre Leitung an Einrichtungen geschaffen hatte, zugänglich machen wollte. Die Ausführung der Idee gebührt dann aber Pütter allein. Sein Vorschlag (Selbstbiogr. II 464) „ohne allen Schmuck, ohne Declamation, ohne Lobpreisung nur die Sache selbst reden zu lassen" hat für Göttingen eine so brauch-

bare und zuverlässige Grundlage seiner Geschichte geschaffen, wie sie keine andere deutsche Universität besitzt.

Die fortgesetzte Correspondenz, die verständige Tüchtigkeit Pütters, sein Interesse für Göttingen, der Erfolg seiner akademischen Thätigkeit hatten dem jungen Staatsrechtslehrer, der sich ganz nach dem Herzen Münchhausens entwickelte, früh dessen volles Vertrauen gewonnen. In persönlichen und sachlichen Angelegenheiten Göttingens befragte er ihn um seine Meinung. Als ein Opfer des siebenjährigen Krieges war Joh. Matthias Gesner 1761 Aug. 3 gestorben. Es war schwer einen tauglichen Ersatz für den großen Philologen zu finden. Gatterer, der seine fränkischen Landsleute unterzubringen liebte, empfahl den Director des Aegidiengymnasiums zu Nürnberg, Nicolaus Schwebel, der sich durch eine Ausgabe des Bion und Moschus bekannt gemacht hatte. Münchhausen bat Pütter sich nach dem Empfohlenen zu erkundigen, machte aber die Sache nicht dringlich, da die „gegenwertige traurige umstände ohnedem die sache in suspenso zu laßen“ nöthigten (32). Auch hatte er nicht viel Vertrauen zu dem Empfehlenden, dessen Plan eine historische Gesellschaft zu begründen im Schooß der Societät mannigfachen Widerspruch fand und von Münchhausen mit der Bemerkung an Pütter begleitet wurde: der gute Mann flattiret sich wohl mehr als er thun solte, und seine Auditores werden finden, quantum distent ora lupinis. Während Pütter dann in Gotha war, kam ein anderer Candidat für die philologische Professur aufs Tapet. Es war niemand anders als der famose Klotz. Als er sich nachher so unerfreulich entwickelte, — außer der Polemik mit Lessing schadete ihm in Göttingen seine Verheiratung mit einer Tochter der Madame Sachsin, einer aus Bürgers Leben nachtheilig bekannten Frau[1]) — wollte niemand an seiner Berufung Theil gehabt haben. Es ist deshalb ein Werth unserer Briefe, daß sie zur Feststellung der historischen Wahrheit beitragen. Am 20. Juni 1762 schrieb Münchhausen: E. W. erhalten hiebey ein Schreiben von Herrn Michaelis wegen einer Persohn, darauf die Absicht auch gerichtet gewesen ist; ich bitte dero attention darauf zu richten und dasjenige mir zu rathen, was Sie dem bono Academiae gemes finden (33). Unterm 2. Sept. 1762 hieß es dann: Da E. W. die Berufung des Herrn Klotz diensam erachtet, so ist solches von Herrn Michaelis geschehen und die Vocation von erstern angenommen worden, so daß er auf Michaelis seine neue

1) O. Mejer, culturgesch. Bilder aus Göttingen (Hannov. 1889) S. 74. Strodtmann, Briefe von u. an Bürger IV 258 vgl. mit I 12 ff.

Function antreten wird; ich zweifele jedoch nicht, es werden E. W. des übrigen von mir geschehenen Ersuchens eingedenk seyen, und wie unseren sonstigen Bedürfnißen abzuhelfen so sorgfeltig erwegen als behufige Erkundigungen einziehen (34). Der Minister, dem offenbar der Ersatz, den Michaelis und Pütter billigten, nicht genügte, wie denn auch Klotz nur als Extraordinarius nach Göttingen berufen wurde, erwies sich scharfsichtiger als die beiden Rathgeber; schon nach Jahresfrist, als Klotz zwischen Weggehen nach Halle und Bleiben in Göttingen schwankte, meinte Michaelis, der Verlust werde nicht so groß sein, weil er sich, von dem ihm widerfahrenen Glück eingenommen, eben nicht zur Avantage geändert habe (Brief an Münchhausen v. 1763 Sept. 3, Curatorial-Archiv).

Nach dem siebenjährigen Kriege, wo es sich nach Münchhausens Bezeichnung nahezu um eine neue Creation Göttingens handelte, tauchten mancherlei Pläne auf, von deren Durchführung man sich eine größere Einwirkung der Universität auf das practische Leben versprach. Dahin gehörte insbesondere die Gründung einer Kriegsschule und ihre Verbindung mit der Universität: ein Gedanke, der durch den Verkehr mit intelligenten französischen Officieren während der Occupation Göttingens, noch mehr durch Anstrengungen, welche verschiedene Staaten nach dem Vorbilde Frankreichs zu jener Zeit auf dem Gebiete des militairischen Bildungswesens machten [1]), nahe gelegt sein mochte. Kästner hatte schon 1762 ein Programm geschrieben: über die Ursachen, die ein Gelehrter haben kann, sich um die Kenntniß des Kriegswesens zu bemühen [2]). Die gute Ausbildung, die die Georgia Augusta in mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern ihren Schülern zu gewähren vermochte, bot eine Anknüpfung. Kästner hatte während des Krieges französische Officiere, die die Kriegsschulen ihrer Heimat besucht hatten, unterrichtet und gefunden, daß die Theorie der mathematischen Kriegswissenschaft da nicht besser als auf deutschen Universitäten gelehrt werde, nur noch flüchtiger [3]), oder, wie er das gleichzeitig lateinisch ausgedrückt hat: adibant me saepius quibus ab ingenio nomen datum est, illos vidi nihilo me profundius aut subtilius sapere [4]). Carsten Niebuhr studirte, um sich

1) Poten, Geschichte des Militair-Erziehungswesens II (Mon. Germ. paedagogica XI, Berl. 1891) S. 23.

2) Schönwiss. Werke III 95.

3) Kästners Brief von 1788 das. IV 105. Der Brief, aus Kinds Harfe entnommen, ist offenbar an Mauvillon gerichtet.

4) Elogium Alb. L. Frid. Meisteri (Gott. 1789) S. V. Der citirte Brief Kästners wiederholt verschiedenes aus dem Elogium.

zur Aufnahme in das hannoversche Ingenieurcorps vorzubereiten, in Göttingen und war namentlich Kästners Schüler. Auch K. Georg III. scheint der Idee günstig gewesen zu sein. Die Göttinger Bibliothek erhielt in den 60er Jahren eine auf die Kriegswissenschaft sich beziehende Vermehrung, und ein jüngerer Universitätslehrer Meister, Bruder des bekannten Criminalisten, seit 1764 außerordentlicher Professor für Mathematik, civile und Kriegsbaukunst, machte 1765 auf öffentliche Kosten eine Reise nach Frankreich, um sich über dessen militairische Bildungsinstitute zu unterrichten. In einem Programm für den Winter 1765/66 kündigte er unter Bezugnahme auf diese Schritte der Regierung seine Bereitwilligkeit an, auch über die Anfangsgründe der Kriegskunst überhaupt und die Fortification und Artillerie besonders Vorlesungen zu halten. In Meisters Ausführungen waren namentlich die Einrichtungen in Straßburg als nachahmenswerthe Vorbilder empfohlen, wie er denn auch dortige Persönlichkeiten für Göttingen zu gewinnen vorschlug. Unser Briefwechsel zeigt nun aber, daß Münchhausen solchen Plänen nichts weniger als günstig gesinnt war. „Je mehr ich bisher der Sache nachgedacht, je mehr werde ich überzeuget, daß eine auf den frantzösischen Fuß einzurichtende Ecole militaire bey uns sich nicht wohl thun laße“, beginnt sein Brief v. 13. Oct. 1765. Obschon die Officiere in Göttingen Gelegenheit haben würden, viele ihnen nöthige und nützliche Wissenschaften zu erlernen, so lehnte der Minister es doch ab, sich mit der Gründung eines solches Institutum zu befassen, das seiner Beschaffenheit nach zu dem Militair-Etat gehöre und von selbigem dirigiret werden müsse. Das Universitäts-Departement könne zum Besten der Officiers nicht mehr thun als sich durch mündlichen Unterricht der Kriegswissenschaften erreichen lasse. Herr Meister möge sich deshalb auf Collegien und was in selbigen mit Modellen ausgerichtet werden könne beschränken. Auch in Straßburg dirigire nach Meisters eigenen Mittheilungen die Uebungen im Felde nicht der Professor der Mathematik Brackenhofer, sondern ein Officier unter dessen Zuziehung. Dergleichen Kosten könnte aber unmöglich aus dem Fonds der Academie entnommen werden. Die Berufung des Herrn Herrenschneiders sei deshalb auch so nöthig nicht und werde vieles davon abhangen, inwiefern Herr Meister einschlage (41). Münchhausens ablehnendes Verhalten empfieng von verschiedenen Seiten her Unterstützung. Herrenschneider in Straßburg, mit dem man in Hannover in Verhandlung getreten war, hatte wenig Neigung zu kommen und fragte, was er eigentlich in Göttingen solle. Kästner, dem man den Briefwechsel zur Einsicht schickte, rieth von allen

weitaussehenden Plänen, die ohne praktische Uebungen nutzlos bleiben würden, ab; und so ließ man sich an Meisters Vorträgen genügen. Wenn seine Ankündigungen über die Kriegskunst lesen zu wollen, in der Berliner neuen Kriegs-Bibliothek lächerlich gemacht wurden, so ist kein Geringerer als Scharnhorst dagegen aufgetreten, hat theils Meisters gründliche Kenntnisse der Kriegswissenschaft gerühmt und sich dafür auf seine Recensionen in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen und den Umstand berufen, daß sein Collegium über Taktik abschriftlich in Umlauf sei und von Sachverständigen geschätzt werde, theils auf Struensee, den Bruder des dänischen Ministers und spätern preußischen Minister, der als Lehrer an der Ritterakademie zu Liegnitz sich mit der Anwendung der Mathematik auf die Kriegskunst beschäftigt und durch seine Anfangsgründe der Kriegsbaukunst verdient gemacht hatte, und auf Andreas Böhm, Professor der Mathematik in Gießen, den Herausgeber des Magazins für Ingenieure und Artilleristen (seit 1777), als Beispiele hingewiesen, daß bloße Gelehrte oft gründlicher als Soldaten die Kriegswissenschaft vortragen könnten [1]). Es haben denn auch einige Officiere bei Meister und Kästner gehört, aber der Gedanke an eine Kriegsschule in Göttingen wurde aufgegeben [2]). Wenn nach Meisters Tode (1788) der Ingenieur-Hauptmann Gotthard Christoph Müller zum außerordentlichen Professor für Mathematik und Militairwissenschaften bestellt wurde, so darf das nicht verleiten, von einem in Göttingen bestehenden Lehrstuhl für Kriegswissenschaften zu sprechen [3]); denn es war bei Vorlesungen über militairische Encyclopädie, wie sie Müller vorhatte und Scharnhorst empfahl, mehr auf eine allgemeine auch für Nichtmilitairs — Scharnhorst nannte: Geschichtsschreiber und Forscher — nützliche Uebersicht der Kriegswissenschaften abgesehen und das Vertrauen auf den Erfolg der Ankündigung nicht eben groß, denn Scharnhorst macht eventuell den gewiß zweckmäßigen Vorschlag, über den siebenjährigen Krieg und nach und nach auch andere merkwürdige Kriege Vorlesungen zu halten und dabei die zum Verständniß erforderlichen Kenntnisse beiläufig mit einfließen zu lassen [4]). Erfolgreicher erwiesen sich andere praktische Pläne, weil sie sich besser in den Rahmen der Universität einfügen ließen. Münchhausen hätte kein Schüler Halles sein müssen, wenn er nicht

1) Bibliothek für Officiere II (Gött. 1785) S. 286. Lehmann, Scharnhorst I 81.
2) Kästner IV 106.
3) Jähns, Gesch. der Kriegswissenschaft III 2483.
4) Neues Militairisches Journal Bd. V St. 10 (Hannover 1791) S. 300.

auf die Pflege der „Oeconomie" an seiner Hochschule bedacht gewesen wäre. Lange Zeit sind aber seine Anstrengungen, einen tüchtigen Vertreter des Fachs zu finden, fruchtlos geblieben. In der zweiten Hälfte der sechsziger Jahre kehrte ein geborner Hannoveraner, der 1759—62 in Göttingen als Studiosus der Theologie inscribirt gewesen war, aber mehr philologische Studien getrieben hatte, nach längern Reisen in den Niederlanden und Schweden und einer dazwischen liegenden Lehrerthätigkeit in Petersburg, nach Göttingen zurück, und fieng, zum außerordentlichen Professor im Herbst 1766 ernannt, an über diejenigen Gegenstände zu lesen, die die Zeit unter dem weiten Mantel der Cameralia zusammenfaßte. Johann Beckmann bewährte sich bald so gut, wie der nachfolgende Brief erkennen läßt.

Hannover den 6. Dec. 1767.

Es freuet mich sehr, aus E. W. geehrtesten zu vernehmen, daß des Herrn Becmans application auf die oeconomica so gut von statten gehe und alle Hofnung vorhanden sey, daß man mit Ihm den Zweck glücklich erreichen werde.

Das nothwendigste wird freilich noch seyn, daß ihm gelegenheit gemachet werde, künftigen Sommer sich bey Aemtern umzusehen. Dieses und welche öhrter er seiner absicht am diensamsten erachtet, wohl von ihm selbst zu bestimmen ist. Der Herr Landdrost von Münchhausen zu Moringen ist ein guter Wihrt und Haushalts Verständiger, noch mehr aber der Landdrost von Münchhausen zu Haarburg, der den Haußvater schreibet und der ihn gern zu sich nehmen wird.

Wenn Herr Beckmann seinem Collegio oeconomico zugleich vor angehende Beamte eine Unterweisung beyfügen wolte, so köndte er dazu aus einem Aufsatz, den ich E. W. heute zuschicke, guten Stoff finden und vermuthlich seinen applausum damit vergrößern. E. W. können nach gutbefinden, wenn sie diese Idee diensam finden, dem Herrn Beckmann diesen Aufsatz zustellen, ohne zu sagen, daß er selbigen von mir habe. Solte er demnechst noch mehrere Erleuterung darüber bedürffen, so kan ich ihm solche allezeit verstatten. Ich aber beharre mit ohnaussetzlicher Hochachtung

E. W.
ergebenster Diener
Münchhausen.

Am Rande: Mir darf [1]) das Manuscript nicht remittiret werden.

Die beiden im Briefe erwähnten Herren von Münchhausen sind wenn auch Namensvettern, doch ziemlich entfernte Verwandte des Briefschreibers. Der Landdrost von Moringen, Börries von Münchhausen (1702—1773), der weißen Linie des Geschlechts angehörig, mit einer Nichte Gerlach Adolfs verheiratet, war in der Göttinger Gegend begütert (Parensen, Moringen). Als Beamter erwarb er sich besondere Verdienste um die Stadt Moringen, das 1735 errichtete Waisenhaus, das jetzt als Werkhaus dient. Seine Leistungen

1) = braucht.

als praktischer Landwirth bewogen die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, ihm die Ehrenmitgliedschaft anzutragen, die er bescheiden ablehnte [1]). Litterarisch bekannt ist der Harburger Landdrost, Otto von Münchhausen (1716—1774) [2]), mit dem Minister zu der schwarzen Linie des Geschlechts gehörig, der seine Güter in der Nähe von Hameln hatte: Schwöbber, Voldagsen, Nordholz. Naturforscher, mit Linné befreundet, gehört er zu den verdienten Männern des hannoverschen Landes, die für die Hebung der Landwirthschaft, ihre rationelle Handhabung mit Lehre und Beispiel wirkten. Seine Obstplantagen in Schwöbber, die Gewächshäuser, seltene Baumarten machten seine Besitzung weithin berühmt. Der botanische Garten in Göttingen hat ihm werthvolle Bereicherungen zu danken. Nach seiner Schrift pflegt man ihn den Hausvater zu nennen, einer periodischen, aber ganz allein vom Herausgeber verfaßten, in den Jahren 1764—1773 erschienenen Schrift, in der er nach dem Beispiel der oekonomischen Nachrichten des Freiherrn Peter von Hohenthal in Kursachsen seine zwanzigjährigen Erfahrungen für die niedersächsischen und westfälischen Haushaltungen in lauter nützlichen Abhandlungen niederlegen wollte. Wie auf dem Tische des idealen Landwirths, den das Titelkupfer zeigt, Linné und Virgil liegen, so bleibt der Verfasser durchaus nicht bei Mist und Pflug stehen, sondern sucht seine Leser auch moralisch und wissenschaftlich zu erheben und trägt seine Lehren in einem Style von ungewöhnlicher Reinheit und Klarheit vor. Der Aufsatz, dessen Münchhausens Brief gedenkt, ist abschriftlich in einer der aus Pütters Nachlaß auf die Göttinger Bibliothek gekommenen Handschriften (Cod. ms. Pütter 18 fol.) erhalten, trägt die Ueberschrift: Eines angehenden Beamten Anweisung und ist mit dem Pütterschen Bücherzeichen versehen. „Ein angehender Beamte ist in gerichtlichen Handlungen, ferner in sg. Cammersachen und denen übrigen in die Policey- und Landesverfassungen einschlagende Sachen specifice und nicht nur generellement zu instruiren". Dieser Anfang zeigt die Gegenstände an, über welche sich der aller Wahrscheinlichkeit nach von Münchhausen selbst verfaßte Aufsatz verbreitet. Man kennt noch eine andere handschriftliche Darstellung, die aus Münchhausens Feder herrührt und unter dem Aufsatze des Briefes gemeint sein könnte. Sie beginnt mit einer Aufzählung der Bestandtheile des Kurfür-

1) A. F. v. Münchhausen, Geschlechts-Historie des Hauses derer v. Münchhausen (Hannov. 1872) S. 26 ff.

2) Das. S. 51 ff. Pütter, Gött. Gel. Gesch. II 254.

stenthums Braunschweig-Lüneburg und setzt dann die Verfassung und Obliegenheiten des Geheimen Raths-Collegiums und der Rentkammer auseinander. Auch sie ist handschriftlich in der Göttinger Bibliothek vorhanden (Cod. ms. jurid. 596)[1]), aber auch sonst überliefert[2]). Die Entscheidung zwischen den beiden Aufsätzen giebt meines Erachtens schon der Ausdruck des obigen Briefs: „vor angehende Beamte eine Unterweisung", der in der von Pütters Hand dem Aufsatze gegebenen Ueberschrift wiederkehrt. Mag auch die zweitgenannte Schrift unter dem Rubrum: von der Rentkammer die einem Verwaltungsbeamten obliegenden Verpflichtungen im Detail ausführen, nach ihrem übrigen Inhalte ist sie doch mehr für den Zweck geeignet gewesen, um dessentwillen sie der Ueberlieferung nach entworfen worden ist: zum Unterrichte des Herrn Burchard Christian von Behr zu dienen, als er 1754 zum Mitgliede des Geheimen Raths ernannt wurde[3]).

Beckmann wurde einer der bekanntesten und verdientesten Professoren Göttingens. Schon am 28. April 1769 theilte Münchhausen mit, es sei ihm die professio oeconomiae bestimmt (53). Die Ernennung verzog sich aber noch länger als ein Jahr, weil von den drei Vormännern Beckmanns in der Facultät, Wedekind Meister und Dietze, wenigstens zweien, „kein Tort geschehen durfte." Herbst 1770 machte man die beiden letztgenannten und Beckmann zu Ordinarien. Rudolf Wedekind, der Director der Stadtschule und Pastor an der Marienkirche war, glaubte man „da er eigentlich zur Universität nicht gehöre" übergehen zu dürfen.

Man müßte es beinahe auffallend nennen, wenn in den Briefen von der Rückkehr Hallers nach Göttingen nicht die Rede wäre; war sie doch eine Angelegenheit, die seit 1760 die Gemüther in Göttingen in steter Bewegung erhielt und die letzten Lebensjahre des Curators abwechselnd mit Hoffnung und Kummer und — man kann es nicht verkennen — am Ende mit Bitterkeit erfüllte. Den 24. Juli 1768 übermittelte er Pütter den Auftrag Hallers für ihn ein Haus zu miethen, obschon er besorgte: so wie er es verlanget, wird es schwer fallen, ihm damit zu willfahren (48). Der Minister äußerte sein Befremden, daß Haller sich mit seinem Anliegen an Pütter wandte: „Es scheinet, derselbe sey mit Herrn Michaelis,

---

1) Jetzt beschrieben in W. Meyers Verzeichniß der Handschriften im Preußischen Staate I 1 S. 432

2) Nach einer E. v. Lenthe gehörigen Hs. gedruckt in: Zeitschr. des histor. Vereins f. Niedersachsen Jg. 1855 S. 269 ff.

3) Zeitschrift a. a. O.

mit dem er sonst correspondiret, zerfallen. Ist dieses, so wird seine gegenwart einen wunderlichen Contrast machen.“ Aber schon nach acht Tagen war offenbar das Kommen völlig wieder in Frage gestellt, denn ein Brief des Ministers vom 1. August beginnt: „Des Herrn von Haller Betragen in ansehung seiner rückkehr nach Göttingen ist so zweydeutig, daß ich mich bis hieher darin nicht zu finden gewust. Die darüber geführte veränderliche Sprache währet nun viele jahre, und der jetzige Mangel eines Hauses dienet ihm zum neuen Vorwand, sein anziehen dieses Jahr auszusetzen“ (49). Die Wohnung, die Haller bei seinem frühern Aufenthalte inne gehabt hatte, das für den Lehrer der Botanik im botanischen Garten erbaute Haus, war ihm nicht mehr geräumig genug; zur Zeit hatte es auch der Professor Büttner inne[1]), der Blumenbüttner, wie man ihn zur Unterscheidung von Christ. Wilh. Büttner, dem Steinbüttner, nannte. Für die Beseitigung des einen Hindernisses sorgte der Tod, Büttner starb noch vor Ablauf des J. 1768; zur Beseitigung des andern war Münchhausen bereit, die Dienstwohnung im botanischen Garten um einen Anbau, eine Gallerie, wie es in den Briefen heißt, erweitern zu lassen. Wie wenig der Minister aber Hallers Zusagen für ernst hielt, zeigt seine Aeußerung Zimmermann gegenüber, der als Leibarzt nach Hannover berufen zu Anfang August 1768 sich vorstellte und über Hallers Rückkehr nach Göttingen seine Meinung vorbrachte. Je le souhaite de tout mon coeur, repliqua Mr. le Premier Ministre, mais en ajoutant: je n'en crois rien[2]). Die Aussichten für das J. 1769, worauf Haller vertröstet hatte, wurden um nichts besser.

Hannover, den 1. Jan. 1769.

Der Herr von Haller schreibet mir abermahls sehr zweydeutig wegen seiner Hierkunft und declariret, daß er seinen abschied noch nicht fordern könne, auch nicht wiße, wie selbiger ausfallen werde, weil er noch eine Commission von Bern habe, vor deren Endigung es gegen den Wohlstand sey, seine Dimission zu verlangen. ich habe ihm geantwortet: daß bey sothaner ungewisheit ich auch die Gallerie nicht bauen laßen könne, weil dieselbe sonst von niemanden zu gebrauchen sey. ich gestehe es, daß das Hallersche Betragen gantz unbegreifflich ist. Soviel kan man aus seiner wankelmüthigkeit abnehmen, daß sich seine resolutiones von einem Tage zum andern so ändern, wo mehr oder mindere Hoffnung sich zeiget, daß er zu Bern seine Absicht erreichen werde. Wagen-Remise und Stallung findet sich bey dem Hause und soll daran nicht fehlen.

1) J. D. Michaelis an Haller, 1768 Nov. 16 (Bern, einzelner Brief).

2) Aus einem Briefe Zimmermanns an Haller v. 8. Aug. 1768 (in m. Aufsatze: Briefe zweier hannov. Aerzte an Haller, Ztschr. des histor. V. f. Nieders. 1891 S. 179).

Gott laße E. W. dis neue Jahr so beglückt und gesegnet seyn, als ich es wünsche. Ich beharre mit wahrer Hochachtung

E. W.
ergebenster Diener
Münchhausen.

ich habe schon gemuthmaßet daß die Freundschaft zwischen Herrn Haller und Michaelis verändert sey. Von Bestand kan sie beyder Gesinnung halber wohl nicht seyn.

Das letzte diesen Gegenstand betreffende Schreiben des Ministers ist vom 12. Februar 1769: „das hiebey zurückkommende Hallersche Schreiben ist numeris Platonicis obscurior. Er verspricht in 14 Tagen eine positive antwort zu geben, wahrscheinlich und nach seinen hisherigen praeludiis fällt selbige negative aus“ (52).

Die Wohnungsfrage hat in Göttingen zu allen Zeiten eine wichtige Rolle gespielt. Grade in Veranlassung der Unterhandlungen mit Haller beklagt es Münchhausen als einen Mangel, „daß in Göttingen so wenig Professor Häuser zu haben seyn.“ Die Besserung der Wohnungsverhältnisse hat nach dem siebenjährigen Kriege eine Hauptaufgabe der Behörden gebildet. Die Königliche Regierung hatte durch öffentliche Bekanntmachung allen Hauseigenthümern, die zwischen December 1764 und Michaelis 1765 ihre obern Stockwerke ausbauten und zu Studentenzimmern einrichteten, eine Baudouceur von 30 Procent versprochen. Auch denen, die nach einem beliebten Riß Häuser für Professoren bauen wollten, war die Regierung bereit 10 pro Cent Bauhülfs Gelder zu geben (49). Von den 1768 im Bau begriffenen Häusern hielt Münchhausen keines für geeignet zu dem gedachten Zweck, wenngleich es ihm schon ungemein lieb war zu vernehmen, daß neue Häuser gebaut wurden [1]). Mehr als 10 Procent Bauhülfsgelder zu bewilligen schlug er ab, und wer diese Unterstützung in Anspruch nahm, mußte den Riß des Hauses nach Hannover einsenden (50). Das erläutert den „beliebten Riß“ des vorstehenden Briefes.

Städtische Angelegenheiten Göttingens werden verhältnißmäßig häufig in der Correspondenz erörtert. Als während des siebenjährigen Krieges die Stelle des Göttinger Bürgermeisters erledigt wurde, wandte sich Münchhausen von Stade aus, wohin das Ministerium vor den anrückenden Franzosen geflüchtet war, an Pütter mit der Aufforderung, „ein ad res agendas sich schickendes subjectum“ ausfindig zu machen und vorzuschlagen (25, Selbstbiogr. I 421). Wie in andern hannoverschen Städten hatte

1) Gerade damals begann eine neue Bauthätigkeit in Göttingen. In den J. 1768—87 sind 160 Häuser gebaut worden, 1768 allerdings nur eins, aber in den beiden folgenden doch schon 6 und 9. Pütter, Gött. Gel. Gesch. II 9.

die Landesherrschaft zu Ende des 17. Jahrh. auch in Göttingen die alte Verfassung geändert, und seitdem bestand die Rathsbehörde aus zwei Bürgermeistern, einem Syndicus und acht Rathsherren, von denen nur die letztern auf dem Wege der Cooptation gewählt und der Regierung präsentirt wurden, während die Bestellung der Bürgermeister und des Syndicus ein Recht der Regierung geworden war. Pütter nannte dem Minister seinen hallischen Universitätsfreund, Heinr. Theod. Emminghaus, der seit einiger Zeit Mitglied des Kammergerichts in Berlin zu denen gehört hatte, welche von dem Großkanzler von Cocceji 1754 zur Ausarbeitung des strafrechtlichen Theils des Landrechts ausersehen waren (Stölzel, Brandenburg-Preußens Rechtsverwaltung II 230). So hoffnungsvoll Münchhausen den Vorschlag begrüßte, so enttäuscht äußerte er sich vier Wochen später: „Herr Emminghausen schreibt solche conditiones vor, daß es sein Ernst nicht sein kann zu kommen", und erklärte alle weitere Verhandlung für überflüssig (26. 27). Mochte auch Emminghaus von seinen ursprünglichen Bedingungen nachgelassen haben, so stiegen von der andern Seite doch auch die Anerbietungen nach und nach: von 700 auf 900 Thaler Gehalt in fixo nebst dem Hofrathstitul. Münchhausens größte Besorgniß war, Herr E. werde alles in Göttingen so kleinstädtisch und seinem bisherigen Ehrenstand ungemes halten, sich mit denen civitatensibus abzugeben (28). Er drang deshalb wiederholt in Pütter, seinem Freunde keinen Zweifel darüber zu lassen, worin die „Incumbenz des Consulats" bestehe: Oeconomica, juridica und Policeysachen (26). Die Ueberzeugung Pütters, daß der Empfohlene sich denen Consulatsbeschäftigungen allein widmen und große und geringe Sachen mit gleichem Eifer betreiben werde, bewog den Minister zu seinem letzten hohen Anerbieten (29). Aber die ganze Unterhandlung zerschlug sich, da Emminghaus' Entlassung aus Preußischen Diensten nicht zu erlangen war. Derselbe Vorgang wiederholte sich drei Jahre später nochmals, als die Stelle des königlichen Beamten, des Gerichtsschulzen in Göttingen, frei geworden war. Emminghaus, der sich inzwischen gelegentlich einer Durchreise den Geheimen Räthen in Hannover vorgestellt hatte, hatte so gut gefallen, daß man ihn gern für den königlichen Dienst gewonnen hätte. Aber es blieb dieselbe Schwierigkeit in Betreff der Dienstentlassung wie zuvor. Stärker noch muß die Unzulänglichkeit der Mittel ins Gewicht gefallen sein, denn grade bei dieser Gelegenheit wiederholt Münchhausen: hätten wir nur erst bessere Zeiten! Die gegenwertige klägliche umstände der hiesigen Cassen haben

nicht verstattet, die acquisition Dero Berlinischen guten Freundes zu machen, so hertzlich gerne ich solches zu thun gewünschet hätte (31. 35). Die Absicht des Ministers später auf ihn zurückzukommen erwies sich als unnöthig, da Emminghaus, dem die ausschließlich strafrechtliche Beschäftigung nicht zusagte, Verwendung im diplomatischen Dienst fand und später bei der Visitation des Reichskammergerichts fungirte. (Pütter Selbstbiogr. I 43 und 421). Nach Göttingen kam als erster Bürgermeister und Oberpolizeicommissar der Schwager Pütters, der Regierungsassessor Stock aus Braunfels, und hat von 1763 ab Jahrzehntelang die Stellung zur Zufriedenheit der Stadt und der Universität bekleidet (Selbstbiogr. I 422). Durch die nahen Beziehungen des Stadthaupts zu einem der angesehensten Mitglieder der Universität wurde manche Mißhelligkeit verhütet oder vermindert.

Die Briefsammlung gewährt ein Beispiel dafür, wie sehr Münchhausen, der mit unablässiger Sorgfalt um das Wohl Göttingens bemüht war, durch Vorgänge, die der Universität zum Nachtheil gereichen konnten, namentlich durch Störungen der Disciplin aufgebracht wurde.

Hannover den 8. Jan. 1766.

Da nach einem erst kürtzlich in Göttingen gehabten Duel mir schon wieder anliegend Nachricht zukömt, woraus ich zu meinem Leidwesen nicht anders denn eine schlechte disciplin und gantz verdorbene sitten vorstellen kan, so kan ich nicht anders als E. W. aufs inständigste bitten, diesem einreißenden Unwesen zu steuren und mir an Hand zu geben, wenn Sie es selbst dort nicht zwingen können, was vor Maasregeln zu nehmen seyn

ich beharre

E. W.
ergebenster Diener
Münchhausen.

E. W. kan ich nicht beschreiben, wie sehr mich die dortige disciplinlose Umstände beunruhigen. Man richtet dadurch die Universität zu grunde und destruiret auf einmahl, was in so langer Zeit gebauet worden. Solche reudige Schaffe muß man relegiren und wegschaffen, ne pars sincera trahatur. ich bitte E. W. aufs angelegenste diesem Unfug mit Nachdruck zu steuern

Münchhausen.

Den 10. Jan.
1766.

Das Jahr 1766 ist diesen Anfängen entsprechend reich an Aufregung und Unruhen geworden. Im April wurde bei einem Zweikampf, der auf Ordensstreitigkeiten zurückgieng und auf einer Stube des Michaelischen Hauses (des jetzigen physikalischen Cabinets) ausgefochten wurde, ein stud. jur. Techentin aus Lübeck

von einem Mediciner Carmon aus Parchim erstochen[1]). Ende Juli, Anfang August war die akademische Jugend durch Verbote, die man gegen Promotionsschmäuse, Abendmusiken u. dgl. zu richten für nöthig hielt, in solche Bewegung gerathen, daß eine königliche Untersuchungscommission von Hannover geschickt wurde[2]). In der ersten Hälfte des Jahres war der Mediciner Vogel, in der zweiten Kästner Prorector. Wie es auffallen muß, daß der Minister sich in den obigen Briefen mit besonderer Dringlichkeit an Pütter wendet, der amtlich mit der Angelegenheit nur in so weit zu thun hatte, als er Beisitzer der academischen Deputation war, so noch mehr, daß die Augustvorgänge mit Pütter in solche Verbindung gebracht werden, daß sich auswärts das Gerücht verbreitete, er wolle aus Mißvergnügen über die Unruhen von Göttingen weggehen (Selbstbiogr. II 479). Pütter nennt das Gerücht grundlos. Aber daß jene Unruhen besonders als gegen Pütter gerichtet aufgefaßt wurden, zeigen briefliche Aeußerungen des damals in Altona wohnhaften Geographen Büsching: „daß die dortigen Studiosi neulich so unruhig gewesen sind, ist mir sehr unangenehm; am meisten bedaure ich, daß der rechtschaffene Mann Herr Hofrath Pütter dabey vorzüglich viel Verdruß gelitten hat“ (1766 Aug. 20, und ähnlich Aug. 27, Michaelisscher Briefw. II 207 ff.). In Anlaß eines zwei Jahre später vorgekommenen Tumults äußert sich Münchhausen anerkennender über die akademische Polizei: ich freue mich sehr, daß der Tumult gestillet und die Ruhe hergestellet seye. Indeß düncket mich doch nöthig zu seyn, die uhrheber dieser Petulanz mittelst eines consilii abeundi wegzuschaffen. (1768, Aug. 1. N. 49).

Daß die geselligen Verhältnisse unter den Studirenden häufigen Anlaß zu Ausschreitungen des vorigen Jahrhunderts gegeben haben, bezeugen die Acten des Universitätsgerichts. Die Behörde in Hannover war deshalb sehr beflissen, diesen Zweig der Disciplin zu beaufsichtigen und zu reglementiren. Aber nicht blos mit Verboten und Strafen schritt man ein, sondern auch positiv, sorgte für öffentliche anständige Vergnügungen, bei denen Studenten mit Professoren in Beziehung traten. Einer solchen Gunst erfreuten sich besonders öffentliche Concerte, die im Winter alle Sonnabend von 5—7 U. stattfanden. Man wünschte sie in ein öffentliches Lokal zu verlegen. Dagegen äußerte Münch-

1) Pütter, Selbstbiogr. II 870. O. Mejer S. 75.

2) Mejer S. 50; vgl. m. Aufsatz: eine Krisis in der K. Ges. der Wiss. (Nachrichten 1892) S. 80.

hausen: „gegen die Absicht, das Collegium Musicum in den Versamlungs Ohrt der Societät der Wissenschaften zu halten, werden auch alhier soviele Zweifel erreget, daß ich wünsche, daß man von diesem project überall abstrahiren möge. Man vermeinet, es sey beßer und anständiger Concerte von solchen Ohrten wegzulaßen, welche zu andern und ernsthafften Objectis bestimmt sind" (43, 1765 Oct. 18). Die Concerte sind eine Zeitlang in dem Saal des Tanzmeisters Pauli, nach Münchhausens Tode aber doch in dem der Kgl. Societät zugewiesenen Saale des Concilienhauses gehalten worden[1]).

Es würde ermüden, alle Einzelheiten zu verfolgen, die in der Correspondenz zur Sprache kommen. Es genügt darauf hinzuweisen, in welchem Umfange Pütter das Vertrauen des Curators genossen hat. Und während bei andern Rathgebern, wie Michaelis, wie Kästner der Curator mit der Zeit andern Sinnes geworden ist, hat er Pütter sein Vertrauen von Anfang bis zu Ende gleichmäßig bewahrt. Schon im J. 1749 erhielt er den Auftrag, sich nach der Conduite des katholischen Geistlichen Jordan sorgfältig zu erkundigen, da der Präsident des Reichskammergerichts, Freiherr von Groschlag, dessen Sohn in das Jordansche Haus einlogirt werden sollte, nachtheilige Beschreibungen erhalten hatte (15)[2]). Und es wird so ziemlich der letzte Auftrag gewesen sein, als er ihm am 4. Aug. 1769 den bevorstehenden Besuch des Herzogs von Gloucester, Bruders König Georg III., mit der Bemerkung anzeigte: Hochderselbe lieben keine lange Complimente, sondern wenige Worte sind Ihro am liebsten, und wollen nicht geniret seyn. Ich bitte sowohl dem Herrn Prorector als dem Herrn Burgermeister Willig davon nachricht zu geben. Deshalb werden Sie auch alle weitläuftige actus vermeiden und deshalb die Absicht der Societät der Wißenschaft nicht agreiren (54).

---

1) Pütter Gött. Gel. Gesch. I 309 vgl. mit II 241, 367. Das Concilienhaus hat dem Neubau der Universitäts-Bibliothek weichen müssen und nahm einen Theil des Raumes ein, auf dem sich jetzt das nördlichste der Bibliotheksgebäude befindet.

2) In seiner Selbstbiogr. I 133 knüpft Pütter an die Erwähnung des jungen Frhrn. v. Groschlag die Bemerkung, sein Aufenthalt in Göttingen sei vielleicht die nächste Veranlassung gewesen, zum Besten katholischer Studenten einen Gottesdienst „auf den Fuß wie es mit Gesandtschaften zu geschehen pflegt" einzurichten. Er hat vergessen, daß er selbst in der Gel. Gesch. I 317 eine kgl. Entschließung solches Inhalts von 1746 citirt und eine wirkliche Ausübung der gewährten Vergünstigung seit 1747 angeführt hat. Ich habe früher schon bemerkt, daß solcher Vergeßlichkeitsfehler in der Selbstbiogr., die 1798 verfaßt wurde, manche vorkommen (Allg. deutsche Biogr. 26, 760).

Der Empfang des Herzogs hat dann dieser Weisung entsprechend am 14. August stattgefunden. Nach seiner 4 U. Nachm. erfolgten Ankunft hat der Herzog Bibliothek, Observatorium und Reitbahn, wo ein Caroussel gehalten wurde, besichtigt und Abends, als er nach Weende zurückgekehrt war, dort eine Musik der Studirenden und ein von ihnen überreichtes Gedicht entgegengenommen. Die Gött. Gel. Anzeigen (S. 889) heben in ihrem Bericht hervor, der Herzog habe sich beständig der deutschen Sprache auch bei Personen, die die Unterredung in einer andern hätten führen können, und auf eine Art bedient, die zeigte, daß es aus Achtung gegen die Sprache geschehe.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1893.

Akademie der Wissenschaften zu München:
- a. Abhandlungen. 1. Mathematisch-physikalische Classe. 17. Bandes 3. Abth.
  2. Historische Classe. 20. Bandes 1. Abth.
- b. Gedächtnissrede auf Konrad Hofmann geh. am 28. März 1892 von Wilhelm Hertz.
- c. Ueber die Stoffe und die Wirkung der griechischen Tragödie. Festrede am 14. Nov. 1891 v. N. Wecklein.
- d. Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Rede zur Feier des 133. Stiftungstages am 28. März 1892 von Hugo Seeliger. München 1891—92.

Königliche Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt:
Jahrbücher. Neue Folge. Heft XVIII. (2 Exempl.) Erfurt 1892.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Herausgeg. v. Dr. O. Lüdecke. 65. Bd. 4. u. 5. Heft. Leipzig 1892.

Handbuch der organischen Chemie von Dr. F. Beilstein. Dritte Auflage. Dreizehnte Lieferung (Bd. 1. Liefer. 13). Hamburg. Leipzig 1893.

Meteorologische Zeitschrift. 1892. Heft 12. December. (Bd. IX zugl. Bd. XXVII der Zeitschrift der Oesterr. Ges. für Meteorologie). Wien.

K. K. geologische Reichsanstalt:
Verhandlungen. Nr. 11—14. 1892. Wien.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
Anzeiger 1892. December. Krakau 1893.

The Royal Astronomical Society:
- a. Memoirs. Vol. L. 1890—91.
- b. Monthly Notices. Vol. LIII. N. 2. London 1892.

The Royal Society:
Proceedings. Vol. LII. N. 317. London 1893.

The Royal Physical Society Session 1891—92:
Proceedings. Edinburgh 1893.

The Manchester Literary and Philosophical Society:
Memoirs and Proceedings 1891—1892. Manchester.

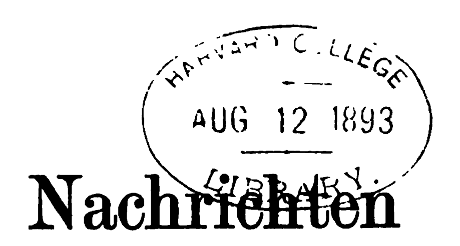
The Royal Irish Academy:
Proceedings. Third Series. Vol. II. N. 3. Dublin 1892.
The Royal Society of Edinburgh:
a. Transactions. Vol. XXXVI. Part II, III. Nos 9 to 21—22 and 23 for the Session 1890—91.
b. Proceedings. Vol. XVIII. Session 1890—91. Edinburgh 1892.
Nature. Vol. 47. N. 1211—1218. London.
Ministère de l'instruction publique:
a. Catalogue des Monnaies Musulmanes de la bibliotheque Nationale par M. Henri Lavoix. Espagne et Afrique. Paris 1891.
b. Annales du Musée Guimet:
1. Tome premier. Le Rig. Veda par P. Regnaud. Première partie.
2. Tome vingtième: Textes Tāoïstes par C. de Harlez. Paris 1891.
3. Tome dix-neuvième. Le Lalta Vistara par Ph. Ed. Foucaux. Seconde partie.
4. Tome vingt et unième. Le Zend-Avesta par James Darmesteter. Prem. Vol. Paris 1892.
c. Revue de l'histoire des Religions. Douzième année. Tome XXIV. N. 3. Treizième année. Tome XXV. N. 1—3. Tome XXVI. N. 1.
La Faculté des Sciences de Marseille:
Annales. Tome I (Suite et fin). Tome II. Fasciculo I—VI. Marseille. Paris 1892.
La Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux:
Mémoires. 4me Série. Tome II et Append. Paris. Bordeaux 1891.
La Société Nationale des Sciences Naturelles et Mathématiques de Cherbourg:
Mémoires. Tome XXVIII. Troisième Série. Tome VIII. Paris. Cherbourg. 1892.
L'École Polytechnique:
Journal. 61 et 62e Cahier. Paris 1891—92.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy; publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences etc. 1re Serie. Tome VII. Paris 1892.
Commission Météorologique de la Gironde:
Observations Pluviométriques et Thermométriques faites dans le Département de la Gironde de Juin 1890 à Mai 1891. Note de M. G. Rayet. Bordeaux 1891.
Académie Royale de Belgique:
Bulletin. 62e année. 3e série, tome 24. N. 12 et titre. Bruxelles 1892.
Humanistiska Vetenskapssamfundet. Upsala:
a. Skrifter. Band I u. II, 1.
b. Förteckning å tryckta och otryckta Källor till Landskapet Uplands och Stockholms Stads historiskt-topografiska Beskrifning etc.
Koninklijke Natuurkundige Vereenigung in Nederlandsch-Indië:
Natuurkundige Tijdschrift voor N. J. Deel XLVIII. XLIX. Achtste Serie. Deel IX. X. Batavia. 'S Gravenhage 1889—1890.
Koninklijk Institut voor Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië.
Bijdragen. Vigfde Volgreeks. Achtste Deel. Erste Aflevering. 'S Gravenhage 1893.
Prof. Schlegel's zoogenaamde Kritiek van het Japan'sch-Nederlandsch en Japan-Engelsch Woordenboek. Deel III. Beantwoord door Mr. L. Serrurier.
Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Vol. XI. No. 2. Coimbra 1892.
La R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:
Memorie. Serie V. Tomo I.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 8.

F. Frensdorff, Zwei Briefsammlungen des Welfenmuseums in Hannover. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

7. Juni. № 9. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Mai.

Liebisch legt: „Bemerkungen zu dem Verzeichnisse der Meteoritensammlung der Universität Göttingen (Nachr. von d. K. Ges. d. W. 1879, No. 2)" von Lazarus Fletcher in London vor.

Kielhorn legt eine Abhandlung von Herrn Professor Pischel in Halle (Korresp. d. Hist. philol. Klasse) vor: „Die Hofdichter der Lakshmaṇasena." (Abhandlungen Bd. 39).

Wellhausen legt eine Abhandlung vor: „Die Ehe bei den Arabern".

Sauppe legt a. eine Abh. des Herrn Prof. Oldenberg in Kiel (Korresp. der Hist. phil. Kl.) vor: „Indra und Namuci."

b. eine Abh. des Herrn Prof. F. Kohlrausch in Straßburg i/E., (ausw. Mitgl. d. Math. Kl.): „Ueber die Dichtigkeit verdünnter wässeriger Lösungen."

c. eine Abh. des Herrn Oberschulrath Hultsch in Dresden, Korresp. d. Hist. Philol. Klasse): „Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes."

Bemerkungen zu dem Verzeichnisse der Meteoriten-Sammlung der Universität Göttingen.

(Nachrichten v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1879, Nr. 2).

Von

Lazarus Fletcher in London.

(Vorgelegt von Th. Liebisch).

Meteoric Stones.

No. 10. „1798, 13. Dec., Benares."

This is due to a misprint in Chladni's Feuermeteore p. 226; all the references quoted there, however give Dec. 19. Chladni's misprint has been repeated in the lists of Partsch, Buchner and Brezina and will be difficult to eradicate.

No. 38. „1825, 14. Sept., Honolùlu."

Some lists say Sep. 14, others Sep. 15. I think that I have discovered the solution of the difficulty. The captain of the ship in his account says Sept. 14 [Otto von Kotzebue, Neue Reise um die Welt in den Jahren 1823—26. Vol. 2, p. 139]: the geologist on board the same ship says Sep. 15 [Karsten's Archiv. 1829. Vol. 1, p. 311]. Both are probably right. The ship sailed in a *westerly* direction from Europe and Sep. 14 is doubtless the ship-date: but the islands of Polynesia take their date from vessels which have sailed round the world in an *easterly* direction from Europe: hence for the same day Sep. 15 would be the island-date. As local times are adopted throughout the lists Sep. 15 should thus be taken.

No. 42. „1828, 14. Juni, Richmond."

Pogg. Ann. 1829. Vol. 17, p. 380 says: June 4.

No. 44. „1831, 18. Juli, Vouillé."

Ann. de Chimie. 1831. Vol. 47, p. 442 says: May 13.

No. 45. „1832, Umbola."

Britisch Museum List: 1822—3.

No. 58. „1844, 4. April, Killeter."

Pogg. Ann. 1861. Vol. 113, p. 508 says: April 29.

No. 81. „1857, 10. Okt., Ohaba."

Sitzber. Akad. Wien. 1858. Vol. 31, p. 79 says: soon after midnight in night Oct. 10—11. Hence Oct. 11 should be in the list.

No. 89. „1861, 7. Okt., Menow."

A misprint for 1862 [Pogg. Ann. 1862. Vol. 117, p. 637].

Meteoric Irons.

No. 5. „1782, Paraguay (Paranafluss), Tucuman?" 4.50 grams.

In the Göttingen list of 1864 this appears as:
Paraguay, Paranafluß, von einer angeblich 30,000 Pfd. schweren Masse (von Sir J. Banks), Tucuman?

This no doubt is also Tucuman. The paper by Don Rubin de Celis relative to the Tucuman iron (Philosophical Transactions. 1788. Vol. 78, part 1, pp. 37, 183) was communicated to the Royal Society by Sir Joseph Banks, and he was connected with no other from that district.

No. 88. „? Buenos Ayres, Brasilien." 18.25 grams.

In the Göttingen list of 1864 this appears as:
Brasilien, 60 Meilen von Buenos Ayres. Tucuman? 18 grams.

There is no doubt that the iron is really Tucuman. Our Tucuman has „Buenos Ayres" etched on it: our big lump (1100 lbs) was for some time at Buenos Ayres, and doubtless at one time this was a recognised name.

No. 89. „? Nevada, U. S., N.-Am." 5.75 grams.

According to page 16 of the 1879 list was sent by Prof. Joy to Wöhler. Is is to me a mystery. No iron of such a name seems to have been described. Is it an iron-stone, (siderolite) from Janacera pass in South America, described by Joy?

British Museum (Natural History). Cromwell Road, London, SW. — Oct. 15, 1888.

Indra und Namuci.

Von

H. Oldenberg.

Die scharfsinnige und geistreiche Untersuchung Bloomfields über den vedischen Namucimythus[1]) veranlaßt mich zu einigen Bemerkungen ergänzender oder berichtigender Natur; es ist lockend da weiterzubauen, wo eine so sichere Hand den Grund gelegt hat.

Die bekannten Ṛgverse (X, 131, 4. 5), welche die Geschichte von dem Trunke der Götter bei Namuci erzählen, lauten:

yuváṃ surā́mam aṣvinā námucāv āsuré sácā |
vipipānā́ ṣubhas patī índraṃ kármasv āvatam ||
putrám iva pitárāv aṣvínobhā́
índrāvā́thuḥ kā́vyair daṃsánābhiḥ |
yát surā́maṃ vyápibaḥ ṣácībhiḥ
sárasvatī tvā maghavann abhishṇak ||

Das Trinken wird hier beidemal mit dem Verbum *vi-pā* bezeichnet. Es muß auffallen, daß im Ritual der Sautrāmaṇīfeier, deren nahe Beziehung zu unserm Mythus schon von Bloomfield mit Recht betont worden ist und sich uns durchweg von Neuem bestätigen wird, dasselbe sonst seltene Verbum in häufiger Wiederholung wiederkehrt. Das Ṣatapatha Brāhmaṇa (XII, 7, 3, 4) erzählt in seiner Besprechung der Sautrāmaṇī, wie im Haupt des geköpften Namuci Blut und Soma vermischt war; die Götter aber, die sich zuerst ekelten, „*etad andhasor*[2]) *vipānam apaṣyant somo rājāmṛtam suta iti*". Die in diesen Worten angeführte Litanei (Vāj. Saṃh. XIX, 72 ff.) enthält selbst in ihrem ersten Verse das Wort *vipānam* und dann fast Vers für Vers (73. 74. 75. 78. 79) das Verbum *vyapibat*[3]). Und zwar offenbar — worauf auch die mitgetheilte Stelle des Ṣatapatha Brāhmaṇa führt — in der Bedeutung: vermischte Flüssigkeiten im Trinken sondern. Mahīdhara sagt *vivicya pītavān* oder *viyujya pītavān*. So sprechen jene Verse vom Vogel Kruñc, der trinkend das Gemisch von Milch und Wasser, vom Haṃsa, der Soma und Wasser sondert u. s. w. Die Verse

1) Journal Amer. Oriental. Soc. XV, 143 ff.

2) So der Webersche Text und nach Prof. Webers freundlicher Mittheilung das einzige ihm gegenwärtig zugängliche Ms. Chambers 13. Sollte aber nicht *andhaso* zu lesen sein, wie Mahīdhara zu V. S. XIX, 72 hat und wie der Wortlaut des letztgenannten Spruchs bestätigt? Ebenso, worauf Weber mich aufmerksam macht, Pañc. Br. XIV, 11, 26.

3) V. 76 wenigstens *vijahāti*, 77 *vyākarot*.

bilden — wie z. B. Kātyāyana XIX, 2, 25 zeigt — eine Litanei gerichtet an die beiden Opfertränke, deren Nebeneinanderstehen den characteristischen Grundzug des Sautrāmaṇīrituals ausmacht, Milch und Surā. Wir werden bemerken, wie das Spruchmaterial dieses Milch-Surāopfers beständig auf den Namucimythus hindeutet, und werden uns somit nach dieser ganzen Sachlage mit Nothwendigkeit darauf gewiesen sehen, bei der Erklärung des *vi-pā* in den uns beschäftigenden Ṛgversen [1]) der Rolle, welche diesem Verbum in jener Litanei stehend zukommt, Rechnung zu tragen.

Sehen wir nun, welche Consequenzen diese Auffassung von *vi-pā* für die Erklärung des an unsrer Ṛgstelle zweimal als Object damit verbundenen Substantivs *surāma* hat. Bloomfield [2]) erklärt dies Wort als „*surā*-sickness“, „intoxication from *surā*“. Dagegen macht mich zunächst bedenklich, dass ein *ama* oder *āma* mit der Bedeutung „Krankheit“ bisher nur aus der grammatischen oder lexicographischen Literatur belegt zu sein scheint; sodann daß, wie schon Garbe bemerkt hat, in einem derartigen Abhängigkeitscompositum der Accent **surāmá* zu erwarten wäre. Ein weiteres Argument gegen jene Erklärung werden wir einigen später zu erwähnenden Vedastellen entnehmen, an welchen ein von unserm *surāma* nicht zu trennendes Wort *surāman* erscheint: wir werden sehen, daß auf dieses die Roth-Bloomfieldsche Deutung nicht anwendbar ist. Entscheidend aber ist, daß ein Object „*surā*-sickness“ zu unsern Ergebnissen über das Verbum *vi-pā* nicht paßt; wir verlangen ein Wort, das eine Flüssigkeit oder eine Mischung von Flüssigkeiten bedeutet.

Was für eine Flüssigkeit das ist, wird uns das Ritual der Sautrāmaṇī lehren können, deren Pointe eben ist, das in unsern Ṛgversen berührte Erlebniß Indras am Opfernden sich wiederholen zu lassen [3]). Wir erwähnten schon, daß bei der Sautrāmaṇī Milch und Surā als Opfertränke neben einander stehen und dass sich auf diese beiden Flüssigkeiten jene Litanei bezieht, in der beständig, unter Anwendung eben des für unsre Ṛgverse characteristischen Verbums, von dem „sondernden Trinken“ die Rede ist. „Getrennt ist euch der gottgeschaffene Sitz

1) Daß das Verbum an einigen andern Stellen des Ṛgveda eine weniger ausgeprägte Bedeutung hat, soll nicht geleugnet werden.

2) Mit Roth und Garbe, Kuhns Zschr. XXIII, 476. 524.

3) Wie sich, beiläufig bemerkt, z. B. darin zeigt, daß, während die fungirenden Priester von den Spenden an die Aśvin und Sarasvatī geniessen, der Opfernde einen Antheil der Indraspende zu sich nimmt (Kāty. XIX, 3, 10 ff.). Jene repräsentiren die heilenden Gottheiten, dieser den kranken Indra.

geordnet; vermischt euch nicht am höchsten Himmel" — heißt es von diesen beiden Flüssigkeiten [1]), wohl im Hinblick auf die getrennten Opferstätten, an welchen das Ritual dieselben darzubringen vorschreibt. Wenn schon dieser Sachverhalt die Annahme hinreichend begründen würde, daß der Surāmatrank des Ṛv. und die Opfertränke der Sautrāmaṇī identisch sind oder jedenfalls in engster Beziehung zu einander stehen, so erwächst dieser Auffassung eine weitere entscheidende Bestätigung daraus, daß von den bezeichneten Opfertränken an einer Reihe von Stellen ein Ausdruck gebraucht wird, dessen wesentliche Identität mit *surā́ma* sich von selbst aufdrängt: der Ausdruck *sómāḥ surā́māṇaḥ* (s. die Citate bei Bloomfield S. 149). Mit diesem wieder ist gleichwerthig oder wird doch von den Yajusordnern als gleichwerthig gebraucht das Compositum *surāsomā́ḥ*, wie aus der Vergleichung von V. S. XXI, 42 mit 59. 60 erhellt: an der ersteren Stelle wird neben einander das Opfer von *somāḥ surāmāṇaḥ*, *chāgāḥ*, *meshāḥ*, *ṛshabhāḥ* aufgeführt, an der zweiten finden wir im Hinblick auf dasselbe Opfer *chāga*, *mesha*, *ṛshabha* und *surāsomāḥ* aufgezählt. Was hier übrigens dem Namen nach Soma mit Surā ist, ist in Wirklichkeit Milch mit Surā. Durch das ganze Sautrāmaṇīopfer geht die Tendenz hindurch, in den Aeußerlichkeiten und der Wahl der Worte das Somaopfer nachzubilden [2]), während in der That kein Soma dabei vorkommt. Es genügt z. B. auf die beiden die Reinigung der Opfermilch betreffenden Formeln V. S. XIX, 5, XX, 31 zu verweisen, in welchen von dieser Milch als von Soma die Rede ist; vgl. auch Ṣatapatha Br. XII, 7, 3, 8. 13 etc. So ist die Verwendung der Bezeichnung „Soma mit Surā" für die Opferspenden, die, wie wir sahen, in der That aus Milch und Surā bestehen, ganz der mystischen Construction des Opfers entsprechend [3]).

Schwierig übrigens ist die Frage nach der Wortbildung von *surā́ma* und *surā́man*, welche Nomina auf geradem Wege mit *súrā* in Verbindung zu setzen nicht angehen wird. Ich schlage folgende Auffassung vor, ohne mir ihren rein hypothetischen Character zu verbergen. Bedenkt man, daß der Wurzel *ram* in der älteren Sprache durchaus die Bedeutung des ruhigen Verweilens zukommt, aber nicht die der freudigen Erregung in dem Sinne

1) Vāj. Saṃh. XIX, 7, vgl. Ṣatapatha Br. XII, 7, 3, 14.

2) Man vergleiche z. B. die weitschichtige Durchführung dieser Nachbildung Vāj. Saṃh. XIX, 12 ff.

3) Auch scheinbar so unbefangen sachliche Erwähnungen des Soma bei der Sautrāmaṇī wie Ṣat. Brāhm. V, 5, 4, 21 oder Āṣvalāyana Ṣr. III, 9, 4 dürfen nicht daran irre machen, daß in der That kein Soma verwandt wurde.

wie man durch einen Rauschtrank erfreut wird, so mag es kein Zufall sein, daß ein Trank *surâma* gerade als Heilmittel für den auftritt, in dem der Soma nicht ruhig hat verweilen wollen [1]; jener Trank wird danach heißen, was er ist: der Trank des „Beisichbehaltens". Dies *surâma* nun wurde weiter zu *surâman* umgestaltet, um dem Wort wenn auch nicht für die strenge Grammatik so doch für die Phantasie die Bedeutung „surā- enthaltend" zu geben, vielleicht auch um einen Anklang an das für dieselben Riten so bedeutsame *sutrâman* zu gewinnen [2]. Wie aber auch über diese formellen Fragen zu urteilen sein mag, das sachliche Ergebniss, auf das es uns ankommt, wird feststehen, daß der Trank *surâma* im Ṛgveda, den Indra dort „sondernd trinkt" [3], und der *surâman*-Trank der Yajurveden, bei dem beständig von „sonderndem Trinken" die Rede ist, und der dort in einer unverkennbar auf eben jenem Erlebniß Indras aufgebauten Ceremonie vorkommt, ein und derselbe Trank oder daß mindestens doch der zweite der rituelle Repräsentant des ersten ist: Surā und Milch mit fingirten, mystischen Somaeigenschaften [4].

Ich möchte in diesem Zusammenhang nur noch bemerken, daß Bloomfield (S. 150) im Irrthum ist, wenn er der Stelle Vaitānasūtra 30, 11 eine specielle Bedeutung als Bestätigung seiner Deutung von *surâma* = *surā*-sickness beimißt. Es wird dort keineswegs, wie der Leser seiner Auseinandersetzung annehmen muß, irgend ein dem Vaitānasūtra eigenthümlicher Ritus für den unmäßi-

---

1) Ṣatap. Br. V, 5, 4, 8: so (scil. somaḥ) 'sya vishvaṅṅ eva prāṇebhyo dudrāva.

2) Man beachte wie V. S. XXI, 42 *sutrâman* und *surâman* neben einander stehen.

3) Darum steht auch dabei: *ṣácībhiḥ* „mit Kunst"; diese Art Trinken ist nicht Jedermanns Sache. Vgl. Ait. Br. VIII, 20. Das *ṣácībhiḥ* spielt überhaupt in den Sautrāmaṇīsprüchen eine besondre Rolle; vgl. V. S. XIX, 81. 86. 87, Āṣv. Ṣr. III, 9, 5.

4) Insofern übrigens möchte immerhin eine Unsicherheit zurückbleiben, als die durch *vi-pā* ausgedrückte Sonderung nicht nur eine solche der beiden Theile gegen einander, sondern auch eine Abscheidung des Ganzen von irgend einem weiteren unreinen Element sein könnte. Für die erstere Auffassung würden neben dem bereits herangezogenen Vers V. S. XIX, 7 (S. 344) die beiden letzten Verse der Vipānalitanei sprechen (ibid. 78. 79), für die letztere die S. 342 citirte Stelle Ṣatap. Br. XII, 7, 3, 4 und die weiter unten (S. 347) zu besprechende Vorstellungsweise der Yajustexte über das Auspressen, Herausmelken des Trankes aus dem Namuci; es müßte sich in diesem Falle um ein Extrahiren des Trankes, wenn nicht aus den Säften des todten Namuci, so doch etwa aus dem Körper des lebendigen handeln (s. u.).

gen Somatrinker gelehrt, sondern es handelt sich um die allbekannte Sautrāmaṇī, für welche jenes Sūtra so gut wie die sonstigen Beschreibungen dieses Opfers die Surāmaverse vorschreibt, mithin genau so wenig wie die übrigen Sautrāmaṇītexte für diese Deutung des Wortes *surấma* etwas beweist. —

Nachdem wir so versucht haben, die exegetische Hauptschwierigkeit aus dem Wege zu räumen, überblicken wir der Reihe nach die einzelnen Züge, die uns von der Geschichte dieses Trinkabenteuers erhalten sind.

Indra ist leidend; es scheint in der That, daß sein Leiden, um mit Bloomfield zu reden, „may be summed up in the German word *Katzenjammer*". Wie ist ihm dies Malheur passirt? Wir können nach dem was über *surấma* gesagt wurde nicht mehr den Ṛgveda als Zeugen dafür gelten lassen, daß Surātrank ihm geschadet hat; überhaupt spricht der Ṛgveda gar nicht von dem Trank, der das Leiden gebracht, sondern nur von dem, der es geheilt hat. Bei Indra wird man zunächst an Somaexcesse denken und wird sich auch erinnern, daß die üblen Folgen eben des Somagenusses unter den Veranlassungen zur Darbringung des Sautrāmaṇīopfers in erster Reihe stehen. Ganz dem entsprechend erzählt denn auch das Ṣatapatha Brāhmaṇa (V, 5, 4, 7 fg.)[1]) an einer Stelle, welche der so scharfen Aufmerksamkeit Bloomfield's entgangen zu sein scheint, daß der Soma, den Indra uneingeladen bei Tvashṭar getrunken (vgl. Ṛv. III, 48, 4), ihm schlecht bekommen sei und er sich von den Aṣvin durch die Sautrāmaṇī habe heilen lassen; ein Surārausch Indras kommt in dieser Erzählung nicht vor. Andre Stellen desselben Brāhmaṇa freilich bringen die Surā hinein und lassen schon bei Indras Krankheit — nicht erst bei seiner Heilung — den Dämon Namuci eine Rolle spielen. Nach Ṣat. Br. XII, 7, 1, 1 ff. wird Indra zuerst — wie in der vorher erwähnten Version — durch den unberechtigten Somagenuß bei Tvashṭar krank; dann bringt ihn Namuci vollends herunter, indem er ihm „durch die Surā[2]) seine Stärke, Heldenkraft,

1) Vgl. Taitt. Brāhm. I, 8, 5, und ferner Ṣatap. Br. XII, 8, 3, 1 fg.

2) Ich bezweifle doch, daß Bloomfield dies „durch die Surā" ganz im Sinne des Brāhmaṇaverfassers versteht, wenn er es dahin ausmalt, daß Namuci den schon somatrunkenen Indra durch das ihm ungewohnte zweite Getränk vollends umwirft. Mein Eindruck ist, daß damit zu viel Realismus der Kneipe in das Brāhmaṇa hineingetragen wird. Namuci erreicht, scheint mir, „durch die Surā", welche nun einmal durch den ganzen Vorstellungskreis der Sautrāmaṇī nahe gelegt war, seinen Zweck in demselben mystisch-fictiven Sinne, wie in den Brāhmaṇas die verschiedensten Wirkungen etwa „durch die Halbmonate" oder „durch die Athemkräfte" u. dgl. zu Stande kommen.

Somatrank und Speisegenuß nimmt.". Ebendaselbst XII, 7, 3, 1 wird nur dieser letzte Vorgang berichtet; von dem bei Tvashṭar getrunkenen Soma ist hier überhaupt nicht die Rede. Man sieht, das Aussehen der Geschichte im Brāhmaṇatext ist ganz fließend, und ich möchte nicht wagen, über das Verhältniss der verschiedenen Formen eine Meinung anders als mit der äußersten Reserve auszusprechen. Das zunächst halte ich immerhin nicht für sehr wahrscheinlich, daß die XII, 7, 1, 1 ff. vorliegende Cumulirung des Somamotivs und des Surāmotivs ursprünglich ist; diese Doublette wird aus dem allmählichen Wachsthum, wie es solchen Geschichten eigen ist, hervorgegangen sein. Daß aber von jenen beiden Motiven dasjenige des Soma das eher zu erwartende scheint, ist bereits angedeutet worden; die Erweiterung, welche Namuci und die Surā hereinzieht, würde sich sehr leicht aus der Rolle, welche diese Wesen im weiteren Verlauf der Geschichte spielen, erklären. Doch, wie gesagt, ich bin weit entfernt hier anders als im Ton der unsichersten Vermuthung sprechen zu wollen. —

Es folgt die Heilung Indras. Die Aṣvin, die göttlichen Aerzte, und Sarasvatī bringen sie zu Stande. Das sagen schon die an die Spitze unsrer Erörterung gestellten Ṛgverse; darauf beruht auch das ganze Ritual der Sautrāmaṇī. Ebenso fest steht, daß der oben besprochene Doppeltrank das Heilmittel und daß Namuci in irgend einer Weise in den ganzen Vorgang verflochten ist. Nach dem Ṛgveda vollführen die Aṣvin bei ihm (*Námucāv āsuré sácā*) den Sondergenuß des Surāma, den dann, wohl von ihnen unterwiesen, Indra zu seiner Heilung wiederholt [1]). Nach den verschiedenen Nuancen der Ausdrucksweise in den Yajustexten bringen die Aṣvin (resp. Sarasvatī) den Trank von Namuci her, nehmen ihn dem Namuci fort, gewinnen ihn durch „Melken", pressen ihn ihm aus (*Namucer āsurād adhi . . . asunot*) und nehmen ihm damit Kraft und Besitz [2]). Es findet sich auch die Vorstellung, daß der Trank aus dem Haupt oder dem Bauch des getödteten Namuci gewonnen wird [3]). Sie scheint mir unursprünglich, denn sie paßt nicht oder nur gezwungen zu der Art, wie die erwähnten Stellen der älteren Texte von dem Hergang sprechen, namentlich auch kaum zu V. S. XX, 68: „Indra, welchen die Aṣvin und Sarasvatī

1) Denkbar übrigens, aber natürlich vollkommen unbeweisbar, daß X, 131, 4 *vipipānám* zu lesen wäre, so daß Indra allein den Trank genösse (vgl. Vers 5).

2) V. S. XIX, 15. 34; XX, 59. 67. 71; Ṣat. Br. XII, 7, 1, 14 u. s. w.

3) Ṣat. Br. XII, 7, 3, 4; vgl. Mahīdhara zu V. S. X, 33; XIX, 34.

durch Opferspeise stärkten beim (*sácā*) Namuci Āsura [1]), der hat Vala und Magha [2]) zerspalten" — ein solches „bei" setzt doch in natürlicher Redeweise die betreffende Person als lebend voraus. Der Tod des Namuci durch Indras Schaumwaffe scheint — wie auch Bloomfield annimmt — erst später, nach der Heilung des kranken Gottes, zu folgen; wer die Erzählung Maitr. Saṃh. IV, 3, 4, Taitt. Br. I, 7, 1, Pañc. Br. XII, 6, 8, MBhār. IX, 2433 ff. liest, wird den Eindruck erhalten, daß dies eine Geschichte für sich ist.

So weit die Details dieses Mythus. Blicken wir auf das Ganze zurück, so finden wir, wenn wir auch in der Beurtheilung von Einzelheiten vielfach von Bloomfield abweichen, seine Grundanschauung doch durchaus bewährt, daß für die Erklärung und nähere Ausmalung der im Ṛgveda allzu kurz und dunkel angedeuteten Vorstellungen die jüngeren vedischen Texte brauchbares, von keinem Exegeten ungestraft zu vernachlässigendes Material in Fülle enthalten. So schließt sich auch, glaube ich, die Exegese des für diese Untersuchungen so wichtigen Liedes Rv. X, 131 und die Betrachtung der in der jüngeren vedischen Literatur beschriebenen Sautrāmaṇifeier zu dem Ergebniß zusammen, daß diese Feier, jedenfalls ihren Grundzügen nach, in die ṛgvedische Zeit zurückgeht und jener Hymnus — oder besser jenes Versconglomerat — eben für dieselbe, vielleicht von ihrem Erfinder, verfaßt ist und in der Mannichfaltigkeit seiner Elemente von ihr aus verständlich wird. In der That liegt bei den letzten vier Versen des siebenversigen Liedes die Beziehung auf die Sautrāmaṇī klar vor Augen: zwei von ihnen beschäftigen sich mit Indras Heilung durch den Surāmatrank; die beiden andern (= VI, 47, 12. 13) rufen Indra in seiner Eigenschaft als *sutrāman* an [3]). Wäre bei éiner dieser Versgruppen die nachträgliche Einpassung in das Sautrāmaṇīritual denkbar, so wird doch durch das Zusammentreffen der beiden, deren Zusammenhang eben nur durch den Vorstellungskreis der Sautrāmaṇī in volles Licht tritt, ein derartiger Ausweg

---

1) Ich folge Bloomfield (S. 160) in der Verbindung des vierten Pāda mit den beiden ersten, glaube aber nicht, daß sich dem *sácā* ungezwungenerweise der Sinn entlocken läßt „*on the occasion of (the slaughter of) the āsura Namuci*".

2) Soll sein Makha (Ṛv. X, 171, 2)? Der auch durch das T. Br. und Maitr. S. (hier *madyam*) durchgehende Fehler würde sich daraus erklären, daß auch im vorangehenden Verse *magham* (*madyam*) steht.

3) Die ersteren möchte ich für Puronuvākyā und Yājyā eines Açvinopfers, die letzteren entsprechend eines Indraopfers halten: bekanntlich — zusammen mit der in V. 5 genannten Sarasvatī — die Gottheiten der Sautrāmaṇī.

verschlossen. Aber auch im Eingang des Hymnus fehlen die Spuren dieser rituellen Verwendung nicht. Vers 2 gehört so gut wie die vier letzten Verse den stehenden Sautrāmaṇīmaterialien an (siehe Vāj. Saṃh. XIX, 6, Vaitānasūtra 30, 10 etc.). Und beim dritten Vers stimmen die Characteristica des Inhalts auf das Genaueste zum Wesen der Sautrāmaṇī. Der Sänger klagt, daß einspännig kein rechtes Fahren sei, daß ihm in den Versammlungen kein Ruhm (*ṣravas*) zu Theil werde: Indra möge den nach Rindern und Rossen begehrenden Priestern helfen. Nun wird die Darbringung der Sautrāmaṇī dem nach Gedeihen verlangenden Brahmanen, dem aus seinem Lande vertriebenen Fürsten, dem in der Viehzucht erfolglosen Heerdenbesitzer empfohlen. Auch beim Brahmanen wird, wie bei den Opferern der zweiten und dritten Kaste, der Gedanke der sein, daß man irgend welcher Erfolglosigkeit abzuhelfen wünscht. Ein Lied, das bei der Sautrāmaṇī gesungen wird, läuft für den Brahmanen in die Formel aus: „Zur Ruhmesfülle, zur Berühmtheit, zum wahren Ruhm, zum Ruhm" — beim Rājanya und Vaiṣya tritt statt „Ruhm" resp. „Sieg" und „Reichthum" ein [1]). Es wird sich also darum handeln, dem Brahmanen den ihm bisher entgangenen Ruhm zu verschaffen durch Vollziehung von Riten, welche die Erhebung des heruntergekommenen Indra zu voller göttlicher Herrlichkeit nachbilden. Man sieht, wie genau der erwähnte dritte Vers unsres Ṛgliedes sich in diese Gedankengänge einfügt. —

Es ist lebhaft zu bedauern, daß die jüngeren Texte nicht ähnliches Licht wie über das Surāma-Abenteuer auch über eine Seite der Namucilegende verbreiten, welche für die Dichter des Ṛgveda offenbar viel höhere Bedeutung als jenes besessen hat: die Bezwingung des Namuci zu Gunsten eines menschlichen Helden, des Namī Sāpya [2]). Es könnte für die Beurteilung dieser ganzen Masse der Dasyubezwingungsgeschichten von hoher Bedeutung sein, wären wir im Stande für eben dies Exemplar jenes Typus, dessen indrafeindlicher Held uns so viel genauer bekannt ist als etwa Sushṇa oder Ṣambara, das volle concrete Detail zu ermitteln. Doch dazu versagen die Quellen.

1) Ṣatapatha Br. XII, 8, 3, 26, Kāty. XIX, 5, 3 fg., Lāṭy. V, 4, 19.

2) Bloomfield S. 162 bemüht sich, meinem Gefühl nach in etwas gezwungener Weise, diesen Punct als unerheblich hinzustellen. Dies sei eben nur „the germ of a story which was never developed". Es kann leicht sein, daß die von Bl. vermißte Entfaltung eben nur für uns nicht da ist. Was würden wir von der Surāmageschichte wissen, hätte nicht der Zufall gewollt, daß ein findiger Opferkünstler aus ihr den Sautrāmaṇīritus entwickelt hätte?

Kiel, März 1893.

Ueber die Dichtigkeit verdünnter wässriger Lösungen.

Von

F. Kohlrausch, ausw. Mitglied, und **W. Hallwachs.**

Die früher übliche Annahme, daß die Eigenschaften einer Flüssigkeit sich durch die Auflösung eines Körpers in erster Annäherung proportional der gelösten Menge ändern, hat für das Wasser, seit dem ersten bei der Elektrolyse erlittenen Stoße, schon an mehreren Punkten weichen müssen. Die erste kleine Menge gelöster Substanz ändert oft erheblich stärker, als eine spätere gleich große Menge.

Daß man eine der nächstliegenden Eigenschaften, die Dichtigkeit, nicht bereits in dieser Beziehung untersucht hat, würde verwunderlich sein, wenn hier nicht experimentelle Schwierigkeiten vorlägen. Vermutet man nämlich das interessante Gebiet da, wo die Elektricitätsleitung Unerwartetes ergeben hatte, so kommt man zu Concentrationen von der Ordnung 0,01 normal oder 0,1 Procent, wo das specifische Gewicht mit 1,000 beginnt, und man hat zu erwarten, daß die Bestimmung dieser Größe bis auf eine Genauigkeit von etwa 1 Milliontel getrieben werden muß, um die Verhältnisse in befriedigender Weise kennen zu lernen.

Von einer solchen Genauigkeit aber sind die bisherigen Dichtigkeits-Bestimmungen weit entfernt. Auch nur die fünfte Decimale noch zu verbürgen ist gar nicht leicht.

Immerhin stellte sich bei Versuchen, welche schon vor mehreren Jahren von den Herren Buckingham und Maurer in Straßburg an sehr verdünnter Schwefelsäure ausgeführt wurden, unzweideutig ein von der Proportionalität erheblich abweichender Gang der Dichtigkeits-Aenderung heraus. Wir haben dann das Verfahren soweit ausgebildet, daß wir die sechste Decimale einigermaßen sicher zu bestimmen lernten und also das obige Ziel erreichten.

Die gewöhnliche Archimedische Methode der Verdrängung erscheint hier als die geeignetste. Man kann bei ihr nämlich erstens die Lösungen vom Wasser aus rasch und einfach durch Zusatz von concentrirterer Lösung herstellen und kann zweitens die Forderung erfüllen — ohne welche die Wägungsgenauigkeit auf $1/10^6$ illusorisch sein würde — daß die Temperaturen auf weniger als $0{,}01^0$ bekannt sind.

Schwierigkeit bietet aber die Capillarität an dem Aufhänge-

faden des untergetauchten Körpers. Ein Draht, selbst von nur $^1/_{20}$ mm Durchmesser, kann, wegen des sehr unsicheren Benetzungszustandes der Metalle durch Wasser, Schwankungen von 1 mg veranlassen. Mit Wollaston-Draht zu arbeiten misglückte wegen der Zerbrechlichkeit. Es zeigte sich aber, daß ein gereinigter, feiner Coconfaden, welchen man nicht trocken werden läßt, den Ansprüchen an die Constanz der Benetzung genügte.

Verfahren.

An einer Wagschale hing in einem etwa $2^1/_2$ Liter fassenden Becherglase ein Glaskörper von etwa 130 cc und 134 gr mittels eines Drahtes, der durch eine Bohrung im Boden des Wagekastens hindurchtrat; zwischen Draht und Glaskörper war der Cocon eingeschoben. Der Glaskörper wurde während des Zubringens von Lösung und während des Umrührens durch Glasringe gehalten und dann vorsichtig losgelassen. Der Rührer war ein großer Ring, zuerst aus Glimmer mit Wachs und Colofonium bezogen, später aus Platin.

Die Lösungen wurden mit geeigneten Pipetten durch Zusatz concentrirter Lösung zu etwa 2 Liter Wasser hergestellt. Das letztere hatte man vorher ziemlich luftfrei gemacht, weil die Einbringung von Salzen sonst die Abscheidung von Luftblasen bewirken kann.

Da das Gewicht des Glaskörpers durch den Auftrieb im Wasser bis auf etwa 4 gr compensirt wurde, so konnte man mit dieser Vorrichtung nur etwa bis zu Dichtigkeiten von 1,03 beobachten; für größere genügte dann die gewöhnliche Form des Verfahrens.

Man beobachtete die Wage im schwingenden Zustande mit dem Fernrohr. Wenn man sorgfältig darauf achtete, daß kein Stäubchen oder Fäserchen an der Durchtrittsstelle des Cocons durch die Oberfläche haftete, so verliefen die Schwingungen regelmäßig und stimmten mehrere Beobachtungen bis auf höchstens 0,2 mg; sie leisteten also die oben gewünschte Genauigkeit.

Größere Schwankungen der Temperatur, z. B. bei manchen Körpern durch die Verdünnung selbst bewirkt, wurden mit der Flamme oder mit Eis beseitigt; die übrig bleibenden Differenzen von wenigen Hunderteln glich man durch Rechnung aus, indem man die Ausdehnung von ein oder zwei Lösungen an der Wage selbst bestimmte und hieraus und aus der bekannten Ausdehnung des Wassers, sowie auch mit Zuziehung Gerlach'scher Beobachtungen, die Zahlen für die einzelnen Lösungen interpolirte.

Die Ausdehnung des Glaskörpers selbst war genau bestimmt worden.

Das in $^1/_{100}$ geteilte Thermometer wurde vor jeder Ablesung geklopft.

Ergebnisse.

Als erste Objecte der Untersuchung haben wir einige Körper herausgesucht, die im elektrischen Leitvermögen[1]) und der Lichtbrechung[2]) ihrer verdünnten Lösungen einen recht mannichfaltigen Gang zeigen.

Die Concentrationen lagen so nahe bei 0,0025 0,005 0,01 0,02 0,05 0,1 0,2 0,5 gr-Aequ./liter, daß man auf genau diese Gehalte ohne Fehler rechnen konnte. Die Tabelle gibt unter

$$1000 \frac{s-1}{m}$$

den mit 1000 multiplicirten Ueberschuß der Dichtigkeit über diejenige des Wassers, im Verhältnis zu der Concentration m der Lösung. Als Dichtigkeit Eins gilt diejenige des Wassers von gleicher Temperatur. Die m sind wie gebräuchlich in gr-Aequiv./liter ausgedrückt[3]).

Unter $v = 1/m$ steht die „Verdünnung" des gelösten Körpers d. h. die Anzahl Liter der Lösung, welche 1 gr-Aequ. gelöst enthalten.

An die verdünnten Lösungen sind solche thunlichst bis zur Sättigung nach Tabellen von Gerlach, Marignac, Oudemans, F. Kohlrausch angeschlossen worden. Unsere Originallösung (meist $m = 5$), welche verdünnt wurde, ist diesen Tabellen angepaßt worden.

---

1) Kohlrausch, Gött. Nachr. 1885 S. 72.

2) Hallwachs, ib. 1892 S. 302.

3) Da die kleinsten spec. Gewichte bis zu etwa 1,00010 (bei der Essigsäure bis 1,00005) abwärts gingen, so können die Werte $(s-1)/m$ für die geringsten Concentrationen nur etwa auf $^1/_{100}$ ihrer Größe verbürgt werden.

Einige geklammerte Werte sind graphisch interpolirt. — Zweiwertige Salze oder Säuren sind mit halbem Molekül eingesetzt; die Phosphorsäure mit ganzem. — Der Factor 1000 läßt die Zahlen so erscheinen, wie wenn man die Gehalte m in gr-Aequ./cbcm ausgedrückt und einfach $(s-1)/m$ geschrieben hätte.

Tabelle I.

Molek.-Gehalt in der Lösung $\frac{\text{gr-Aequ.}}{\text{Liter}}$	Mol. Verdünnung $\frac{\text{Liter}}{\text{gr-Aequ.}}$	Zucker $C_{12}H_{22}O_{11}$ A = 342,1	Natrium-chlorid NaCl 58,5	Natrium-Carbonat $\frac{1}{2}Na_2CO_3$ 53,1	Magnes.-Sulfat $\frac{1}{2}MgSO_4$ 60,2	Zink-Sulfat $\frac{1}{2}ZnSO_4$ 80,7	Salzsäure HCl 36,5	Schwefel-säure $\frac{1}{2}H_2SO_4$ 49,0	Phosphor-säure H_3PO_4 98,0	Wein-säure $\frac{1}{2}C_4H_6O_6$ 75,0	Mono-chlor-essigsäure $C_2H_3ClO_2$ 94,5	Essig-säure $C_2H_4O_2$ 60,0
		17°,4	18°,5	16°,0	18°,0	13°,6	17°,1	18°,0	17°,7	17°,5	16°,8	18°,0
m	v	$1000\frac{s-1}{m}$										
0,00125	800	133,8				87,0						
0,0025	400	133,8		56,3	63,9	86,8		41,8	60,8	37,2	39,3	
0,005	200	133,1	42,2	56,3	63,7	85,8	18,6	41,1	59,7	36,7	38,4	9,3
0,01	100	133,0	42,4	56,5	63,2	85,4	18,7	39,8	58,3	35,8	37,4	9,1
0,02	50	133,0	42,3	56,5	63,0	(84,8)	18,8	38,2	57,0	35,1	36,4	9,1
0,05	20	132,8	42,2	56,2	62,0	(84,1)	18,7	36,3	55,3	34,6	35,6	9,0
0,1	10	132,7	42,0	55,9	61,5	83,4	18,6	35,0	54,1	34,3	35,1	9,0
0,2	5	132,5	41,7	55,3	60,8	82,7	18,4	34,0	53,1	34,1	34,8	8,9
0,5	2	131,8	41,2	54,5	59,7	81,2	18,2	32,8	52,1	33,8	34,2	8,8
1	1	131,0	40,6	53,0	58,6	79,9	17,9	32,2	51,5	33,5	(33,6)	8,7
2	1/2	128,9	39,6	50,9	57,0	78,4	17,4	31,6	50,9	33,3	(33 0)	8,6
3	1/3	126,6	38,8	49,3	55,9	77,1	17,2	31,3	50,4	33,0	(32,5)	8,4
5	1/5		37,7		53,7	75,0	16,8	30,6	49,8	32,5	32,1	7,9
10	1/10						16,0	29,1	48,0	31,5	30,7	6,5
15	1/15							28,0	46,5			4,8
20	1/20							27,2				
30	1/30							25,7				

Alle diese molekularen Ueberschüsse der Dichtigkeit sinken, wie man für die stärkeren Lösungen schon lange weiß, mit zunehmendem Gehalt der Lösung [1]). In dem bisher so gut wie unbekannten ersten Gebiet bis $m = 0{,}5$ herrscht nun in der Abnahme ‚nach Größe und Form‘ eine große Verschiedenheit. Stellt man z. B. die Abnahme von $(s-1)/m$ von $m = 0{,}005$ bis 0,5, in Teilen des Anfangswertes ausgedrückt, zusammen, so findet sich dieselbe etwa: für Zucker 1%, Salzsäure 2%, Chlornatrium 2½%, Natriumcarbonat 3½%, Essigsäure 5% (?), Magnesium- und Zinksulfat 6%, Weinsäure 8%, Monochloressigsäure 11%, Phosphorsäure 13%, Schwefelsäure 20%.

Der ganze Gang wird am besten durch Curven übersehen. In Fig. 1 ist $1000(s-1)/m$ einfach zu dem Gehalte oder der räumlichen Concentration der gelösten Moleküle m als Abscisse bis $m = 0{,}5$ gezeichnet. Man sieht hier die geringe Abnahme für Zucker, Salzsäure, Natrium-Chlorid und Carbonat ziemlich gleichmäßig verlaufen. Die übrigen $(s-1)/m$ fallen sämmtlich in, anfangs stärker, später schwächer gekrümmten Curven verzögert ab: bei der Weinsäure liegt der starke Abfall in dem allerersten Gebiet bis etwa $m = 0{,}05$; bei der Monochloressigsäure reicht er bis 0,1, bei Schwefelsäure bis 0,3. Bei den Sulfaten von Magnesium und Zink ist der Abfall ebenfalls erheblich verzögert, aber bei weitem weniger ungleichmäßig als bei Schwefelsäure selbst.

In Fig. 2 ist die lineare Concentration der gelösten Moleküle $m^{1/3}$ als Abscisse gewählt, wodurch man die starken Lösungen mit anreihen kann. Zugleich erscheinen in dieser Darstellung die Anfänge der Curven so wenig gekrümmt, daß man wohl berechtigt ist, den Verlauf nach Augenmaß bis zum Nullpunkt rückwärts zu verlängern, um, wenn auch teilweise nur genähert, die Grenzwerte für den allerersten Zusatz zum Wasser zu erhalten. Man bekommt dann für

	Zucker	NaCl	$\frac{1}{2}Na_2CO_3$	$\frac{1}{2}MgSO_4$	$\frac{1}{2}ZnSO_4$
$1000(s-1)/m =$	134	42	56	66	90

HCl	$\frac{1}{2}H_2SO_4$	H_3PO_4	$\frac{1}{2}C_4H_6O_6$	$C_2H_3ClO_2$
18,5	46	66	42	45.

Molekular-Volumen φ des Körpers in Lösung.

So nennt man das von einem Gramm-Molekül in der Lösung eingenommene Volumen, unter der Fiction, daß der von dem

1) Die anfänglichen kleinen Zunahmen bis etwa $m = 0{,}02$, die man für HCl, NaCl, Na_2CO_3 findet, sind nicht sicher genug constatirt um sie zu betonen, denn sie fallen nach S. 351 in die Fehlergrenzen.

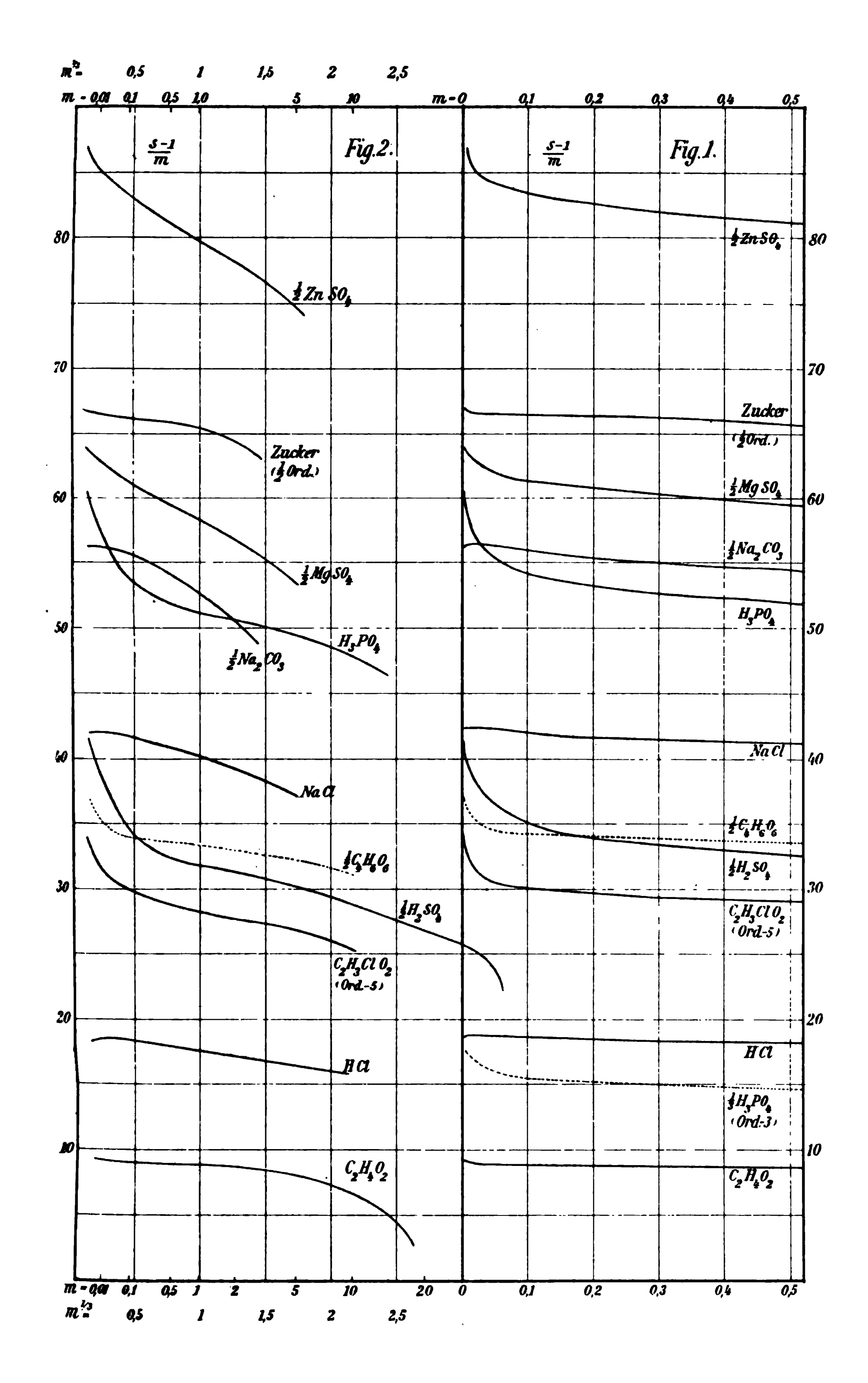
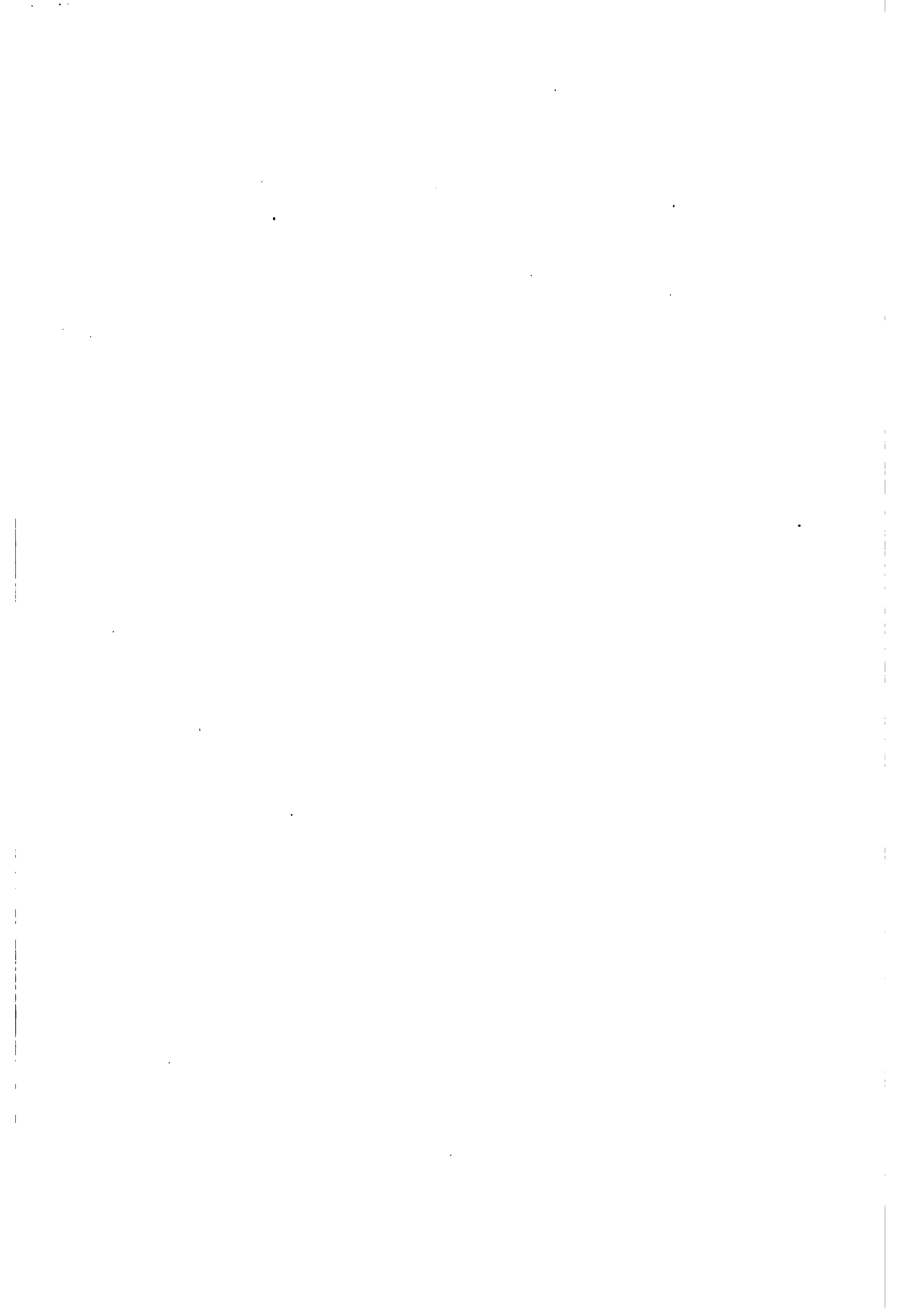


Fig.2.
Fig.1.
$\frac{s-1}{m}$
$\frac{s-1}{m}$
$m^{1/3}$ = 0,5 1 1,5 2 2,5
m = 0,01 0,1 0,5 1,0 5 10
m = 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5
m = 0,01 0,1 0,5 1 2 5 10 20
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5
$m^{1/3}$ = 0,5 1 1,5 2 2,5
80
70
60
50
40
30
20
10
$\frac{1}{2}ZnSO_4$
Zucker ($\frac{1}{2}$ Ord.)
$\frac{1}{2}MgSO_4$
$\frac{1}{2}Na_2CO_3$
H_3PO_4
NaCl
$\frac{1}{2}C_4H_6O_6$
$\frac{1}{2}H_2SO_4$
$C_2H_3ClO_2$ (Ord.-5)
HCl
$\frac{1}{3}H_3PO_4$ (Ord.-3)
$C_2H_4O_2$



lösenden Wasser eingenommene Raum ungeändert bleibe. Das Molekular-Volumen φ wächst mit steigender Concentration. Man erhält dasselbe in cbcm, wenn A das Gramm-Molekulargewicht des Körpers, Q die Dichtigkeit des Wassers bei der Lösungstemperatur ist, als [1])

$$\varphi = \frac{A}{Q} - 1000 \frac{s-1}{m}$$

Tab. II. Volumen φ eines gr-Moleküls des gelösten Körpers in cbcm.

m	Zucker	NaCl	$\frac{1}{2}Na_2CO_3$	$\frac{1}{2}MgSO_4$	$\frac{1}{2}ZnSO_4$	HCl	$\frac{1}{2}H_2SO_4$	H_3PO_4	$\frac{1}{2}C_4H_6O_6$	$C_2H_3ClO_2$	$C_2H_4O_2$
0	209	16,5	—3	—6	—9	18	3	32	33	50	
0,00125	208,7				—6,2						
0,0025	208,7		—3,2	—3,6	—6,0		7,3	37,3	37,9	55,3	
0,005	209,4	16,4	—3,2	—3,4	—5,0	17,9	8,0	38,4	38,4	56,2	50,7
0,01	209,5	16,2	—3,4	—2,9	—4,6	17,8	9,3	39,8	39,3	57,2	50,9
0,02	209,5	16,3	—3,4	—2,7	(—4,0)	17,7	10,9	41,1	40,0	58,2	51,0
0,05	209,7	16,4	—3,1	—1,7	(—3,3)	17,8	12,8	42,8	40,5	59,0	51,0
0,1	209,8	16,6	—2,8	—1,2	—2,6	17,9	14,1	44,0	40,8	59,5	51,1
0,2	210,0	16,9	—2,2	—0,5	—1,9	18,1	15,1	45,0	41,0	59,8	51,2
0,5	210,7	17,4	—1,4	+0,6	—0,4	18,3	16,3	46,0	41,3	60,4	51,3
1	211,5	18,0	+0,1	+1,7	+0,9	18,6	16,9	46,6	41,6	(61,0)	51,3
2	213,6	19,0	+2,2	+3,3	+2,4	19,1	17,5	47,2	41,8	(61,6)	51,5
3	215,9	19,8	+3,8	+4,4	+3,7	19,3	17,8	47,7	42,1	(62,1)	51,7
5		20,9		+6,6	+5,8	19,7	18,5	48,3	42,6	62,5	52,2
10						20,5	20,0	50,1	43,6	63,9	53,5
15							21,1	51,6			55,2
20							21,9				
30							23,4				
Φ =	215	27	21	23	23	42?	27	52	43	?	57

Die ersten, zu $m = 0$ geschriebenen φ sind aus den für die alleräußerste Verdünnung extrapolirten Werten der S. 354 berechnet.

---

1) Die Volumvermehrung ΔV, welche 1 Liter Wasser erfährt, wenn man dasselbe durch Auflösung von wasserfreier Substanz in eine Lösung von der Concentration m gr-Mol./liter verwandelt, beträgt in cbcm

$$\Delta V = \frac{m\varphi}{1 - 0{,}001\, m\varphi} \text{ oder } \frac{\varphi}{v - 0{,}001\, \varphi};$$

für schwächere Lösungen $\Delta V = m\varphi + \frac{1}{1000}(m\varphi)^2$, oder für sehr verdünnte $= m\varphi$ oder φ/v. — Wenn man m gr-Moleküle zu 1 Liter Wasser setzt, so bedeutet $m\varphi$ die Zunahme des Volumens hierdurch. φ ist aus der Tabelle aber dann nicht zu m, sondern zu $m/\left(1 + \frac{m\varphi}{1000}\right)$ als Argument zu entnehmen, wobei das φ, welches in dem Correctionsglied vorkommt, hinreichend genau zu m genommen wird.

Unter jeder Reihe findet sich noch das Volumen Φ eines gr-Moleküls, welches der gelöste Körper im wasserfreien Zustande einnimmt.

Daß der gelöste Körper „negative Volumina" annehmen kann, ist für Na_2CO_3, $MgSO_4$, $ZnSO_4$ bereits durch die Untersuchungen und Zusammenstellungen von Gerlach, Kremers, Mc. Gregor, Traube bekannt. Man sieht aus der obigen Tabelle, wie die negativen Werte nach großen Verdünnungen noch wachsen. Selbstverständlich folgt daraus, daß die Annahme, das Wasservolumen bleibe ungeändert, eine der Wirklichkeit nicht entsprechende Fiction ist. Wenn man bei einer Lösung noch vom Volumen des Körpers und des Wassers getrennt reden will, so muß es im Falle einer beträchtlichen Volum-Verminderung bei der Herstellung einer verdünnten Lösung wesentlich das Volumen des Wassers sein, welches durch die Anwesenheit des gelösten Körpers vermindert wird[1]).

Hervorzuheben ist noch, daß die Schwefelsäure in großer Verdünnung sich dem Volumen Null nähert, d. h. daß die ersten, dem Wasser zugesetzten Mengen fast ohne Volumvermehrung in das letztere eindringen.

Die Volumina in starker Lösung nähern sich dem Volumen Φ im ungelösten Zustande, mit Ausnahme derjenigen Körper, welche mit Wasser krystallisiren.

Der Nichtelektrolyt Zucker hat in allen Concentrationen ein Volumen, welches nicht sehr von demjenigen des festen Zuckers abweicht.

Dichtigkeit und elektrisches Leitvermögen verdünnter Lösungen.

In dem Gang beider Eigenschaften findet sich unzweideutig eine nahe Verwandtschaft. Denn sämmtliche Curven S. 353 für $(s-1)/m$, welche anfangs stark abfallen, gehören Körpern an, deren molekulares Leitvermögen k/m mit steigender Concentration

1) Unter der Annahme, daß der gelöste Körper sein Volumen nicht ändere, erhält man die durch die Lösung bewirkte Volumverminderung des Liters Wasser an sich in cbcm als

$$m\frac{\Phi-\varphi}{1-0{,}001\,m\varphi},$$

oder für starke Verdünnung $m(\Phi-\varphi)$. Φ und φ sind aus Tab. II zu entnehmen. Auch diese Hypothese ist willkürlich, kann aber für verdünnte Lösungen eine Annäherung ergeben. Trennen kann man die beiden Volumänderungen vorläufig nicht.

der Lösung ebenfalls zu Anfang stark abnimmt[1]) und zwar ungefähr in demselben Gebiet, in welchem auch die Dichtigkeit die Abnahme zeigt.

Im Gegensatze dazu stehen z. B. NaCl und HCl, in beiden Beziehungen sich wenig ändernd. Für Na_2CO_3 allerdings fällt das Leitvermögen nicht unbeträchtlich ab, der Ueberschuß der Dichtigkeit wenig [2]).

Der Nichtelektrolyt Zucker hat von allen Körpern die constanteste Dichtigkeit in Lösung.

Essigsäure leitet in stärkerer Lösung bekanntlich sehr schlecht. Erst von etwa $m = 0{,}01$ abwärts hebt ein relativ besseres Leitvermögen an. Nur unsere erste Zahl fällt in dieses Gebiet. Sie ist etwas größer als die darauf folgenden wenig veränderlichen Werte; der Unterschied läßt sich aber nicht verbürgen.

Zum Schluß sei noch besonders betont, daß es nicht nur mehrwertige Körper, also solche, die ja ihre Constitution ändern können, sind, welche die anfängliche Erhöhung der Curven zeigen, sondern auch die Monochloressigsäure, nach Ostwald eins der seltenen Beispiele einbasischer Säuren, deren Leitvermögen oder, nach Arrhenius, Dissociation schon in etwas stärkerer Lösung sich erheblich ändert.

Auch mit der Lichtbrechung sehr verdünnter Lösungen, welche einer von uns kürzlich untersucht hat[3]), zeigt die Dichtigkeit eine nahe Verwandschaft.

Näher auf diese Zusammenhänge einzugehen müssen wir uns vorbehalten.

Straßburg und Dresden, April 1893.

---

1) Gött. Nachr. 1885 S. 72.

2) Ein Irrtum dürfte nicht annehmbar sein. Es ist zur Ergänzung noch Na_2SO_4 zu untersuchen.

3) Hallwachs, Gött. Nachr. 1892 S. 302; Wied. Ann. 47, 380. 1892.

Preisaufgaben der **Wedekindschen Preisstiftung** für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellung v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen.

Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen [1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrift auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß, entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nech einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältnis zu der königlichen Gewalt einerseits wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtsschreiber hat der Bearbeiter dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung,

sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größten (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein

Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1895, dem Direktor zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der

Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben**. Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare**. Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1893.

(Fortsetzung.)

L'Academia delle Scienze fisiche e Mathematiche (Sezione della Società Reale di Napoli:
Rendiconti. Serie 2a. Vol. VI (Anno XXXI). Fasc. 7° a 12°. Luglio a Dicembre 1892. Napoli 1892.
La Società Toscana di Scienze Naturali:
Atti. Processi verbali. Vol. VIII. Adunanza del 3. Dicembre 1882.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
Bollettino delle pubblicazioni Italiane. 1893. N. 169. 15 Gen.
N. 170. 31 Gen. Firenze. 1893.
New York Mathematical Society:
Bulletin. Vol. II. N. 1—4. Jan. 1893. New York 1892—93.
Museum of Comparative Zoology at Harvard College:
a. Annual Report of the Curator. 1891—92.
b. Bulletin. Vol. XXIII. N. 4. Cambridge U. S. A. 1892.
The Journal of Comparative Neurology. Dec. 1892. Vol. II. Pages 137—172. Granville, Ohio U. S. A.
La Sociedad Cientifica Argentina:
Anales. Agosto al Octubre de 1892. Entrege II—IV. Tomo XXXIV. Buenos Aires 1892.
L'Academia Nazional de Ciencias en Cordoba (Rep. Argentina):
Boletin. Enero de 1890. Tomo X. Entrega 4a. Buenos Aires 1890.

Nachträge.

Verein für Naturkunde zu Kassel:
XXXVIII. Bericht über das Vereinsjahr 1891—92. Kassel 1892.
Introduction au Catalogue du Musée Guimet. Paris 1891.
The Geological Survey of India:
Records. Vol. XXV. Part 4. 1892. Calcutta 1892.
L'acceptation du Testament de Charles II roi d'Espagne par Louis XIV. (Extrait de l'ouvrage de M. A. Legrelle. La Diplomatie etc.). Gand 1892.
The Canadian Institute:
Transactions. N. 5. Dec. 1892. (Vol. III. Part 1). Toronto 1892.
Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. LIV. LV. Berlin 1893.

Februar 1893.

Königliche Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin:
Berichte. Register und Titel zu 1892—1893. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII. Berlin.
Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen. 19ter Band. Berlin 1892.
Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur. Rede zum Geburtsfeste S. M. des K. K. Wilhelm II. in der Aula der Technischen Hochschule zu Berlin v. E. Lampe. Berlin 1893.
Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig:
Ueber die Leges Juliae iudiciorum privatorum und publicorum v. Moritz Voigt. Des XIII. Bandes der Abhandl. der historisch-philologischen Classe. N. V. Leipzig 1893.
Astronomische Gesellschaft:
Publication XX. Tafeln zur Bestimmung der jährlichen Auf- und Untergänge der Gestirne von Dr. Walter F. Wislicenus. Leipzig 1892.

Curatorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Vorschläge zu gesetzlichen Bestimmungen über elektrische Maasseinheiten v. Dr. E. Dorn. Berlin 1893.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. Carl Ohrtmann. Band XXII. Jahrg. 1890. Heft 1. Berlin 1893.

Handbuch der Organischen Chemie v. Dr. F. Beilstein. Dritte Aufl. 14te Lieferung (B. 1. Liefer. 14). Hamburg u. Leipzig 1893.

Provinzialmuseum der Physikalisch-Oekonomischen Gesellsch. zu Königsberg: Führer durch die Geologischen Sammlungen. Königsberg in Pr. 1892.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg:
a. Verhandlungen. N. F. XXVI. Band. N. 6—8.
b. Sitzungsberichte. Jahrg. 1892. N. 7—10.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen:
a. Mitteilungen. Des 3. Bandes 1. Heft.
b. Verzeichniss und Titel zum zweiten Bande. Meissen 1891.

Leopoldina. Heft XXVIII. N. 23—24. Heft XXIX. N. 1—2. Halle a. S. 1892.

Verein für Naturkunde zu Kassel:
XXXVI. u. XXXVII. Bericht über die Vereinsjahre 1889 u. 1890. Kassel 1891.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:
Mittheilungen. Band XXIII. Heft 5. Leipzig 1893.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien:
a. Sitzungsberichte:
1. Philos.-histor. Classe. Band 126.
2. Math.-naturw. Classe. Abth. I. 1891. N. 8—10. 1892. N. 1—6.
» IIa. 1891. N. 8—10. 1892. N. 1—5.
» IIb. 1891. N. 8—10. 1892. N. 1—5.
» III. 1891. N. 8—10. 1892. N. 1—5.
b. Denkschriften. Bd. 41.
c. Archiv für Kunde oesterr. Geschichtsquellen. Bd. 78. 1. Hälfte.
d. Fontes rerum austriacarum Bd. 46 2. Abth. Bd. 47 1. Abth.
e. Almanach. 1892.

K. K. Geologische Reichsanstalt zu Wien:
a. Verhandlungen. N. 16. 1892. Wien.
b. Jahrbuch. Jahrg. 1892. XLII. Band. 2. Heft. Wien 1892.

K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:
Verhandlungen. Jahrg. 1892. XLII. Bd. III.—IV. Quartal. Wien 1892—93.

Oesterr. Gesellsch. für Meteorologie u. deutsche Meteorologische Gesellschaft:
Meteorologische Zeitschrift 1893. Heft I. Januar. Wien.

Akademie der Wissensch. in Krakau:
a. Bibliot. Pisarzow. Polskich. T. XXIII.
b. Rocznik. Akademii Umiejetności Rok. 1890, 1891/2. Krakowie 1892.
c. Wydawnictwo etc. (Elephantiasis Arabum). Text u. Tafeln. Kracow. 1892.
d. Anzeiger 1893. Januar. Krakau 1893.

Die Schöpfungslehre der Mosaischen Urkunde. Studie v. Dr. S. N. Kutna. Przemysl 1892.

The Royal Society:
Proceedings. Vol. LII. N. 318.

The Royal Astronomical Society:
Monthly Notices. Vol. LIII. N. 3.

The Royal Microscopical Society:
Journal 1893. Part 1. Febr. London.

Nature. Vol. 47. N. 1214—1217.

The Royal Irish Academy:
Transactions. Vol. XXX. Part III. IV. Dublin 1892. 1893.

The Geological Survey of India:
a. Memoirs. Index to the Genera and Species discribed in the Palaeontologia Indica, up to the Year 1891.
b. Contents and Index of the first twenty volumes from 1859 to 1883. Calcutta 1892.

Department of Mines, Sidney:
Records of the Geological Survey of New South Wales. Vol. III. Part II. 1892. Sidney 1892.
The Royal Society of South Australia:
Transactions. Vol. XV. Part II. Vol. XVI. Part I. Adelaide 1892.
Bergens Museum:
Aarsberetning for 1891. Bergen 1892.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschaapen:
a. Notulen van de algemeene Bestuursvergaderingen. Deel XXX. 1892. Batavia 1892.
b. Tijdschrift voor Indische Taal-. Land- en Volkenkunde. Deel XXXVI. Afl. 2. Batavia 's Hage 1892,
La Société Hollandaise des Sciences à Harlem:
Archives Neerlandaises des Sciences exactes et naturelles. Tome XXVI. 4me et 5me Livr. Harlem 1893.
L'Académie Imp. des Sciences de St.-Pétersbourg:
a. Mémoires. Tome XXXVIII. N. 14 et dernier. Tome XV. N. 1. VIIe Serie.
b. Bulletin. Nouvelle Série III (XXXV) N. 1. 2. St. Petersbourg 1892.
L'Académie Royale de Belgique:
Bulletin. 63e année, 3e série, tome 25. N. 1. Bruxelles 1893.
La Société Mathématique de France:
Bulletin. Tome XX. N. 7. Paris.
La R. Accademia dei Lincei:
a. Atti. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche et naturali. 1892. Vol. I°. Fasc. 12. 2. Semestre. 1893. Vol. II. Fasc. 1. 2. 1°. Semestre. Roma 1892/93.
b. Annuario. 1893.
La R. Accademia delle Scienze di Torino:
Atti. Vol. XXVIII. Disp. 1. 2. 3. 1892—93. Elenco degli Residenti e correspondenti del anno 1892-93. Torino 1893.
L'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (Sezione della Società R. di Napoli):
Rendiconti. Serie 2a. Vol. VI. (Anno XXXII). Fasc. 1. Gemajo 1993. Napoli 1893.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
Bollettino delle pubblicazioni Italiane. N. 171. 172. 1893.
The National Academy of Sciences:
Memoirs. Vol. V. Washingtou 1891.
The Astronomical Observatory of Yale University:
Transactions. Vol. I. Parts III and IV. New Haven 1893.
The American Ephemeris:
Astronomical Papers. Newcomb. Vol. II. III. Washington 1891.
U. S. Naval Observatory:
Report of the Secretary of the Navy 1892. pp. 133—140. Washington 1892.
The Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters:
Transactions. Vol. VII. 1883—87. Madison Wisc. 1889.
The American Geographical Society:
Bulletin. Vol. XXIV. N. 4. Part. 1. Dec. 1892. New York.
The New York Mathematical Society:
Bulletin. Vol. II. N. 5. Febr. 1893. New York 1893.
The Journal of Comparative Neurology. Vol. II. Dec. 1892. Pages 177—192. (Supplement).

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

28. Juni. № 10. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Mai.

Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.

Von

Friedrich Hultsch.

In der Kreismessung des Archimedes und in den Ueberresten der Heronischen Geometrie und Stereometrie finden sich ziemlich viele, fertig ausgerechnete Quadratwurzeln, ohne daß über die Methode der Ausrechnung irgend etwas überliefert wäre. Von vorn herein konnte als wahrscheinlich gelten, daß die Alten, wie sie überhaupt Brüche auf möglichst bequeme Abrundungen zu bringen pflegten, auch für den Ausdruck der irrationalen Wurzeln immer den kleinsten Näherungswert wählten, der nur passender Weise sich darbot. Indes hat sich bei den Nachrechnungen gezeigt, daß bisweilen eine minder genaue Abrundung statt der genaueren und leicht zu ermittelnden gewählt worden ist.

Es ist daher nicht zu verwundern, daß neuere Gelehrte verschiedene Wege eingeschlagen haben, um die Methoden wieder aufzufinden, nach denen einst Archimedes und Heron zu den uns überlieferten Wurzelwerten gelangt sind. Was bis zum J. 1882

über diese Frage erschienen war, ist von S. Günther[1]) eingehend besprochen und durch eigene Erklärungsvorschläge ergänzt worden. Später sind Untersuchungen von Weißenborn, Hunrath und Schoenborn hinzugekommen[2]).

In dem Schlußworte zu seinem Berichte über alle diese Schriften bemerkt Günther[3]), daß der Nachweis, die Alten hätten sich mit Sicherheit des einen oder andern Hülfsmittels bei der näherungsweisen Berechnung ihrer Quadratwurzeln bedient, weder bisher geführt worden ist, noch auch jemals ohne Beibringung neuer Originaldocumente wird geführt werden können. Neue Originalzeugnisse vermag nun zwar der Verfasser dieser Zeilen nicht beizubringen; aber er ist durch eine Reihe von Untersuchungen zur Geschichte der griechischen Arithmetik zu einigen Gesichtspunkten geführt worden, welche, in ihrem historischen Zusammenhange mit einander verknüpft, zur Klärung der noch schwebenden Frage verwendet werden konnten. Außerdem ergaben sich wesentliche Aufschlüsse aus einer streng analytischen Behandlung der Archimedischen Begrenzungen der Wurzel aus 3 und des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser.

I.

Es ist mit den Näherungswerten für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ zu beginnen, denn diese sind zuerst von griechischen Mathematikern behandelt worden. Für $\sqrt{2}$ treten als Gewährsmänner Pythagoras, Platon und Aristarchos von Samos auf; $\sqrt{3}$ wurde zuerst berechnet von dem Mathematiker Theodoros, dem Lehrer Platons, dann von Archimedes; endlich erscheint bei Heron von Ale-

1) Die quadratischen Irrationalitäten der Alten. Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, IV. Heft, Leipzig 1882.

2) H. Weißenborn, Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerten der irrationalen Quadratwurzeln in Zeitschr. für Mathem. und Phys., hist.-liter. Abteil., XXVIII (1883) S. 81 ff.; ders., Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron, Berlin 1883. K. Hunrath, Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern, Progr. Hadersleben 1883; ders., Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche, Kiel 1884. W. Schoenborn, Ueber die Methode, nach der die alten Griechen (insbesondere Archimedes und Heron) Quadratwurzeln berechnet haben, in Zeitschr. für Mathem. und Phys., hist.-liter. Abteil., XXVIII (1883) S. 169 ff. Vgl. auch Heiberg in Philol. XLIII S. 485 f., Günther Quadrat. Irrational. S. 128 f., dens. Geschichte der antiken Naturwiss., Nördlingen 1888, S. 14—17.

3) Geschichte der antiken Naturwiss. S. 17.

xandreia ein Näherungswert, welcher an Genauigkeit weit hinter der Archimedischen Ausrechnung zurücksteht, gewiß aber als eine zu der schärferen Bestimmung führende Zwischenstufe schon von Archimedes benutzt worden ist.

Daß die Theorie des Irrationalen (ἡ τῶν ἀλόγων πραγματεία) von Pythagoras erfunden worden ist, meldet das aus Eudemos entlehnte Mathematikerverzeichnis bei Proklos [1]), eine Quelle, die als durchaus zuverlässig sich erwiesen hat. In Verbindung mit der Angabe Platons, daß Theodoros die Irrationalität der Wurzeln aus 3 bis 17 nachgewiesen habe, schloß M. Cantor mit Recht, daß die Wurzel aus 2 es gewesen sei, welche von Pythagoras geometrisch dargestellt und als incommensurabel zur Kathete des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes, mithin auch als eine irrationale Zahl nachgewiesen wurde [2]). Auf welchem Wege aber Pythagoras der Bestimmung von $\sqrt{2}$ sich genähert hat, dafür ist ein Fingerzeig bei Platon an der Stelle erhalten, wo er im engsten Anschluß an die Pythagoreische Zahlenlehre über die sogenannte geometrische Zahl handelt [3]). Denn wenn hier eine ῥητή und eine ἄρρητος διάμετρος τῆς πεμπάδος einander gegenübergestellt werden, so ist damit auf die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite zu 5 Längeneinheiten gesetzt wird, hingewiesen. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatze ist diese Diagonale $= \sqrt{50}$, und dies ist die ἄρρητος διάμετρος Platons; der nächste rationale Wert aber ist $\sqrt{50-1}$, d. i. die ῥητὴ διάμετρος [4]). Wenn also Platon nach dem Vorbilde des Pythagoras den irrationalen Werth $\sqrt{50}$ auf die Fünfzahl zurückführte, so ist damit zugleich auf des letzteren Untersuchungen über die Diagonale des Quadrates über 1, d. i. auf $\sqrt{2}$ hingewiesen. Ja est ist uns durch die πεμπάς Platons zugleich der Weg angedeutet, auf welchem Pythagoras die erste, leicht verständliche Näherung für $\sqrt{2}$ gefunden haben muß, und zwar gilt dies sowohl für die geometrische als für die arithmetische Darstellung. Statt des Radicandus 2 mußte zunächst ein gleichwertiger Bruch derart gesucht werden, daß der Nenner jedenfalls eine rationale Wurzel hatte, mithin die annähernde Wurzelberechnung sich nur auf den Zähler

1) Procli in I. Euclidis elem. libr. commentarii rec. G. Friedlein p. 65, 19.

2) Plat. Theaet. 147 D. Cantor Vorles. über Gesch. der Mathem. I S. 154. Vgl. auch Günther Quadrat. Irration. S. 6.

3) Plat. de rep. VIII 546 B. C.

4) Cantor Vorles. I S. 191, und vgl. Hultsch in Zeitschr. für Mathem. und Phys., hist.-liter. Abteil., XXVII (1882) S. 48 mit Anm. 11, Hunrath Die Berechnung usw. S. 19.

erstreckte. Pythagoras wählte $\frac{50}{25}$, und somit war $\frac{7}{5}$ die erste Annäherung für $\sqrt{2}$.

Damit war nun freilich noch bei weitem nicht nachgewiesen, daß $\sqrt{2}$ irrational ist, aber wir können mit einiger Wahrscheinlichkeit die Methode, nach welcher Pythagoras diesen Nachweis führte, in den Hauptzügen wiederherstellen. Wieder erinnert uns die Platonische *ἄρρητος διάμετρος τῆς πεμπάδος* daran, daß der Wert $\frac{7}{5}$ für $\sqrt{2}$ nicht bloß als Annäherung, sondern zugleich als eine erste Begrenzung, nämlich $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$, in Betracht kommen sollte. Die andere Begrenzung aber ging nicht minder sicher aus einem Lehrsatze hervor, den wir in den Elementen des Euklid als 4. Proposition des II. Buches vorfinden und der in der arithmetischen Form bekanntlich $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lautet. Der Euklidische Beweis dieses Theorems fußt lediglich auf solchen Sätzen, welche im I. Buche der Elemente v o r Propos. 47, d. i. v o r d e m P y t h a g o r e i s c h e n L e h r s a t z e, sich finden; alles aber, was bei Euklid die Voraussetzung für den Pythagoreischen Lehrsatz bildet, ist schon dem Pythagoras, sei es auch in anderer als der Euklidischen Form, bekannt gewesen, und es erscheint demnach ganz unbedenklich dem Pythagoras auch die Kenntnis des Satzes $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zuzusprechen. An diesen schloß sich, wie gleich hier zu bemerken ist, durch eine leichte Modification des geometrischen Beweises die Differenzformel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, welche Pythagoras wohl ebenso wie die Formel der Summe gekannt hat. Sicherlich sind beide Formeln von Theodoros bei seinen Wurzelbestimmungen angewendet worden.

Wenn nun Pythagoras zu der irrationalen $\sqrt{50}$ durch seine *ῥητὴ διάμετρος* als erste Annäherung $\sqrt{50-1}$ setzte, so konnte ihm nicht verborgen bleiben, daß nach der eben erwähnten Summenformel eine weit genauere Annäherung durch $7 + \frac{1}{14}$ dargestellt wird. Denn das Quadrat dieser Summe ist nur um $\frac{1}{14^2} > 50$. Wir dürfen also gewiß mit Recht dem Pythagoras die erste Begrenzung

$$7\tfrac{1}{14} > \sqrt{50} > 7$$

zuschreiben. Wie er dann weiter verfahren ist, darüber läßt sich bei dem Mangel aller Ueberlieferung nichts sagen. Verschiedene Wege standen ihm offen um zu erweisen, daß es unmöglich ist, zwischen den Grenzen $7\frac{1}{14}$ und 7 irgend eine aussprechbare Zahl zu finden, deren Quadrat $= 50$ ist[1]).

1) Vielleicht hat Eutokios zu Archim. de dimens. circuli (Archim. opera ed.

Den arithmetischen Erwägungen über $\sqrt{50}$ haben gewiß auch geometrische Darstellungen zur Seite gestanden. Nachdem $\sqrt{50}$ als Diagonale des Quadrates über 5 construiert war, lag es nahe, auch über dieser Diagonale ein Quadrat zu errichten und darin das Quadrat über 7 so einzuzeichnen, daß ein sogenannter Gnomon den Ueberschuß des größeren Quadrates über das kleinere darstellte. Da bei dem Pythagoreer Philolaos ein solcher *γνώμων* bereits als üblicher terminus technicus erscheint, so dürfen wir dessen Erfindung wohl auf Pythagoras selbst zurückführen[1]). Ob und wie etwa diese geometrische Darstellung weiter geführt worden ist, um in Anlehnung an den arithmetischen Beweis zu zeigen, daß die Diagonale des Quadrates über 5 weder zu der Geraden von 7 Längeneinheiten noch zu irgend einer andern Geraden von rationalem Zahlenwerte commensurabel ist, muß bei dem Mangel jeglicher Ueberlieferung dahingestellt bleiben[2]). Doch ist

---

Heiberg III p. 268. 270) eine Spur ältester Tradition aufbewahrt, indem er unter Berufung auf Heron und andere, welche die annähernde Berechnung von Quadratwurzeln gelehrt haben, feststellt: *ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸς μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ τινα τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ ἀριθμὸς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γενόμενα οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον.* Hier bedeutet, wie aus dem Zusammenhange hervorgeht, *ἀριθμὸς* allenthalben die ganze Zahl (*ἀριθμὸς πλήρης*). Wollte man, so argumentiert Eutokios, von ganzen Zahlen, welche nicht Quadratzahlen sind, die Wurzel ausrechnen, so müßte das entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl sein. Die ganzen Zahlen aber ergeben, mit sich selbst multipliciert, Quadratzahlen, die gebrochenen Zahlen Brüche: mithin giebt es keine (aussprechbare) Zahl, welche, mit sich selbst multipliciert, eine ganze Zahl ergäbe, die nicht Quadratzahl ist. Auch zwischen den oben gesetzten Grenzen $7\frac{1}{14}$ und 7 ist offenbar keine Zahl denkbar, welche, mit sich selbst multipliciert, die ganze Zahl 50 ergäbe.

1) Böckh, Philolaos des Pythagoreers Lehren, Berlin 1819, S. 141 (Mullach Fragm. philos. Graec. II S. 4): *ὁ ἀριθμὸς — πάντα γνωστὰ καὶ ποτάγορα ἀλλάλοις κατὰ γνώμονος φύσιν ἀπεργάζεται*, und vgl. die Erklärungen von Böckh S. 142 f., Cantor Vorles. I S. 136.

2) In weit späterer Zeit ist von Theon zur Syntaxis des Ptolem. I p. 185 f. ed. Halma der Pythagoreische Gnomon zur annähernden Bestimmung einer Quadratwurzel, und zwar in sexagesimaler Ausrechnung, angewendet worden. Der Radicandus wird hier als Quadrat im Betrage von 4500 Quadrateinheiten dargestellt. Eingezeichnet wird zunächst das Quadrat $67^2 = 4489$ Quadrateinheiten. Weiter wird der überschießende Gnomon so zerlegt, daß zuerst die Rechtecke ausgeschieden werden, welche dem doppelten Producte der 67 Ganzen mal 4 Sechzigsteln entsprechen. Dann wird auch das Quadrat von 4 Sechzigsteln ausgeschieden und der dann übrig bleibende Gnomon gedeutet

zum Schluß noch darauf hinzuweisen, daß, wenn einmal teils durch arithmetische, teils durch geometrische Erwägungen $\sqrt{50}$ als irrational erkannt war, der Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50}$ keine Schwierigkeit machen konnte.

II.

Den Nährungswert $\sqrt{2} > \frac{1}{5}\sqrt{50-1}$ hat auch **Aristarchos** von Samos im 7. Satze seiner Schrift *περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης* verwendet[1]). Da der betreffende Teil seiner Beweisführung vorbildlich für den ersten Teil des Beweises im 3. Theorem der Kreismessung des Archimedes ist, so mögen hier die Schlußfolgerungen des Aristarch, so weit sie mit der Methode des Archimedes vergleichbar sind, in einer freieren, den Text des Schriftstellers ergänzenden und erläuternden Bearbeitung wiedergegeben werden.

Fig. 1. Aristarch will erweisen, daß in dem rechtwinkligen Dreieck $AB\Gamma$, welches nach Construction dem Dreieck $B\Theta E$ ähnlich ist, das Verhältnis der Seiten $\frac{AB}{B\Gamma} > 18$ ist. Um zu diesem Endergebnis zu gelangen, werden nach dem allgemeinen Gebrauche der griechischen Mathematiker Ketten von Verhältnissen gebildet, und zwar sind die Verhältnisse von Geraden mit Verhältnissen von Zahlen derart zu vergleichen, daß zuletzt das obige Verhältnis $AB : B\Gamma > 18 : 1$ sich ergiebt.

Vorausgesetzt wird, daß $ABEZ$ ein Quadrat, BZ dessen Diagonale, $\angle HBE = \frac{1}{2}\angle ZBE$, und $\angle \Theta BE = 3^0$, endlich daß, wie schon bemerkt wurde, $\angle A\Gamma B = R$ ist. Um die Winkel ZBE,

---

als das annähernde geometrische Aequivalent für $2\,(67^0\,4')\,55'' + 55''^2$. Die Seite des Quadrates im Betrage von 4500 Quadrateinheiten ist also berechnet zu 67 Ganzen, 4 ersten Sechzigsteln und nahezu 55 zweiten Sechzigsteln. Vgl. Cantor Vorles. I S. 420, Günther Quadrat. Irration. S. 26 f.

1) Aristarchi Samii de magnit. et distant. solis et lun. liber ed. Wallis in dessen Opera mathem. vol. III, Oxoniae 1699, p. 581 ff. Histoire d'Aristarque de Samos par F(ortia d'Urban), Paris 1810, p. 32 ff. (bei diesem sind die Propositionen 2—18 der Wallisschen Ausgabe gezählt als 3—19). Vgl. auch Aristarchos über die Größe und Entfernungen der Sonne und des Mondes, übersetzt und erläutert von A. Nokk, Progr. Freiburg 1854. [Vor der Benutzung von „ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΥ ΣΑΜΙΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΩΝ — mit kritischen Berichtigungen von E. Nizze", Festschr. zum Jubil. der Greifswalder Univ., Stralsund 1856, ist zu warnen, da diese Ausgabe sowohl im Text als in den Anmerkungen nicht bloß eine Menge von Ungenauigkeiten, sondern auch nicht wenige Flüchtigkeitsfehler der gröbsten Art enthält.]

HBE, *ΘBE* mit einander zu vergleichen, setzt Aristarch den rechten Winkel als Einheit und teilt ihn sexagesimal. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} \angle ZBE &= 30 \\ \angle HBE &= 15 \\ \angle \Theta BE &= 2 \end{aligned}\right\}\text{ Sechzigsteln des rechten Winkels}$$ [1]).

Es werden nun nach einander zwei Verhältnisse von Geraden als größer als gewisse Zahlen bestimmt.

(A) Es ist nämlich nach einem Hülfssatze, welcher als bekannt vorausgesetzt und deshalb hier nicht erwähnt wird [2]), in den rechtwinkligen Dreiecken *HBE* und *ΘBE*

---

1) Pag. 581 f. der Ausg. von Wallis: *ἔσται δὴ ἡ ὑπὸ τῶν ZBE γωνία ἡμίσεια ὀρθῆς. τετμήσθω ἡ ὑπὸ τῶν ZBE γωνία δίχα τῇ BH εὐθείᾳ· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν HBE γωνία τέταρτον μέρος ἐστὶν ὀρθῆς. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΔBE γωνία* (d. i. $\angle \Theta BE$) *τριακοστόν ἐστι μέρος ὀρθῆς· λόγος ἄρα τῆς ὑπὸ τῶν HBE γωνίας πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΔBE γωνίαν, ὃν ἔχει τὰ $\overline{ιε}$ πρὸς τὰ δύο· οἵων γὰρ ἐστὶν ὀρθὴ γωνία $\overline{ξ}$, τοιούτων ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ τῶν HBE $\overline{ιε}$, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΔBE δύο* (Wallis hat *ἡ δὲ $\overline{δβε}$*, das fehlende *ὑπὸ τῶν* hat Fortia d'Urban hinzugefügt; von demselben rührt auch *τῶν* hinter den obigen Worten *ἔσται δὴ ἡ ὑπὸ* her). Aus den Schlußworten ist zu ersehen, daß schon Aristarch die Sexagesimalteilung ähnlich bezeichnet hat, wie später Ptol. Synt. I p. 28 der Ausg. von Halma: *ἡ τοῦ δωδεκαγώνου πλευρά, ὑποτείνουσα δὲ περιφέρειαν τοιούτων $\overline{λϛ}$ οἵων ἐστὶν ὁ κύκλος $\overline{τξ}$, τοιούτων ἔσται $\overline{λξ}$ δ′ νε″ οἵων ἡ διάμετρος $\overline{ρκ}$*, und so häufig im Folgenden (die Kreisperipherie hat bei Ptolemaios 6×60, der Diameter 2×60 Teile).

2) Archimedes in der Sandrechnung (p. 260 Heiberg) setzt voraus, daß zwei rechtwinklige Dreiecke eine Kathete gleich, die andere aber ungleich haben. Dazu führt er einen Lehrsatz in allgemeiner Fassung an, welcher in angewandter Form auf folgende zwei Behauptungen zurückgeführt werden kann: wenn in den rechtwinkligen Dreiecken *ΑΒΓ* und *ΑΒΔ* die Kathete *ΑΒ* gemeinsam und die Kathete $B\Gamma > B\Delta$ ist (Fig. 2), so ist

$$a)\ \frac{\angle A\Delta B}{\angle A\Gamma B} > \frac{A\Gamma}{A\Delta}, \quad \text{und } b)\ \frac{\angle A\Delta B}{\angle A\Gamma B} < \frac{\Gamma B}{\Delta B}.$$

Den bei Archimedes fehlenden Beweis hat Commandino in seiner lateinischen Bearbeitung von Archimedis opera, Venetiis 1558, fol. 62 (vgl. Heiberg Quaest. Archimedeae, Kopenhagen 1879, S. 204 f.) nach geometrischer Methode ergänzt und Nizze in seiner Uebersetzung des Archim. S. 214 f. auf die trigonometrische Form zurückgeführt, wonach, wenn $\angle\alpha > \angle\beta$ ist, $\frac{\text{tang}.\alpha}{\text{tang}.\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}$ ist. Der soeben unter *b*) angeführte zweite Teil des Archimedischen Satzes erscheint als ein besonderes Lemma beim Scholiasten zur Sphärik des Theodosios (herausg. von Hultsch in den Abhandl. der Leipziger Gesellsch. der Wissensch., philol.-histor. Cl., X, 1887, S. 440 f.) und zwar in angewandter Form: *ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΑΔ* (nämlich bis zur Kathete *ΒΓ*)· *δεῖξαι*

$$\frac{HE}{\Theta E} > \frac{\angle HBE}{\angle \Theta BE}, \text{ mithin nach Construction}$$

$$\frac{HE}{\Theta E} > \frac{15}{2}.$$

(B) Nach Construction ist $BZ^2 = 2BE^2$. Es ist aber (nach Eukl. Elem. VI, 3)

$BZ : BE = ZH : HE$, mithin auch (Elem. VI, 22)

$ZH^2 = 2HE^2$, und

$ZH = \sqrt{2}\,HE$. Da nun $\sqrt{2} > \sqrt{\frac{50-1}{25}}$ ist, so ist

---

ὅτι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΓΒ, und hierzu ist ein Beweis hinzugefügt, der, wenigstens im Sinne altgriechischer Mathematik, eleganter verläuft als jener von Commandino. Außerdem ist der von Archimedes angeführte Satz frühzeitig dahin ergänzt worden, daß unter denselben Voraussetzungen, wie vorher, auch $\frac{\angle \Gamma A B}{\angle \Delta A B} < \frac{\Gamma B}{\Delta B}$ ist. Hierzu ist die allgemeine Fassung uns nicht überliefert; sie ist darauf hinausgegangen, daß, wenn zwei rechtwinklige Dreiecke eine Kathete gleich, die andere aber ungleich haben, der der größeren Kathete gegenüberliegende Winkel zu dem der kleineren Kathete gegenüberliegenden in einem kleineren Verhältnis steht, als die größere Kathete zur kleineren. Auf diesem Satze hat Aristarch an der obigen Stelle gefußt. Er lautet in angewandter Form beim Scholiasten zu Pappos (Pappi collectio ed. Hultsch vol. III p. 1167): ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΚΗ, ὀρθὴ δὲ ἡ Κ γωνία, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΗΜ εὐθεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΚ πρὸς ΚΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΜΗΚ, und ähnlich bei Zenodoros im Commentar des Theon zu Ptolem. Synt. I p. 34 f. Halma. Der Beweis findet sich nicht nur beim Scholiasten zu Pappos und bei Zenodoros a. a. O., sondern auch beim Anonym. de fig. isoperim. (Pappi collect. ed. Hultsch vol. III p. 1142). Auf diesen Satz verweist Pappos V, 1 (p. 310, 5), d. i. an der Stelle, zu welcher das eben angeführte Scholion beigefügt ist, mit den Worten: τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικὰ λήμμασιν δέδεικται. Andere λήμματα σφαιρικῶν führt er p. 338, 13 und 1052, 2 an. Schon vor Theodosios aber hat es ein älteres Lehrbuch der Sphärik gegeben, welches sich zurück bis in das 4. Jahrh. v. Chr. verfolgen läßt. Spätestens zu Ende des 4. Jahrh. ist dann auch die Sammlung von λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά veranstaltet worden, in welcher Aristarch, Archimedes, Zenodoros, Theodosios und Spätere die oben angeführten Hülfssätze vorgefunden haben. Die Bekanntschaft mit diesen Sätzen wurde bei allen der Mathematik Beflissenen ebenso vorausgesetzt wie die Kenntnis der Elemente der Planimetrie, Stereometrie und Sphärik nach den Lehrbüchern des Euklid und Theodosios, bez. in früheren Zeiten nach älteren Lehrbüchern, welche dann von Euklid und Theodosios in ihre Elementarbücher eingearbeitet wurden. Vgl. Hultsch zu Pappos vol. III p. 1234 f., dens. in Fleckeisens Jahrb. 1883 S. 415 f. und in den Berichten der Leipziger Gesellsch. der Wissensch., philol.-hist. Cl., 1885 S. 170 ff., 1886 S. 127 f. 129 ff.

$ZH : HE > 7 : 5$, mithin auch [1])

$\frac{ZH + HE}{HE} > \frac{7+5}{5}$, d. i.

$\frac{ZE}{HE} > \frac{12}{5}$.

(C) Nun werden die Resultate

$$\text{(B)}\ \frac{ZE}{HE} > \frac{12}{5},\ \text{d. i.} > \frac{36}{15},\ \text{und}$$

$$\text{(A)}\ \frac{HE}{\Theta E} > \frac{15}{2}$$

nach der Formel δι' ἴσου [2]) verbunden zu

$$\frac{ZE}{\Theta E} > \frac{36}{2},\ \text{d. i.} > 18.$$

Da nun $ZE = BE$, und $B\Theta > BE$ ist, so ist um so mehr

$$\frac{B\Theta}{\Theta E} > 18.$$

Also ist auch schließlich, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $B\Theta E$ und $AB\Gamma$,

$$\frac{AB}{B\Gamma} > 18.$$

Hierauf folgt der zweite Teil des Beweises, der es nur mit Verhältnissen von Winkeln, Kreisbögen und Sehnen zu thun hat. Auf diesem Wege wird erwiesen

$$\frac{AB}{B\Gamma} < 20.$$

---

1) Diese Folgerung bezeichnet Aristarch kurz mit συνθέντι. Was σύνθεσις λόγου bedeute, erklärt Euklid Elem. V def. 14. Der von Aristarch hier angewendete Hülfssatz ist von Pappos Synag. VII, 3 bewiesen.

2) Nach Eukl. Elem. V def. 17 ist, wenn $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, und $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$ gesetzt wird, auch $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$. Daß auch, wenn $\frac{a}{b} < \frac{d}{e}$, und $\frac{b}{c} < \frac{e}{f}$ gesetzt wird, $\frac{a}{c} < \frac{d}{f}$ ist, beweist Pappos Synag. III, 3. 4. Hiernach läßt sich der entsprechende Beweis für $\frac{a}{c} > \frac{d}{f}$, welchen Aristarch als anderswo erledigt bei Seite läßt, leicht ergänzen.

Wie eng Archimedes im ersten Teile seiner Beweisführung zur 3. Propos. der Kreismessung an den hier dargestellten ersten Teil des Aristarchischen Beweises sich angeschlossen hat, wird später sich zeigen. Er erhebt sich aber über seinen Vorgänger dadurch, daß er für $\sqrt{3}$ eine weit genauere Begrenzung wählte als jener für $\sqrt{2}$. Doch ist Aristarch deshalb nicht etwa zu tadeln. Er war sich bewußt, daß sein Beweis zwar formell unanfechtbar, aber seine Voraussetzungen, soweit sie auf astronomischen Beobachtungen beruhten, mit Fehlern behaftet seien; deshalb begnügte er sich damit das Verhältniß $AB : B\Gamma$ zwischen die Grenzen 20 und 18 einzuschließen. Um aber zu erweisen, daß $\frac{AB}{B\Gamma} > 18$ ist, reichte die Begrenzung $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$ vollkommen aus.

III.

Indem wir nun von $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ übergehen, haben wir es zunächst mit Theodoros, dem Lehrer Platons, zu thun. Dem Wortlaute der bereits erwähnten Stelle des Theaetet (p. 147D) fügen wir eine dem heutigen Sprachgebrauche möglichst angepaßte Uebersetzung bei:

Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε[1],	Die Quadratwerte verdeutlichte uns Theodoros durch (geometrische) Zeichnun-

1) Nicht ohne Absicht hat Platon *ἔγραφε* als Hauptverbum und dazu *ἀποφαίνων* als Nebenhandlung gesetzt. Durch *γράφειν* wird nicht etwa bloß das Zeichnen von Quadraten von 3, 5 u. s. w. Flächeneinheiten, sondern die ganze, und zwar in diesem Falle ziemlich complicierte Anlage der verschiedenen Figuren bezeichnet, mit deren Hülfe die Beweise, daß $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ u. s. w. zu 1 incommensurabel sind, geführt wurden. Das galt nach dem Berichte Platons als die Hauptsache. Die dann folgende Demonstration (*ἀποφαίνειν*) nach der umständlichen Methode, welche wir nach den ältesten, voreuklidischen Bestandteilen der Elemente annähernd uns vorstellen können, tritt bei unserm Berichterstatter als mehr nebensächlich zurück. So erklärt sich auch die von Heiberg bei Archimedes aren. p. 244, 9 hergestellte Lesart: *Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑποθεσίων τινῶν ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου.* Hier ist von den Hypothesen die Rede, durch welche Aristarch sein heliocentrisches System darstellte. Aber nicht allein die Hypothesen hatte er ausgesprochen, sondern sie auch durch geometrische Darstellungen, soweit als möglich, begründet. Das sind die *ὑποθεσίων γραφαί* bei Archimedes, und diese Bezeichnung ist so treffend, daß man wohl annehmen darf, schon Aristarch selbst habe seine Schrift so betitelt. Vgl. bei Pappos V p. 284, 24: (*τὸ πρόβλημα*) *δέδεικται μὲν ὑπὸ τῶν νεωτέρων, γραφήσεται δὲ καὶ ὑφ' ἡμῶν διχῶς*, VII p. 638, 11: (*τὸ θεώρημα*) *γραφόμενόν ἐστιν*, d. h. beruht auf einer linearen Darstellung (mit welcher bereits das Hauptsäch-

τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων, ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.

gen, indem er nachwies, daß die Seiten der Quadrate im Betrage von 3 und 5 Quadratfuß incommensurabel sind zu 1 Längenfuß (wörtlich „zur Seite des Quadrates im Betrage eines Quadratfußes"). Weiter stellte er sich die gleiche Aufgabe für jedes der folgenden Quadrate bis zu demjenigen im Betrage von 17 Quadratfuß, über welches er (mit seinen Beweisführungen) nicht hinausging.

Theodoros hat also die Wurzeln aus 3, 5 u. s. w. bis 17 geometrisch dargestellt und nachgewiesen, daß sie incommensurabel zu 1, mithin auch incommensurabel zu jeder rationalen Zahl, mit einem Worte, daß sie irrational sind. Daß von dieser Reihe $\sqrt{4}$ ausgeschlossen war, geht aus den Worten Platons hervor. Dasselbe gilt selbstverständlich auch von $\sqrt{9}$ und $\sqrt{16}$, und weil es selbstverständlich ist, hat Platon die Ausschließung dieser Wurzelwerte nicht besonders erwähnt.

Es ist nun zu untersuchen, ob etwa die von Theodoros entworfenen Zeichnungen wenigstens zum Teil sich wiederherstellen lassen. Zunächst ist an jene zusammenhängende Darstellung zu erinnern, welche von dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgeht (Fig. 3). Indem jede der Katheten $= 1$ gesetzt wird, erhält die Hypotenuse den Wert $\sqrt{2}$. An diese wird eine Kathete wieder $= 1$ angelegt und die Hypotenuse $= \sqrt{3}$ gezogen und so fort, sodaß jede nächste Hypotenuse die Wurzel aus der nächstfolgenden Zahl darstellt. Das erscheint uns Neueren mit Recht als das geeignetste Verfahren die Reihe der Wurzeln aller ganzen Zahlen geometrisch zu versinnbildlichen; allein für die ersten Anfänge der griechischen Lehre von den Wurzeln dürfen wir solche allgemeine Anschauungen schlechterdings nicht voraussetzen [1].

---

liche des Beweises gegeben ist). Auch VII p. 650, 1—3: *τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι — δευτέρας γραφὰς — παρατεθείκασιν* erinnert an diesen Sprachgebrauch.

1) Daß alle griechische Geometrie mit der Setzung specieller Fälle und mit Einzelbeweisen begonnen hat, ist von Cantor u. a. mehrmals gelegentlich bemerkt worden, verdient aber noch eine besondere, zusammenhängende Untersuchung. Nur ganz allmählich hat man auch zu allgemeineren Anschauungen sich erhoben. Um nur ein Beispiel anzuführen, so finden wir bei Archimedes im I. Buche über Kugel und Cylinder den Satz: „Die Oberfläche eines Kugelsegmentes ist gleich einem Kreise, der zum Halbmesser die Sehne vom Pole des Segmentes bis zur Peripherie des Grundkreises hat", in drei Teile gespal-

Platon sagt ausdrücklich, daß Theodoros jedes Quadrat mit seiner irrationalen Seite für sich betrachtete: *κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος*. Es bedurfte also nicht bloß einer besondern graphischen Darstellung für jede einzelne Wurzel, sondern dazu auch anderer Figuren und umständlicher Beweisführungen, um die Irrationalität einer jeden Wurzel außer Zweifel zu stellen. So erklärt es sich auch, daß Theodoros nicht über die *ἑπτακαιδεκάπους δύναμις* und deren Wurzel hinausging: *ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο*. Hätte er einen allgemeinen Abschluß seiner Beweisführungen gefunden, so würde Platon hier einen andern Ausdruck gewählt haben. So aber deutet *ἐνέσχετο* und besonders das beigefügte *πως* genugsam an, daß ein rationell mathematischer Grund nicht vorlag, um gerade bis $\sqrt{17}$ und nicht weiter zu gehen. Es war ein langwieriger und mühsamer Weg gewesen. Wäre er auf derselben Bahn noch weiter fortgeschritten, so würde die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt die Wurzeln aus ganzen, nicht quadratischen Zahlen irrational sind, nicht wesentlich erhöht worden sein. Also wurde schon hier, nicht allzufern vom Ausgangspunkte, Halt gemacht; mochten dann andere, wenn sie noch weiter gehen wollten, nach den erteilten Weisungen auf demselben Wege fortschreiten.

Wir haben nun nach den möglichst einfachen Darstellungen der Wurzeln aus 3, 5 u. s. w. bis 17 zu suchen. Ohne Zweifel haben allenthalben rechtwinklige Dreiecke zu Grunde gelegen, und zwar sind zunächst solche gewählt worden, bei denen aus zwei rationalen Seiten die dritte irrationale unmittelbar nach dem Pythagoreischen Lehrsatze sich ergab. Zugleich war noch eine andere Rücksicht maßgebend. Da über jeder, eine irrationale Wurzel darstellenden Seite auch das Quadrat, d. i. nach Theodoros die *τρίπους δύναμις*, *πεντέπους δύναμις* u. s. w. construiert wurde, so mußte es unmittelbar aus der Figur ersichtlich sein, daß jedes dieser Quadrate ein Soundsovielfaches der *ποδιαία δύναμις*, d. i. der Flächeneinheit, ist. Das war aber nur möglich, wenn diejenige Seite, an welche das Einheitsquadrat sich anlehnte, entweder selbst die Längeneinheit oder ein Vielfaches derselben war. Nach solchen Erwägungen sind die folgenden Constructionen, und zwar

---

ten, und zwar handelt Satz 42 (nach der Zählung von Heiberg = 48 Torelli) von dem Segmente, welches kleiner, und Satz 43 (= 49) von dem Segmente, welches größer als eine Halbkugel ist. Der Satz für die Halbkugel selbst findet sich nirgends ausgesprochen; er ist aus Propos. 33 (= 35) zu entnehmen: s. Hultsch zu Pappos Synag. V p. 383. 387. Die allgemeine Fassung des Satzes und die entsprechende Beweisführung hat erst um reichlich 5 Jahrhunderte nach Archimedes Pappos V Propos. 28 (vgl. mit p. 362, 17—21) aufgestellt.

allmählich vom Einfacheren und Leichteren zu dem Schwierigeren fortschreitend, entworfen worden.

Pythagoras war, um eine Annäherung für $\sqrt{2}$ zu finden, von dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgegangen. Für $\sqrt{3}$ läßt sich keine einfachere Darstellung denken als die am gleichseitigen Dreiecke mit der eine Seite halbierenden Normale. So hat es Archimedes gehalten, so gewiß schon vor ihm Theodoros. Indem wir uns an die Redeweise des letzteren anschließen, setzen wir seine *μήκει ποδιαία δύναμις*, d. i. den Längenfuß (im Gegensatze zum Quadratfuß), als Längeneinheit, und zwar bei der hier vorliegenden Aufgabe als halbe Seite des gleichseitigen Dreieckes, und finden demnach in Fig. 4 die *ποδιαία* und *τρίπους δύναμις* durch die Quadrate über $B\Gamma$ und $A\Gamma$, und $\sqrt{3}$ durch die Seite $A\Gamma$ dargestellt.

Um $\sqrt{5}$ darzustellen wurde die eine Kathete des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes um 1 Längeneinheit verlängert. Die Hypotenuse ergab dann $\sqrt{5}$, und das Quadrat über dieser Hypotenuse stellte die von Platon erwähnte *πεντέπους δύναμις* dar (Fig. 5).

Diese beiden, hier wiederhergestellten Figuren verdeutlichen zugleich die Methode des Theodoros, seine Quadrate sowohl als deren Seiten auf die Einheit zurückzuführen: *τῆς τε τρίποδος πέρι (δυνάμεως) καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων, ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ.* Das Quadrat über $A\Gamma$ in Figur 4, und das über AB in Fig. 5 sind bestimmte Vielfache des Quadrates über $B\Gamma$, d. i. der Flächeneinheit; allein die Seiten jener Quadrate sind (wie noch zu erweisen ist) nicht commensurabel zur Seite $B\Gamma$, d. i. zur Längeneinheit. Demnach ist anzunehmen, daß auch die übrigen, von Theodoros construierten Quadrate und Wurzeln zu der Flächen- und Längeneinheit in leicht erkennbare Beziehungen gebracht worden sind.

Wir setzen also fernerhin die Kathete $B\Gamma$ als Längeneinheit und den Winkel bei Γ als rechten. Nun ziehen wir nach einander

a) die Kathete $A\Gamma = 3\,B\Gamma$
b) „ „ „ $= 4\,B\Gamma$
c) die Hypotenuse $AB = 3\,B\Gamma$
d) „ „ „ $= 4\,B\Gamma$,

und erhalten so vier verschiedene rechtwinklige Dreiecke $AB\Gamma$, die wir kurz mit *a, b, c, d* bezeichnen und deren Katheten $B\Gamma$ gleichmäßig die Seite der *ποδιαία δύναμις* des Theodoros darstellen. Hiernach ergeben sich

im Dreieck a die Hypotenuse	$= \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$
„ „ b „ „	$= \sqrt{4^2+1} = \sqrt{17}$
„ „ c die größere Kathete	$= \sqrt{3^2-1} = \sqrt{8}$
„ „ d „ „ „	$= \sqrt{4^2-1} = \sqrt{15}.$

Betreffs $\sqrt{8}$ möge nicht unbemerkt bleiben, daß sie auch als Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten je = 2 gesetzt waren, construiert werden konnte. Allein weshalb hätte Theodoros von der eben aufgestellten Reihe, welche gleichmäßig auf der *ποδιαία δύναμις* als dem Quadrate der kleineren Kathete aufgebaut ist, in diesem einen Falle abweichen sollen, um eine weniger evidente Construction zu wählen?

Ueber jeder Seite, welche eine von den ebenerwähnten Wurzeln darstellte, hat Theodoros das Quadrat errichtet. Die Benennung *ἑπτακαιδεκάπους δύναμις* für das Quadrat von 17 Flächeneinheiten hat Platon uns überliefert; außerdem aber geht aus seinem, leider so kurzen Berichte, insbesondere aus den Worten *κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος*, hervor, daß Theodoros auch die Ausdrücke *δεκάπους*, *ὀκτάπους*, *πεντεκαιδεκάπους δύναμις* gebraucht hat.

Somit sind nach den Spuren der Platonischen Ueberlieferung sechs unter den von Theodoros behandelten Wurzeln in der denkbar einfachsten Weise so wiederhergestellt worden, daß in sechs rechtwinkligen Dreiecken die kleinere Kathete gleichmäßig als Längeneinheit, und teils die größere Kathete teils die Hypotenuse der Reihe nach zu 2, 3, 4 Längeneinheiten gesetzt wurden.

Unter den noch übrigen sechs Wurzeln ist zunächst $\sqrt{13}$ hervorzuheben, weil ihr Radicandus die Summen der Quadrate von 2 und 3 darstellt. Auch hier konnten also zwei rationale Zahlen als Dreiecksseiten gesetzt werden, um danach die dritte, irrationale Seite zu construieren (Fig. 6). Indem wir hier, und so auch im Folgenden, die Längeneinheit gleichwie vorher mit $B\Gamma$ bezeichnen, erhalten wir in dem rechtwinkligen Dreieck $A\Delta\Gamma$, dessen Seiten $\Delta\Gamma = 2\,B\Gamma$, und $A\Gamma = 3\,B\Gamma$ gesetzt sind,

$$A\Delta = \sqrt{13}.$$

Das Quadrat über $A\Delta$ hat Theodoros *τρεισκαιδεκάπους δύναμις* benannt. Nach Ausweis der Construction war die *ποδιαία δύναμις* in dem Quadrat über $\Delta\Gamma$ 4 mal, in dem Quadrat über $A\Gamma$ 9 mal, mithin in dem Quadrat über $A\Delta$ 13 mal enthalten.

Um zu den noch übrigen fünf Wurzeln zu gelangen, war es nicht mehr möglich zwei Seiten als Vielfache der Längeneinheit

zu construieren; es steht aber wohl außer Zweifel, daß Theodoros keine Construction zugelassen hat, bei welcher nicht wenigstens eine Seite rational und ein Vielfaches der Längeneinheit war. Die Versuche, $\sqrt{6}$ als Hypotenuse zu den Katheten $\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$, und ähnlich $\sqrt{12}$ und $\sqrt{14}$ darzustellen, sind von vornherein abzuweisen.

Kehren wir aber zu jenem Dreieck $AB\Gamma$ zurück, dessen Hypotenuse $AB = 2B\Gamma$ gesetzt war, sodaß sich für $A\Gamma$ der Wert $\sqrt{3}$ ergab (Fig. 4), so brauchen wir nur $\Gamma\Delta = 2\Gamma B$ zu ziehen, um nach Ausweis von Figur 7 die *ἑπτάποvς δύναμις* des Theodoros und $A\Delta = \sqrt{7}$ zu erhalten.

Wenn ferner $\Gamma\Delta = 3\Gamma B$ gezogen wurde, die übrigen Voraussetzungen aber blieben, so war die Construction der *δωδεκάποvς δύναμις* gegeben und die Hypotenuse $A\Delta = \sqrt{12}$ nachgewiesen.

Es sind nun noch $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{14}$ übrig. Ihre Radicanden haben das Gemeinsame, daß sie sich auf die Form $a^2 \pm 2$ zurückführen lassen. Wie wir also vorher von dem Dreiecke ausgingen, dessen eine Seite $= \sqrt{3}$ war, so werden wir hier wahrscheinlich zu dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke zurückkehren müssen, an welchem Pythagoras $\sqrt{2}$ demonstriert hatte. Hieraus entwickeln sich folgende Constructionen.

Wurde an das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck $A\Gamma B$ ein anderes rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete AB und der größeren Kathete $B\Delta = 2B\Gamma$ angelegt (Fig. 8), so stellte das Quadrat über $A\Delta$ die *ἑξάποvς δύναμις* des Theodoros dar und es war die Hypotenuse $A\Delta = \sqrt{2^2+2} = \sqrt{6}$ nachgewiesen.

Wurde, während die übrigen Voraussetzungen blieben, $B\Delta = 3B\Gamma$ gezogen, so stellte das Quadrat über $A\Delta$ die *ἑνδεκάποvς δύναμις* dar und es war die Hypotenuse $A\Delta = \sqrt{3^2+2} = \sqrt{11}$ nachgewiesen.

Wurde endlich ein Dreieck $AB\Delta$ mit der Hypotenuse $A\Delta = 4B\Gamma$ construiert, so stellte das Quadrat über $B\Delta$ die *τεσσαρεσκαιδεκάποvς δύναμις* dar und es war die Kathete $B\Delta = \sqrt{4^2-2} = \sqrt{14}$ nachgewiesen.

Mit allen diesen Constructionen war nun freilich das *γράφειν* in dem Sinne, wie Platon berichtet, noch keineswegs abgethan. Es mußten noch andere Figuren hinzukommen, an denen sich nachweisen ließ, daß in der That jede der als Quadratseiten dargestellten Wurzeln irrational ist. Ueber das Nähere schweigt Platon; es ist uns aber doch wenigstens ein Hinweis erhalten, aus welchem eine wichtige Folgerung entnommen werden kann. Ganz auffälliger Weise sind nämlich zu *δύναμις* die Epitheta *τρίποvς*,

πεντέποντος, *ἑπτακαιδεκάποντος* gefügt worden. Kein anderer Mathematiker Griechenlands hat je bei allgemeinen geometrischen Beweisen nach dem Fußmaß gerechnet. Es muß also für Theodoros ein triftiger Grund vorgelegen haben, von dem sonstigen Gebrauche abzuweichen. Im Grunde war es die gute Pythagoreische Tradition, nach welcher der arithmetische Beweis noch eine ebenbürtige Stellung neben dem geometrischen einnahm, eine Tradition, welche erst durch die einseitig geometrische Richtung der Euklidischen Elemente verdrängt worden ist.

Um mit der *τρίπους δύναμις* des Theodoros zu beginnen, so liegt darin erstens die Andeutung, daß er zu seinem Quadrate im Betrag von 3 bestimmten Flächeneinheiten gewisse Beträge von Längeneinheiten für die Seite finden wollte, zweitens, daß zu diesem Zwecke Ausrechnungen, also arithmetische Operationen angestellt werden sollten, drittens, daß die Flächeneinheit und die Längeneinheit gerade so wie das griechische Fußmaß in Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel geteilt werden sollten [1]). Und wie Pythagoras, um sich der $\sqrt{2}$ zu nähern, $2 = \frac{50}{25}$ gesetzt hatte, so ging nun Theodoros von der Identität $3 = \frac{48}{16}$ aus. Daraus ergab sich unmittelbar die erste Annäherung $\sqrt{3} < \sqrt{\frac{48+1}{16}}$, d.i. $< \frac{7}{4}$.

Um jedoch genauere Werte zu finden, galt es zunächst $\sqrt{48}$ zu untersuchen; denn jeder hier ermittelte Wert brauchte nur durch 4 geteilt zu werden, um für $\sqrt{3}$ zu gelten. Offenbar ist die erste Annäherung für $\sqrt{48}$ gerade so aufgefunden worden, wie nach den Andeutungen Platons die Pythagoreische Näherung für $\sqrt{50}$. Die Aufgabe $\sqrt{48}$ zu finden, wurde formuliert zu der identischen Aufgabe, $\sqrt{49-1}$ zu finden, und nun ergab sich sofort nach der oben (S. 370) erwähnten Formel, daß zwar nicht aus $49-1$, wohl aber aus $49-1+(\frac{1}{14})^2$ die genaue Wurzel, nämlich $7-\frac{1}{14}$ gezogen werden konnte. Es war mithin die Annäherung $\sqrt{48} < 7-\frac{1}{14}$ gefunden.

Letzterer Wert mußte nun zu einem unechten Bruche eingerichtet, dieser durch 4 dividiert und das Resultat zu einer ge-

---

1) Ueber die Einteilung des Fußes in 2 *ἡμιπόδια* (oder bei Heron *διχάδες*), 4 *παλαισταί*, 8 *κόνδυλοι*, 16 *δάκτυλοι* vgl. Hultsch Griech. und römische Metrologie [2] S. 34 f. Natürlich ist dem Theodoros nicht unbekannt gewesen, daß, wenn der Längenfuß 16 Daktylen enthielt, dem Quadratfuß 16^2 Quadratdaktylen zukamen. Allein auch bei der Längeneinheit brauchte die Teilung nicht bei den Daktylen oder Sechzehnteln stehen zu bleiben; war es doch gestattet auch den Daktylos in Hälften, Viertel, Achtel u. s. w. zu zerlegen, mithin auf Zweiunddreißigstel, Vierundsechzigstel u. s. w. der Längeneinheit zu kommen.

mischten Zahl von der Form $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ umgewandelt werden[1]). Da nun $\frac{7 - \frac{1}{14}}{4} = \frac{97}{4 \cdot 14}$ ist, so ist anzunehmen, daß Theodoros seine Stammbruchreihe mindestens bis zu dem Nenner $4 \cdot 16 = 2^6$ fortgeführt hat. Während also in erster Annäherung (S. 382) $1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} > \sqrt{3}$ gefunden worden war, erhielt er nun

$$1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}\,\tfrac{1}{32}\,\tfrac{1}{64} > \sqrt{3},$$

und konnte durch eine elementare, freilich in der Form ziemlich umständliche Ausrechnung sich überzeugen, daß er nur das letzte Glied dieser Reihe wegzulassen brauchte, um zu der anderen Begrenzung

$$\sqrt{3} > 1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}\,\tfrac{1}{32}$$

zu gelangen[2]).

Nun konnte eine besondere Eigenschaft der binären Brüche dazu benutzt werden, um wenigstens noch einen Schritt weiter zu gehen. Denn wenn, verglichen mit $\sqrt{3}$, die Summe der einen von

1) Selbstverständlich ist hierbei vorausgesetzt, daß beliebige Glieder dieser Bruchreihe (das zu Anfang stehende Ganze bleibt hier außer Betracht), wenn die Ausrechnung darauf führt, auch wegfallen können. So war gleich in dem obigen Falle aus der ersten Annäherung $1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ der genauere Wert zu entwickeln durch Tilgung des Gliedes $\frac{1}{4}$ und Ersatz desselben durch $\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}$ u. s. w. [In moderner Bezeichnung würde, laut freundlicher Mitteilung von Dr. Franz Rietzsch, die Reihe durch $\frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^3} + \ldots$ zu geben sein, wobei x entweder 0 oder 1, aber keine andere Zahl bedeutet und auch der Fall, daß alle $x = 0$ seien, ausgeschlossen ist]. Da ein Mißverständnis nicht zu befürchten ist, habe ich oben nur beim ersten Male die Pluszeichen gesetzt, dann aber im Einklang mit der Schreibweise der alten Mathematiker (die wir ja bei den gewöhnlichen gemischten Zahlen, wie $1\frac{1}{2}$, $10\frac{2}{3}$ u. s. w., allgemein nachahmen) die Reihe der binären Brüche lediglich durch Juxtaposition bezeichnet.

2) Daß diese beiden Grenzen nur eine entfernte Annäherung darstellten, zeigt die Umrechnung zu Decimalzahlen: $1{,}7344 > 1{,}73205 > 1{,}7188$, d. h. es war $\sqrt{3}$, wenn wir das arithmetische Mittel aus den Grenzwerten ziehen, nur auf die drei Stellen 1,73 annähernd bestimmt. — Nach der Methode der altgriechischen Arithmetik mußte Theodoros bei der Ausrechnung auf die Quadrate zurückgehen. So erhielt er $\left(\frac{111}{64}\right)^2 = \frac{12321}{4096}$ und $\left(\frac{55}{32}\right)^2 = \frac{3025}{1024}$, und schloß daraus (da $3 = \frac{12288}{4096} = \frac{3072}{1024}$ ist), daß $\left(\frac{111}{64}\right)^2 > 3 > \left(\frac{55}{32}\right)^2$, mithin

$$\frac{111}{64} > \sqrt{3} > \frac{55}{32}$$

ist.

den beiden eben angeführten Reihen zu groß und die Summe der anderen zu klein war, so war zu versuchen, wie zu $\sqrt{3}$ die Summe einer dritten Reihe sich verhielt, welche um $\frac{1}{2\cdot 64}$ kleiner als die erste und um denselben Betrag größer als die zweite Reihe war. Durch Ausrechnung würde sich dann ergeben haben, daß

$$\sqrt{3} > 1\, \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{8}\, \tfrac{1}{16}\, \tfrac{1}{32}\, \tfrac{1}{128}$$

ist[1]).

Ob Theodoros diesen Weg betreten hat und vielleicht noch weiter auf demselben fortgeschritten ist (denn wiederum würde er eine noch genauere Begrenzung erhalten haben, wenn er zu der vorigen Reihe $\frac{1}{2\cdot 128}$ hinzugezählt hätte u. s. w.), bleibt im Ungewissen; jedenfalls bürgt uns das Platonische *ἀποφαίνων* dafür, daß er zwei Grenzen für $\sqrt{3}$ gesetzt und dann gezeigt hat, wie man diese Grenzen immer enger ziehen könne, ohne jedoch dazwischen je einen rationalen Zahlenwert auffinden zu können, dessen Quadrat $= 3$ sein würde.

Die geometrische Darlegung, denn auch eine solche müssen wir annehmen, ist offenbar von dem Quadrat über 7 ausgegangen. Auf einer Seite desselben wurde die Länge $\sqrt{48}$ (nachdem dieselbe als größere Kathete des rechtwinkligen Dreieckes mit der kleineren Kathete 1 und der Hypotenuse 7 construiert war) eingetragen und das Quadrat über $\sqrt{48}$ in das Quadrat über 7 eingeschrieben. Somit war der Unterschied zwischen den Quadraten von 49 und 48 Flächeneinheiten in Form eines Gnomon (S. 371) geometrisch dargestellt. Wie dann weiter construiert und wie der Beweis geführt wurde, darüber dürfen wir ebensowenig Vermutungen aufstellen, wie betreffs des arithmetischen Beweises; aber daß dem Theodoros nach dem damaligen Stande des mathematischen Wissens eine ausreichende Begründung, und zwar in letzter Instanz durch apagogische Beweise, zu Gebote gestanden hat, ist nicht zu bezweifeln.

Nachdem $\sqrt{3}$ von Theodoros erschöpfend behandelt war, konnten die folgenden Wurzeln, unter Berufung auf das vorher Erwiesene, bei weitem kürzer erledigt werden.

IV.

Eine lange Zeit nach Theodoros scheint die Lehre von den Quadratwurzeln wenig gefördert worden zu sein. Denn um mehr als ein Jahrhundert später hat Aristarch, wie wir sahen, für $\sqrt{2}$ nur die allererste, noch sehr ungenaue Annäherung, welche auf

---

1) Das ist in Decimalzahlen $1{,}73205 > 1{,}7266$.

Pythagoras zurückging, wieder aufgegriffen. Da auf einmal überrascht uns Aristarchs jüngerer Zeitgenosse Archimedes in seiner Kreismessung [1]) mit dem fertigen Resultate

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

ohne auch nur mit einer Silbe anzudeuten, nach welchen Voraussetzungen er diese Werte ausgerechnet hat [2]).

Um die Lösung des Räthsels vorzubereiten ist es nötig den ganzen Beweis des 3. Satzes der Kreismessung derartig zu ergänzen, daß die von Archimedes weggelassenen Zwischenglieder seiner Schlußfolgerungen je an Ort und Stelle eingefügt werden [3]). Statt der Proportionen des griechischen Textes wird allenthalben die Form von Brüchen angewendet und dadurch der Ueberblick über das Einzelne wie über das Ganze erleichtert werden. Die Ergänzungen geben wir durch Cursivschrift, bez. durch kleine griechische Buchstaben, während gerade Schrift und griechische Anfangsbuchstaben dem Wortlaute des griechischen Textes entsprechen. Um später möglichst kurz und deutlich citieren zu können, versehen wir die beiden Hauptteile des Beweises mit entsprechenden Ueberschriften.

Der dritte Satz der Kreismessung geht bekanntlich darauf hinaus, daß

---

1) Archimedis opera ed. Heiberg vol. I p. 266, 20 f. und 264, 4 f. Vgl. unten S. 389 f. 386.

2) Auch die Commentare des Eutokios (III p. 268 ff. Heiberg) geben hierüber keine Auskunft. Eutokios weiß nichts anderes zur Erklärung beizutragen, als daß er die von Archimedes fertig ausgerechneten Wurzeln rückwärts ins Quadrat erhebt und auf die ungefähre Uebereinstimmung jedes Quadrates mit dem Radicandus, aus welchem Archimedes die betreffende Wurzel gezogen hat, hinweist. Vgl. Nesselmann Die Algebra der Griechen S. 108 ff., Heiberg Quaestiones Archim. p. 60 f., Günther Quadratische Irrationalitäten, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. IV S. 12. Einen schüchternen Anlauf zu einer Wurzelausziehung finden wir bei Theo zu Ptolem. Synt. I p. 184 Halma. Unter Berufung auf Eukl. Elem. II, 4 zerlegt er die Zahl 144 in $100 + 44$, zieht aus 100 die Wurzel 10 und zeigt, daß in dem Reste 44 sowohl das Product von $2 \cdot 10$ mit einer gewissen Zahl von Einern, als das Quadrat derselben Einerzahl enthalten sein müsse; beide Bedingungen erfülle die Zahl 2, denn $2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2$ ist $= 44$. Anstatt nun aber die hier angedeutete Regel dazu zu verwenden, um aus dem Radicandus 4500, den er a. a. O. zu behandeln hat, die Ganzen der Wurzel auszuziehen, begnügt er sich mit der Wiederholung des schon bei Ptolem. Synt. I p. 28 Halma vorliegenden Resultates, daß $67^2 = 4489$ die nächste Quadratzahl zu 4500 ist, mithin 67 die Zahl der Ganzen von $\sqrt{4500}$ ist.

3) Eine ähnliche Vervollständigung des Beweises hat bereits Nizze, Archimedes von Syrakus vorhandene Werke u. s. w., S. 111 ff. unternommen. Vgl.

$$3\tfrac{1}{7} > \pi > 3\tfrac{10}{71}$$

ist, wobei π das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet.

Erster Teil des Beweises zu Satz 3 der Kreismessung.

Fig. 9. Es sei ein Kreis mit dem Durchmesser $A\Gamma$, dem Centrum E und der Tangente ΓZ gegeben, und es sei $\angle \Gamma E Z = \frac{1}{3}$ R; also ist

$$\frac{EZ}{Z\Gamma} = 2 = \frac{306}{153}, \text{ und, } \textit{da nach Eukl. Elem. I, 47}$$

$$\varepsilon\gamma^2 = \varepsilon\zeta^2 - \zeta\gamma^2 \textit{ und nach der Construction}$$

$$\varepsilon\zeta = 2\zeta\gamma \textit{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{\varepsilon\gamma^2}{\zeta\gamma^2} = \frac{4\zeta\gamma^2 - \zeta\gamma^2}{\zeta\gamma^2} = 3, \textit{ mithin}$$

$$\frac{\varepsilon\gamma}{\zeta\gamma} = \sqrt{3}. \textit{ Es ist aber auf arithmetischem Wege gefunden worden}$$

$$\sqrt{3} > \frac{265}{153}; \textit{ also ist auch}$$

$$\frac{E\Gamma}{Z\Gamma} > \frac{265}{153} \text{*)}.$$

Nun werde der Winkel $ZE\Gamma$ durch die Gerade EH halbiert; es ist also *nach Eukl. Elem. VI, 3*

---

auch Rudio Archimedes u. s. w., vier Abhandlungen über die Kreismessung, Leipzig 1892, S. 75 ff.

*) Die Kreismessung des Archimedes ist nicht in ihrer ursprünglichen Gestalt, sondern in einer späteren, in den attischen Dialekt umgeformten und auch sachlich zum Teil umgeänderten Bearbeitung auf uns gekommen. Vgl. Heiberg Quaestiones Archimedeae p. 69 ff., Susemihl Geschichte der griech. Litteratur I S. 729. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn gerade in diesem 3. Satze, der von Archimedes in eine so kurze und deshalb schwer verständliche Form gebracht worden war, vielfache Verderbnisse sich finden. Vgl. Heiberg in seiner Ausgabe vol. I p. 265 adn. 2. Statt der p. 264,4 hinter ἡ δὲ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ überlieferten Worte λόγον ἔχει ist vgl. mit p. 264, 9. 12 u. s. w., besonders mit p. 266, 20 f., und nach den Spuren im Codex F, mit Wallis p. 541, 62 zu lesen μείζονα λόγον ἔχει ἤ, wie auch E. Nizze in seiner Uebersetzung (Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet, Stralsund 1824) S. 112 f. durch das Zeichen $>$ andeutet. In der Ausgabe von Heiberg vol. II p. 264 ist beim Druck ein gerade an dieser Stelle recht störendes Versehen untergelaufen; denn die beiden zu „3" beigefügten Anmerkungen gehören vielmehr zu Zeile 4. Dagegen sind in Zeile 3 die Worte ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει ὃν erstens handschriftlich richtig überliefert, zweitens durch mathematische Evidenz gesichert, drittens auch von Wallis nicht abgeändert worden.

$$\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{ZH}{H\Gamma}, \textit{ mithin auch } \sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota \text{ (Elem. V def. 14)}$$

$$\frac{\zeta\varepsilon + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\zeta\eta + \eta\gamma}{\eta\gamma}, \textit{ das ist}$$

$$\frac{\zeta\varepsilon + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\zeta\gamma}{\eta\gamma}; \text{ also ist auch } \dot{\varepsilon}\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi \text{ (Elem. V def. 12)}$$

$$\frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H}.$$

Es war aber $\frac{\zeta\varepsilon}{\zeta\gamma} = \frac{306}{153}$, *und* $\frac{\varepsilon\gamma}{\zeta\gamma} > \frac{265}{153}$; also *ist auch*

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} > \frac{306 + 265}{153}, \text{ d. i. } > \frac{571}{153}.$$

Also ist *auch*

$$\frac{\varepsilon\gamma^2}{\gamma\eta^2} > \frac{571^2}{153^2}, \text{ d. i. } > \frac{326041}{23409};$$

mithin $\sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota$ [1])

$$\frac{\varepsilon\gamma^2 + \gamma\eta^2}{\gamma\eta^2} > \frac{326041 + 23409}{23409}, \text{ d. i. nach Elem. I, 47}$$

$$\frac{EH^2}{\Gamma H^2} > \frac{349450\ ^{*)}}{23409}, \text{ und demnach}$$

$$\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591\frac{1}{8}\ ^{**)}}{153}.$$

Wiederum *werde* der Winkel $HE\Gamma$ halbiert durch die Gerade $E\Theta$; es ist also nach denselben *Schlußfolgerungen wie vorher*

$$\frac{\varepsilon\eta}{\varepsilon\gamma} = \frac{\eta\vartheta}{\gamma\vartheta}, \textit{ mithin auch } \sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota$$

$$\frac{\varepsilon\eta + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\eta\vartheta + \gamma\vartheta}{\gamma\vartheta}, \textit{ das ist}$$

---

1) Archimedes hat hier denselben Hülfssatz wie Aristarchos oben S. 375 (mit Anm. 1) benutzt.

*) Auch hier ist, wie vorher, mit Wallis μείζονα λόγον ἔχει ἤ statt λόγον ἔχει zu lesen.

**) Hinter μήκει ἄρα hat Wallis mit Recht μείζονα ἤ hinzugefügt. Damit diese letzte Schlußfolgerung gelte, muß $591\frac{1}{8} < \sqrt{349450}$ sein. Daß Archimedes in der That so gerechnet hat, wird weiter unten gezeigt werden.

$$\frac{\varepsilon\eta + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\gamma\eta}{\gamma\vartheta},$$ *mithin auch* ἐναλλάξ

$$\frac{\varepsilon\eta + \varepsilon\gamma}{\gamma\eta} = \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\vartheta}.$$

Es war aber $\frac{\varepsilon\eta}{\gamma\eta} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$, *und* $\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\eta} > \frac{571}{153}$; *also ist auch*

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{591\frac{1}{8} + 571}{153}, \text{ d. i. } > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Also ist *auch*

$$\frac{\varepsilon\gamma^2}{\gamma\vartheta^2} > \frac{(1162\frac{1}{8})^2}{153^2}, \text{ d. i. } > \frac{1350534\frac{33}{64}}{23409};$$

mithin συνθέντι

$$\frac{\varepsilon\gamma^2 + \gamma\vartheta^2}{\gamma\vartheta^2} > \frac{1350534\frac{33}{64} + 23409}{23409},$$ *d. i. nach Elem. I, 47*

$$\frac{\varepsilon\vartheta^2}{\gamma\vartheta^2} > \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409},$$ *und demnach*

$$\frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Ferner *werde* der Winkel $\Theta E\Gamma$ halbiert durch die Gerade EK; also ist *nach ähnlichen Schlußfolgerungen, wie vorher*

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}}{153}, \text{ d. i. } > \frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$ *und*

$$\frac{\varepsilon\varkappa^2}{\gamma\varkappa^2} > \frac{(2334\frac{1}{4})^2 + 23409}{23409}, \text{ d. i.}$$

$$> \frac{5448723\frac{1}{16} + 23409}{23409}, \text{ d. i.}$$

$$> \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409},$$ *und* demnach

$$\frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

Ferner *werde* der Winkel $KE\Gamma$ halbiert durch die Gerade $E\Lambda$; also ist *nach ähnlichen Schlußfolgerungen, wie vorher*

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} > \frac{2339\frac{1}{4} + 2334\frac{1}{4}}{153}, \text{ d. i. } > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Weil nun der Winkel $Z E \Gamma = \frac{1}{3}$ R viermal in gleiche Teile zerlegt worden ist, so ist

$$\angle A E \Gamma = \tfrac{1}{48}\,\mathrm{R}.$$

Es werde nun in dem Punkte E der Winkel $\Gamma E M = A E \Gamma$ angelegt; also ist

$$\angle A E M = \tfrac{1}{24}\,\mathrm{R},$$

und es ist daher AM die Seite des um den Kreis geschriebenen Sechundneunzigeckes, mithin U, *d. i. der ganze Umfang dieses Vielecks* $= 96\ \lambda\mu$. Da nun gezeigt wurde, daß $\frac{E\Gamma}{\Gamma\varDelta} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$ ist, und da *nach der Construction* $2\,E\Gamma = A\Gamma$ und $2\,\Gamma\varDelta = AM$ ist, so ist $\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\lambda} = \frac{\alpha\gamma}{\lambda\mu}$, *mithin* $\frac{\alpha\gamma}{96\,\lambda\mu} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \cdot 153}$, *d. i.*

$$\frac{A\Gamma}{U} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}, \text{ mithin umgekehrt}^{1)}\ \frac{U}{\alpha\gamma} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}.$$

Es ist aber $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$, und da $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}$, *d. i.* $< \frac{1}{7}$ ist, so ist

$$\frac{U}{A\Gamma} < 3\tfrac{1}{7}.$$

Also ist um so mehr[2]) das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser, *d. i.*

$$\pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Zweiter Teil des Beweises zu Satz 3 der Kreismessung.

Es sei ein Kreis mit dem Durchmesser $A\Gamma$ gegeben, und es sei $\angle BA\Gamma = \frac{1}{3}$ R; *es ist also nach der Construction* $2\beta\gamma = \alpha\gamma$, *und nach Eukl. Elem. I, 47* Fig. 10.

$$\frac{\alpha\beta^2}{\beta\gamma^2} = \frac{4\beta\gamma^2 - \beta\gamma^2}{\beta\gamma^2} = 3, \text{ mithin}$$

$$\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \sqrt{3}.$$

Es ist aber auf arithmetischem Wege gefunden worden

1) Vgl. Pappos Synag. VII p. 688, 11—19, und unten S. 392 Anm. 1.

2) Daß der Kreisumfang kleiner als der Umfang des umgeschriebenen Vielecks ist, hat Archimedes de sphaera et cyl. I, 1 bewiesen.

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \text{ also ist}$$

$$\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{1351}{780}.$$

Da ferner $2\beta\gamma = \alpha\gamma$ *nachgewiesen wurde, so ist*

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{1560}{780}.$$

Nun werde der Winkel $BA\Gamma$ durch die Gerade AH halbiert. Weil *nach Eukl. Elem. III, 26 auf dem Kreisbogen* $\beta\eta$ $\angle BAH = \angle B\Gamma H$, und *auf den gleichen Kreisbögen* $\beta\eta$, $\eta\gamma$ $\angle BAH = \angle HA\Gamma$, mithin *in den Dreiecken* $\alpha\eta\gamma$, $\gamma\eta\zeta$ $\angle HA\Gamma = \angle H\Gamma Z$, und $\angle \Gamma HA = R$ (*Elem. III, 31*) gemeinsam ist, so ist auch *nach Elem. I, 32* $\angle A\Gamma H = \angle \Gamma ZH$. Also ist $\triangle AH\Gamma \sim \triangle \Gamma HZ$; mithin

$$\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Es ist aber *nach Elem. VI, 3*

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{\alpha\beta}{\beta\zeta}, \text{ mithin auch durch Addition}^{1)}$$

$$= \frac{\alpha\gamma + \alpha\beta}{\gamma\zeta + \beta\zeta}, \text{ d. i.}$$

$$= \frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma}; \text{ also ist auch}$$

$$\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma}.$$

Es war aber $\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} < \frac{1351}{780}$, *und* $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{1560}{780}$; mithin ist

$$\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{1351 + 1560}{780}, \text{ d. i.} < \frac{2911}{780}.$$

Also ist auch

$$\frac{\alpha\eta^2}{\eta\gamma^2} < \frac{2911^2}{780^2}, \text{ d. i.} < \frac{8473921}{608400}; \text{ mithin } \sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\epsilon}\nu\tau\iota$$

$$\frac{\alpha\eta^2 + \eta\gamma^2}{\eta\gamma^2} < \frac{8473921 + 608400}{608400}; \text{ d. i. nach Elem. I, 47}$$

---

1) Dies folgt aus Elem. V, 12. Vgl. Hultsch zu Pappos Synag. vol. I p. XXIII.

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\eta\gamma^2} < \frac{9082321}{608400};$$ *es ist also* auch

$$\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Zweitens werde der Winkel $\Gamma A H$ durch die Gerade $A\Theta$ halbiert; es ist also nach denselben *Schlußfolgerungen*, *wie vorher*

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{3013\frac{3}{4} + 2911}{780},$$ *d. i.*

$$< \frac{5924\frac{3}{4}}{780},$$ *d. i.*, *nachdem Zähler und Nenner* mit 4 multipliciert und durch 13 dividiert *worden sind*,

$$< \frac{1823}{240}.$$

Ferner ist, *ähnlich wie vorher*,

$$\frac{\alpha\vartheta^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{1823^2}{240^2},\ d.\,i. < \frac{3323329}{57600},$$ *und*

$$\frac{\alpha\vartheta^2 + \vartheta\gamma^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{3323329 + 57600}{57600},$$ *d. i.*

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{3380929}{57600};$$ also *auch*

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Drittens werde noch der Winkel $\Gamma A\Theta$ halbiert durch die Gerade AK; es ist also, *ähnlich wie vorher*,

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1838\frac{9}{11} + 1823}{240},$$ *d. i.*

$$< \frac{3661\frac{9}{11}}{240},$$ *d. i.*, *nachdem Zähler und Nenner* mit 11 multipliciert und durch 40 dividiert *worden sind*,

$$< \frac{1007}{66}.$$

Ferner ist, *ähnlich wie vorher*,

$$\frac{\alpha\varkappa^2}{\varkappa\gamma^2} < \frac{1007^2}{66^2},\ d.\,i. < \frac{1014049}{4356},$$ *und*

$$\frac{\alpha\varkappa^2 + \varkappa\gamma^2}{\varkappa\gamma^2} < \frac{1014049 + 4356}{4356},$$ *d. i.*

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \text{ also ist}$$

$$\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{1351}{780}.$$

Da ferner $2\beta\gamma = \alpha\gamma$ *nachgewiesen wurde, so ist*

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{1560}{780}.$$

Nun werde der Winkel $BA\Gamma$ durch die Gerade AH halbiert. Weil *nach Eukl. Elem. III, 26 auf dem Kreisbogen* $\beta\eta$ $\angle BAH = \angle B\Gamma H$, und *auf den gleichen Kreisbögen* $\beta\eta$, $\eta\gamma$ $\angle BAH = \angle HA\Gamma$, mithin *in den Dreiecken* $\alpha\eta\gamma$, $\gamma\eta\zeta$ $\angle HA\Gamma = \angle H\Gamma Z$, und $\angle \Gamma HA = R$ (*Elem. III, 31*) gemeinsam ist, so ist auch *nach Elem. I, 32* $\angle A\Gamma H \doteq \angle \Gamma ZH$. Also ist $\triangle AH\Gamma \sim \triangle \Gamma HZ$; mithin

$$\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Es ist aber *nach Elem. VI, 3*

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{\alpha\beta}{\beta\zeta}, \text{ mithin auch durch Addition}^{1)}$$

$$= \frac{\alpha\gamma + \alpha\beta}{\gamma\zeta + \beta\zeta}, \text{ d. i.}$$

$$= \frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma}; \text{ also ist auch}$$

$$\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma}.$$

Es war aber $\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} < \frac{1351}{780}$, *und* $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{1560}{780}$; mithin ist

$$\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{1351 + 1560}{780}, \text{ d. i.} < \frac{2911}{780}.$$

Also ist auch

$$\frac{\alpha\eta^2}{\eta\gamma^2} < \frac{2911^2}{780^2}, \text{ d. i.} < \frac{8473921}{608400}; \text{ mithin } \sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\epsilon}\nu\tau\iota$$

$$\frac{\alpha\eta^2 + \eta\gamma^2}{\eta\gamma^2} < \frac{8473921 + 608400}{608400}; \text{ d. i. nach Elem. I, 47}$$

---

1) Dies folgt aus Elem. V, 12. Vgl. Hultsch zu Pappos Synag. vol. I p. XXIII.

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\eta\gamma^2} < \frac{9082321}{608400}; \text{ es ist also auch}$$

$$\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Zweitens werde der Winkel $\Gamma A H$ durch die Gerade $A\Theta$ halbiert; es ist also nach denselben *Schlußfolgerungen*, *wie vorher*

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{3013\frac{3}{4} + 2911}{780}, \text{ d. i.}$$

$< \frac{5924\frac{3}{4}}{780}$, *d. i.*, *nachdem Zähler und Nenner* mit 4 multipliciert und durch 13 dividiert *worden sind*,

$$< \frac{1823}{240}.$$

Ferner ist, *ähnlich wie vorher*,

$$\frac{\alpha\vartheta^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{1823^2}{240^2}, \text{ d. i.} < \frac{3323329}{57600}, \text{ und}$$

$$\frac{\alpha\vartheta^2 + \vartheta\gamma^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{3323329 + 57600}{57600}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{3380929}{57600}; \text{ also auch}$$

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Drittens werde noch der Winkel $\Gamma A\Theta$ halbiert durch die Gerade AK; es ist also, *ähnlich wie vorher*,

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1838\frac{9}{11} + 1823}{240}, \text{ d. i.}$$

$< \frac{3661\frac{9}{11}}{240}$, *d. i.*, *nachdem Zähler und Nenner* mit 11 multipliciert und durch 40 dividiert *worden sind*,

$$< \frac{1007}{66}.$$

Ferner ist, *ähnlich wie vorher*,

$$\frac{\alpha\varkappa^2}{\varkappa\gamma^2} < \frac{1007^2}{66^2}, \text{ d. i.} < \frac{1014049}{4356}, \text{ und}$$

$$\frac{\alpha\varkappa^2 + \varkappa\gamma^2}{\varkappa\gamma^2} < \frac{1014049 + 4356}{4356}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\varkappa\gamma^2} < \frac{1018405}{4356}; \text{ also } \textit{auch}$$

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma K} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}.$$

Viertens werde noch der Winkel $\Gamma A K$ halbiert durch die Gerade $A\Lambda$; es ist also, *ähnlich wie vorher,*

$$\frac{A\Lambda}{A\Gamma} < \frac{1009\frac{1}{6} + 1007}{66}, \textit{ d. i.}$$

$$< \frac{2016\frac{1}{6}}{66}.$$

Ferner ist, ähnlich wie vorher,

$$\frac{\alpha\lambda^2}{\lambda\gamma^2} < \frac{(2016\frac{1}{6})^2}{66^2}, \textit{ d. i.} < \frac{4064928\frac{1}{36}}{4356}, \textit{ und}$$

$$\frac{\alpha\lambda^2 + \lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2} < \frac{4064928\frac{1}{36} + 4356}{4356}, \textit{ d. i.}$$

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\lambda\gamma^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356}; \textit{ also auch}$$

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}; \text{ also umgekehrt [1]}$$

$$\frac{\gamma\lambda}{\alpha\gamma} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}.$$

Da nach der Construction der Bogen $\beta\gamma = \frac{1}{6}$ *des Kreisumfanges, und in Folge der viermaligen Winkelhalbierung der Bogen* $\lambda\gamma = \frac{1}{96}$ *des Kreisumfanges ist, so ist die Gerade* $\lambda\gamma$ *die Seite des in den Kreis eingeschriebenen Sechsundneunzigeckes.* Demnach ist U, *d. i.* der Umfang des Sechsundneunzigeckes $= 96\,\lambda\gamma$, *mithin*

$$\frac{U}{A\Gamma} > \frac{66 \cdot 96}{2017\frac{1}{4}}, \textit{ d. i.} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}, \text{ das ist [2]}$$

$$> 3\tfrac{10}{71}.$$

---

1) Archimedes hat hier auf einem Hülfssatze gefußt, der bei Pappos Synag. VII p. 688, 20—24 als zweiter Teil der 7. Proposition erhalten ist.

2) Es ist nämlich $6336 > 6335\frac{247}{284}$ (vgl. unten Abschnitt IX); die letztere gemischte Zahl ist aber $= 2017\frac{1}{4} \times 3\frac{10}{71}$; also ist

$$\frac{U}{A\Gamma} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

Also ist um so mehr[1]) das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser, *d. i.*

$$\pi > 3\tfrac{10}{71}.$$

Zusammenfassung des ersten und zweiten Teiles des Beweises.

Also ist $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$.

V.

Um nun zu erklären, auf welchem Wege Archimedes zu den hier vorkommenden Annäherungen von Quadratwurzeln gelangt ist, haben wir von $\sqrt{3}$ auszugehen, weil sie erstens die Grundlage für alle übrigen sowohl im ersten als im zweiten Teile des Beweises folgenden Wurzelwerte bildet, und zweitens, weil für sie allein die Begrenzung nach zwei Seiten hin gegeben worden ist.

Zunächst ist klar, daß Archimedes schlechterdings keinen solchen Näherungswert für $\sqrt{3}$ hat auffinden wollen, den wir als das Mittel zwischen zwei Grenzbestimmungen betrachten könnten. Für ihn gab es sowohl hier als bei den übrigen Wurzelausrechnungen nur das eine Ziel, zu dem ἄρρητον (*irrationale*), welches jede der von ihm behandelten Wurzeln darstellte, möglichst nahe stehende, größere oder kleinere rationale Zahlen (ῥητοὶ ἀριθμοί) zu ermitteln. Wo immer also in unserer vorhergehenden oder in der noch folgenden Darstellung die Zeichen $>$ und $<$ erscheinen, werden nicht etwa beliebige, noch so weit differierende Größen einander gegenüber gestellt, sondern es wird eine unbekannte Größe jedesmal mit dem nächsten, unter den gebotenen Vorbedingen erreichbaren Näherungswerte verglichen.

Archimedes giebt uns — wir wiederholen es — nur das Endresultat seiner Berechnung von $\sqrt{3}$ und schweigt sowohl über die Voraussetzungen, nach denen er Schritt für Schritt weiter vorgegangen ist, als über die Methode der Einzelausrechnungen. Es bleibt uns also nichts übrig, als das Problem, das er uns aufstellt, von der durch ihn gegebenen Lösung rückwärts schreitend auf analytischem Wege zu lösen. Ist dies geschehen, so wird die Synthesis weit kürzer verlaufen und mit ihrer Einfachheit und unmittelbaren Evidenz die beste Gewähr für die Richtigkeit der vorgeschlagenen Lösung in sich tragen.

---

1) Aus dem 1. Postulat zum I. Buche περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου folgert Archimedes ebenda p. 10, 23—28 Heib., daß der Umfang des Kreises größer ist als der Umfang des eingeschriebenen Vieleckes.

Um aber auch die Analysis möglichst knapp zu gestalten, müssen einige Hülfssätze (λήμματα) vorausgeschickt werden, welche, wenn auch nicht der Form, so doch dem Inhalte nach mit Sätzen sich decken, die von Archimedes als erwiesen vorausgesetzt worden sind, ehe er an seine Wurzelausrechnungen heranging[1]).

Satz 1.

Die Differenz einer Quadratzahl von der nächstniedrigeren Quadratzahl ist gleich der Summe der Wurzeln dieser Zahlen[2]).

Es sei eine Quadratzahl $(a+1)^2$. Die nächstniedrigere Quadratzahl ist also a^2, mithin

$$(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1.$$

---

1) Die umständliche Methode der Beweisführung bei den alten Mathematikern machte in vielen Fällen die Anwendung von Hülfssätzen, λήμματα, nötig. Zuerst sind solche Sätze jedesmal für den vorliegenden Fall besonders gebildet, später die schon früher gebildeten auch für andere, ähnliche Fälle weiter verwendet worden. Ein Einblick in die Reichhaltigkeit und die frühe Entstehung einer Sammlung von Hülfssätzen zur Sphärik ist oben (S. 373 f.) eröffnet worden. Ferner ist unter Archimedes' Namen eine Sammlung von λήμματα zur Lehre von der Berührung des Kreises mit Geraden oder mit andern Kreisen und über die Bildung gewisser Curven, die aus Kreisbögen zusammengesetzt sind, in arabischer Sprache erhalten und als *Liber assumptorum* den Werken des Archimedes angehängt (vol. II p. 428—446 ed. Heiberg, und vgl. dens. ebenda p. 428 f. 432, 1. 438, 1. 443, 1, Quaest. Archim. p. 24 f.). Die συναγωγή des Pappos besteht etwa zur Hälfte aus Sammlungen von λήμματα: s. den Einzelnachweis in meinem Index unter λῆμμα, λημμάτιον und λαμβάνειν, *sumere, adsumere theorema auxiliare.* Die obige Einschaltung von sechs Hülfssätzen zum 3. Satze der Kreismessung hat also vielfältige Analogien für sich. Satz 1 ist in etwas abgeänderter Form bezeugt durch Theo, die übrigen Sätze ergeben sich der Reihe nach mit Notwendigkeit, sobald wir das Ziel, eine Erklärung für die Archimedischen Schlußresultate zu finden, fest im Auge behalten. Die Trennung in einzelne Sätze mit besonderen Beweisen war durch die Methode der alten Mathematiker geboten (vgl. S. 377 Anm. 1); nur bei dem ganz elementaren Satze 4 habe ich gleich im Texte eine zusammenfassende Form gewählt, jedoch die ursprüngliche Sonderbildung von zwei Sätzen in der Anmerkung erwähnt. Die Abkürzungen aller Sätze nach moderner Methode sind zum Schluß der Sätze 3 und 6 angemerkt worden.

2) Dieser Satz erscheint bekanntlich bei Theo Smyrn. p. 32, 9 ed. Hiller in der Form: *οἱ ἑξῆς περισσοὶ ἀλλήλοις ἐπισυντιθέμενοι τετραγώνους ποιοῦσιν ἀριθμούς*, d. h. die (von 1 ab) auf einander folgenden ungeraden Zahlen geben, fortschreitend summiert, die Reihe der Quadrate aller Zahlen (von 2 ab). Es ist demnach $2^2 = 1 + 3$, $3^2 = 1 + 3 + 5$ u. s. w., mithin z. B. $3^2 - 2^2 = 5$, d. i. $= 3 + 2$, oder $4^2 - 3^2 = 7$, d. i. $= 4 + 3$. Vgl. auch Theo p. 28, Cantor Vorles. I S. 135.

Es ist aber $2a+1$ die Summe der Wurzeln von a^2 und $(a+1)^2$.

Folgerung. Da die halbe Differenz zwischen a^2 und $(a+1)^2 = a+\frac{1}{2}$ ist, so ist ersichtlich, daß jede zwischen a^2 und $(a+1)^2$ gegebene (ganze) Zahl entweder näher bei a^2 als bei $(a+1)^2$ liegt, oder umgekehrt.

Satz 2.

Eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl ist, liegt näher bei der nächstniedrigeren als bei der nächsthöheren Quadratzahl, wenn die Differenz der gegebenen Zahl von der nächstniedrigeren Quadratzahl nicht größer als die Wurzel aus der letzteren ist.

Die gegebene Zahl sei A, die nächstniedrigere Quadratzahl a^2, und die Differenz $A-a^2$ sei b. Wir setzen der Reihe nach $b=1$, $=2\ldots$, $=a-2$, $=a-1$, $=a$. Daraus erhellt unmittelbar, daß wenn A näher bei a^2 als bei $(a+1)^2$ liegen soll, der höchste zulässige Wert für $b=a$ ist. Denn wenn $b=a+1$ wäre, so würde es schon größer als die halbe Differenz zwischen $(a+1)^2$ und a^2 sein, mithin näher bei $(a+1)^2$ als bei a^2 liegen (Satz 1, Folgerung).

Satz 3.

Eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl ist, liegt näher bei der nächsthöheren als bei der nächstniedrigeren Quadratzahl, wenn die Differenz der nächsthöheren Quadratzahl von der gegebenen Zahl kleiner als die Wurzel aus der ersteren ist.

Die gegebene Zahl sei A, die nächsthöhere Quadratzahl a^2, und die Differenz a^2-A sei b. Wir setzen der Reihe nach $b=1$, $=2\ldots$, $=a-2$, $=a-1$, $=a$. Da die nächstniedrigere Quadratzahl $(a-1)^2$ und die halbe Differenz zwischen a^2 und $(a-1)^2 = a-\frac{1}{2}$ ist (Satz 1), so erhellt unmittelbar, daß, wenn A näher bei a^2 als bei $(a-1)^2$ liegen soll, $b<a$ sein muß. Denn wenn $b=a$, oder $>a$ wäre, so würde es größer als die ebenbezeichnete halbe Differenz sein, mithin näher bei $(a-1)^2$ als bei a^2 liegen[1]).

1) Statt der im Sinne altgriechischer Methode (vgl. S. 394 Anm. 1) wiederhergestellten Sätze 1—3 schlägt Herr Dr. Franz Rietzsch, der als Mathematiker sein sachverständiges Gutachten zu diesen Untersuchungen freundlichst erteilt hat, folgende Zusammenfassung nach moderner Methode vor: Aus der Identität $\frac{(a+1)^2-a^2}{2} = a+\frac{1}{2}$ folgt, daß eine zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen a^2 und $(a+1)^2$ liegende Zahl näher an derjenigen Quadratzahl liegt, von welcher ihre Differenz $<a+\frac{1}{2}$, oder, da es sich nur um ganze Zahlen handelt, $<a+1$ ist. Heißt die größere Quadratzahl a^2 und die kleinere $(a-1)^2$, so muß natürlich die genannte Differenz $<a$ sein.

Satz 4.

Wenn eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl ist, nach ihrer Differenz von der nächsten Quadratzahl dargestellt, und die nächste Quadratzahl mit a^2, die Differenz aber mit b bezeichnet wird, so ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}.$$

Da aus Elem. II, 4 und aus einem daraus abgeleiteten Lemma hervorgeht[1]), daß

$$\sqrt{a^2 \pm b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = a \pm \frac{b}{2a} \text{ ist, so ist}$$

$$\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}.$$

Folgerung. Da (nach Satz 2 und 3) $\frac{b}{2a}$ entweder $= \frac{1}{2}$ oder $< \frac{1}{2}$ ist, und da im Quadrate von $a \pm \frac{b}{2a}$ als auslaufender Bruch $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ erscheint, so ist leicht zu ersehen, daß der Fehler bei der Annäherung $\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$ um so schneller sich verringert, je größer das Verhältnis $a:b$ wird. Wenn also statt einer kleineren ganzen Zahl, aus welcher nach Obigem nur ein wenig genauer Wurzelwert gezogen werden kann (z. B. $2 - \frac{1}{4}$ als Annäherung für $\sqrt{3}$), ein dieser Zahl gleicher unechter Bruch, dessen Nenner eine Quadratzahl ist, gesetzt und der Zähler dieses Bruches auf die Form $a^2 \pm b$ gebracht wird, so wird man leicht solche Zähler ausfindig machen können, bei denen b im Verhältnis zu a^2 sehr klein ist. Wenn also dann bei der Annäherungsformel der auslaufende Bruch $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ vernachlässigt und der dabei ent-

1) Nochmals ist hier darauf hinzuweisen, daß diese Sätze und ihre Beweise lediglich den Zweck verfolgen zu zeigen, wie etwa Archimedes seine Begrenzung von $\sqrt{3}$ vorbereitet haben mag. Daß $\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ist, braucht nach dem heutigen Standpunkte der Mathematik nicht erst durch Verweis auf Elem. II, 4 erhärtet zu werden; aber für Archimedes war die Bezugnahme auf diesen Euklidischen Satz wesentlich, weil nur daraus der dazu gehörige Hülfssatz abgeleitet werden konnte, daß auch $\left(a - \frac{b}{2a}\right)^2 = a - b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ist. Die obige Zusammenfassung beider Sätze mit Hülfe des combinierten Zeichens $\pm$ ist eine moderne Zuthat; ein alter Mathematiker konnte nur jeden der beiden Sätze für sich anwenden.

standene kleine Fehler noch dadurch verringert wird, daß die im Zähler gewonnene Annäherung durch die Wurzel des Nenners dividiert wird, so wird der Fehler in der Wurzel aus der anfänglich gegebenen Zahl verschwindend klein gemacht werden können.

Satz 5.

Wenn eine gegebene Zahl (nach Satz 2) auf die Form a^2+b gebracht worden ist, so ist

$$\sqrt{a^2+b} > a + \frac{b}{2a+1}.$$

Da (nach Satz 2) b entweder $= a$ oder $< a$ ist, so ist jedenfalls $b < 2a+1$, mithin [1])

$$\frac{b}{2a+1} > \frac{b^2}{(2a+1)^2}.$$

Durch Addition gleicher Größen auf beiden Seiten erhält man

$$a^2 + \frac{2ab}{2a+1} + \frac{b}{2a+1} > a^2 + \frac{2ab}{2a+1} + \frac{b^2}{(2a+1)^2}.$$

Es ist aber einerseits $\frac{2ab}{2a+1} + \frac{b}{2a+1} = \frac{2ab+b}{2a+1} = b$, und andererseits $a^2 + \frac{2ab}{2a+1} + \frac{b^2}{(2a+1)^2} = \left(a + \frac{b}{2a+1}\right)^2$; also ist

$$a^2+b > \left(a+\frac{b}{2a+1}\right)^2, \text{ mithin auch}$$

$$\sqrt{a^2+b} > a + \frac{b}{2a+1}.$$

Satz 6.

Wenn eine gegebene Zahl (nach Satz 3) auf die Form a^2-b gebracht worden ist, so ist

---

1) Nach heutiger Methode genügt, um dies zu erweisen, die Einschaltung, daß $\frac{b}{2a+1}$ ein echter Bruch ist. Nach der Methode der Alten mußte, wie in so vielen anderen Fällen, der Zwischenbeweis etwas umständlicher verlaufen. Zunächst war aus Elem. V, 4 (vgl. mit defin. 5) zu folgern, daß $b:(2a+1) = b^2:b(2a+1)$ ist. Da nun $b < 2a+1$ ist, so ist auch $b(2a+1) < (2a+1)^2$, mithin (nach Elem. V, 8) $b^2:b(2a+1) > b^2:(2a+1)^2$; also auch (nach Elem. V, 13) $b:(2a+1) > b^2:(2a+1)^2$. Ebenso war der Zwischenbeweis an der entsprechenden Stelle des folgenden Hülfsatzes zu führen.

$$\sqrt{a^2-b} > a - \frac{b}{2a-1}.$$

Da (nach Satz 3) $b < a$ ist, so ist auch jedenfalls

$b < 2a - 1$, mithin[1])

$$\frac{b}{2a-1} > \frac{b^2}{(2a-1)^2}.$$

Indem auf beiden Seiten $a^2 - \frac{2ab}{2a-1}$ addiert wird, erhält man

$$a^2 - \frac{2ab}{2a-1} + \frac{b}{2a-1} > a^2 - \frac{2ab}{2a-1} + \frac{b^2}{(2a-1)^2}.$$

Es ist aber einerseits $-\left(\frac{2ab}{2a-1} - \frac{b}{2a-1}\right) = -\frac{2ab-b}{2a-1} = -b$, andererseits $a^2 - \frac{2ab}{2a-1} + \frac{b^2}{(2a-1)^2} = \left(a - \frac{b}{2a-1}\right)^2$; also ist

$$a^2 - b > \left(a - \frac{b}{2a-1}\right)^2, \text{ mithin auch}$$

$$\sqrt{a^2-b} > a - \frac{b}{2a-1} \text{ *)}.$$

Zusammenfassung der Sätze 4—6.

Wenn eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl ist, auf die Form $a^2 \pm b$ gebracht worden ist (wobei a^2 die nächste Quadratzahl bedeutet), so ist

1) Vgl. die vorige Anm.

*) Nach moderner Methode würden Satz 5 und 6 (laut Mitteilung von Dr. Rietzsch) folgendermaßen zusammengefaßt werden: Da $b < a + 1$, bez. $b < a$ ist, so ist $b < 2a \pm 1$, mithin $\frac{b}{2a \pm 1}$ ein echter Bruch und folglich

$$\frac{b}{2a \pm 1} > \left(\frac{b}{2a \pm 1}\right)^2.$$

Addiert man auf beiden Seiten $a^2 \pm \frac{2ab}{2a \pm 1}$, so folgt, weil $\frac{b}{2a \pm 1} \pm \frac{2ab}{2a \pm 1} = \pm b$ ist,

$$a^2 \pm b > \left(a \pm \frac{b}{2a \pm 1}\right)^2, \text{ also}$$

$$\sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1},$$

wobei durchgängig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen zu nehmen sind.

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

Mit Hülfe dieser Sätze sind wir im Stande das Problem zu lösen, welches Archimedes durch seine bei der Kreismessung angewendete Umgrenzung von $\sqrt{3}$ der Mit- und Nachwelt aufgegeben hat.

Aufgabe. Für $\sqrt{3}$ sind zwei möglichst genäherte Grenzwerte in Brüchen mit der Maßgabe zu finden, daß die Zähler der Brüche kleiner als 10000 seien [1]).

Analysis. Es sei schon geschehen, und es sei

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

gefunden worden. Es ist vorauszusetzen, daß diese beiden Grenzwerte in irgend einer leicht erkennbaren Beziehung zu einander stehen, und, nachdem der eine als relativ genauer als der andere erkannt worden ist (denn beide können nicht gleich genau sein, weil dann die irrationale $\sqrt{3}$ das arithmetische Mittel zwischen zwei rationalen Zahlen sein würde), so ist anzunehmen, daß von Archimedes der ungenauere Grenzwert aus dem genaueren abgeleitet worden ist, nicht umgekehrt.

Durch Ausrechnung ergiebt sich, daß $\frac{1351}{780}$ relativ viel näher als $\frac{265}{153}$ an $\sqrt{3}$ steht [2]). Um nun zu ermitteln, nach welcher Me-

1) Wie auch sonst bei historischen Untersuchungen zur alten Mathematik, war hier, anlangend die Formulierung des Satzes, ein Mittelweg einzuhalten. Die obigen Worte müßten noch mehrfach umgewandelt werden, um ins Griechische so übersetzt werden zu können, daß die Uebersetzung demjenigen Wortlaute, den Archimedes angewendet hat, einigermaßen sich näherte. Allein die obige Fassung ist so gewählt worden, daß darin keine den griechischen Mathematikern fremdartige Anschauung vorkommt. Es ist schlechthin „Brüche" für „gemeine Brüche" gesagt worden, weil die alten Griechen Decimalbrüche überhaupt nicht gekannt haben. Daß diese Brüche „unechte" sein müssen, geht aus dem Zusammenhang der Aufgabe hervor, und es ist durch den Ausdruck „Brüche" schlechthin zugleich die Wahl von gemischten Zahlen abgewehrt. Aus Rücksicht auf den griechischen Sprachgebrauch ist auch von Zahlen, die „kleiner als 10000 sind", statt von Zahlen zu 4 oder weniger Decimalstellen gesprochen worden. Ueber die Stellenzahl, auf welche die Nenner zu beschränken sind, brauchte eine besondere Weisung nicht gegeben zu werden, da es sich um unechte Brüche handelt und das Maximum der Stellenzahl des Zählers schon definiert worden ist.

2) Es ist nämlich in Decimalzahlen zu setzen

thode $\frac{265}{153}$ aus $\frac{1351}{780}$ hergeleitet worden ist, sind die beiden Nenner auf ihre kleinsten Teiler zurückzuführen. Wir vergleichen also zunächst

$$780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \text{ mit}$$
$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17,$$

und bilden, um beide Zahlen in eine noch durchsichtigere Beziehung zu einander zu bringen, aus den Teilern $2 \cdot 2 \cdot 13$ der Zahl 780 das Product 52 und aus den Teilern $3 \cdot 17$ der Zahl 153 das Product 51. Wir stellen also einander gegenüber

$$780 = 3 \cdot 5 \cdot 52 \text{ und}$$
$$153 = 3 \cdot 51,$$

und vervollständigen die Symmetrie durch Erweiterung des Bruches $\frac{265}{153}$ mit 5. Wir haben also neben einander

---

$$(a) \quad \frac{1351}{780} = 1{,}7320513$$
$$(b) \quad \sqrt{3} \quad = 1{,}7320508$$
$$(c) \quad \frac{265}{153} = 1{,}7320261.$$

Also ist die Archimedische Näherung $\frac{1351}{780}$ genau bis zur 6ten Stelle der gemischten Zahl, und dazu würde noch die 7te Stelle = 1 als für a und b gemeinsame Annäherung kommen. Dagegen stimmen b und c nur bis zur 5ten Stelle überein, die 6te aber differiert schon um mehr als 2. Beiläufig sei bemerkt, daß Archimedes, wenn er nicht im Laufe der Beweisführung, um allzu große Zahlen zu vermeiden, zu starken Kürzungen der aus $\frac{1351}{780}$ abgeleiteten Bruchwerte genötigt gewesen wäre, lediglich von $\frac{1351}{780}$ aus die Zahl π bis zur 5ten, ja annähernd bis zur 6ten Stelle hinter dem Komma hätte berechnen können. — Nach der Methode der altgriechischen Arithmetik ist der Beweis, daß die Differenz $\frac{1351}{780} - \sqrt{3} < \sqrt{3} - \frac{265}{153}$ ist, folgendermaßen zu führen. Da eine irrationale Zahl nicht commensurabel zu einer rationalen sein kann, sind die Quadrate zu vergleichen; mithin ist 3 in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln, dessen Nenner gleich dem Generalnenner für $(3 \cdot 260)^2$ und $(3 \cdot 51)^2$ ist. Wenn dann $\left(\frac{1351}{780}\right)^2$ und $\left(\frac{265}{153}\right)^2$ zu Brüchen mit diesem Generalnenner umgewandelt sind, wird eine Vergleichung der Zähler (welche analog der vorherigen Anordnung mit a, b, c bezeichnet werden mögen) ergeben, daß $a - b < b - c$ ist. Danach ist zu schließen, daß $\left(\frac{1351}{780}\right)^2$ näher als $\left(\frac{265}{153}\right)^2$ bei 3 steht, mithin auch die Wurzeln u. s. w.

$$\frac{1351}{15\cdot 52} \text{ und } \frac{1325}{15\cdot 51},$$

und können nun die anfänglich gegebene Lösung zurückbilden zu

$$\frac{1351}{52} > 15\sqrt{3} > \frac{1325}{51},$$

d. i., indem wir die Brüche in gemischte Zahlen, und zwar aus unmittelbar einleuchtendem Grunde in die Formen von Differenzen, zerlegen

$$26 - \tfrac{1}{52} > 15\sqrt{3} > 26 - \tfrac{1}{51}.$$

Nun ist aber $26 - \frac{1}{52} = \sqrt{26^2 - 1 + (\frac{1}{52})^2}$, also zugleich die Annäherung für $\sqrt{26^2-1}$, und zwar ist (nach Satz 4)

$$26 - \tfrac{1}{52} > \sqrt{26^2-1}.$$

Nun war soeben $26 - \frac{1}{52}$ mit $15\sqrt{3}$ verglichen worden. Da wir jedoch nicht eine Näherung für $15\sqrt{3}$, sondern für $\sqrt{3}$ selbst suchen, so setzen wir statt $26 - \frac{1}{52} > \sqrt{26^2-1}$

$$\tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{52}) > \tfrac{1}{15}\sqrt{26^2-1}.$$

Es ist aber $\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1} = \sqrt{\frac{676-1}{225}} = \sqrt{\frac{675}{225}} = \sqrt{3}$; mithin ist erwiesen

$$\tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{52}) > \sqrt{3}.$$

Weiter sehen wir nun ein, daß die andere Begrenzung

$$\sqrt{3} > \tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{51})$$

entstanden ist durch Umformung der Begrenzung

$$\tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{52}) \text{ zu } \tfrac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52-1}\right),$$

und entnehmen aus obigem Satze 6, daß in der That $\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}$, d. i.

$$\sqrt{3} > \tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{51}), \text{ d. i.}$$
$$> \frac{265}{153}$$

ist. Somit haben wir erwiesen, daß von den beiden zu Anfang gesetzten Begrenzungen für $\sqrt{3}$ die weniger genaue, nämlich $\frac{265}{153}$,

nach einer allgemein gültigen Regel aus der genaueren, nämlich aus $\frac{1351}{780}$, hergeleitet worden ist.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, nach welcher Methode die Begrenzung $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ gefunden worden ist.

Es wurde bereits bemerkt, daß $\frac{1351}{780}$ auf die Form $\frac{1352-1}{15 \cdot 52}$ $= \frac{1}{15}(26 - \frac{1}{52}) = \frac{26}{15} - \frac{1}{15 \cdot 52}$ gebracht werden kann, und daß wir hierin eine Annäherung für $\sqrt{3}$ zu erkennen haben. Indem wir den hinter dem Minuszeichen auslaufenden Bruch bei Seite lassen, erhalten wir $\frac{26}{15}$ als gröbere Näherung für $\sqrt{3}$.

Wie vorher den Näherungswert $\frac{1351}{780}$, so führen wir nun auch $\frac{26}{15}$ auf eine Form zurück, welche eine Annäherung in noch kleineren Zahlen ergeben wird, nämlich auf $\frac{5^2+1}{3 \cdot 5} = \frac{5}{3} + \frac{1}{15}$. Wieder lassen wir den auslaufenden Bruch bei Seite und erhalten $\frac{5}{3}$ als Näherungswert für $\sqrt{3}$.

Wir vergleichen $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ mit 3, d. i. $\frac{25}{9}$ mit $\frac{27}{9}$, und ersehen daraus, daß $\frac{5}{3} < \sqrt{3}$ ist. Es muß also der Annäherung $\frac{5}{3}$, welche kleiner als $\sqrt{3}$ ist, eine andere, welche größer als $\sqrt{3}$ ist, zur Seite stehen. Wir bringen $\frac{5}{3}$ auf die Form $2 - \frac{1}{3}$, und erkennen, daß die Begrenzung $\sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3}$, d. i. $> 2 - \frac{1}{4-1}$, nach Satz 6 hergeleitet ist aus der Begrenzung $2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3}$.

Hiermit sind wir auf analytischem Wege rückwärts bis zu einer Stelle gelangt, welche nur noch um einen Schritt vom Ausgangspunkte der Bahn entfernt ist. Denn nach Satz 4 erkennen wir in $2 - \frac{1}{4}$ die Annäherung für $\sqrt{2^2-1}$; es ist aber $\sqrt{2^2-1}$ nach dem Pythagoreischen Lehrsatze durch die größere Kathete desjenigen rechtwinkligen Dreieckes dargestellt, welches Archimedes seiner ganzen Kreismessung zu Grunde gelegt hat (S. 386. 389).

Die nun folgende **Synthesis** kleiden wir in die Form eines Berichtes über das nun klar vor Augen liegende Verfahren, welches Archimedes eingeschlagen hat um zu der Begrenzung

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

zu gelangen.

Wenn in dem rechtwinkligen Dreiecke, welches als Hälfte des gleichseitigen Dreieckes durch die Normale von der Spitze zur

Basis abgeschnitten wird, die kleinere Kathete = 1 gesetzt wird, so ist die größere Kathete $= \sqrt{2^2-1} = \sqrt{3}$. Es ergab sich also nach obigem Satze 4 die erste Begrenzung

$$2 - \tfrac{1}{4} > \sqrt{3},$$

und dieser war nach Satz 6 gegenüberzustellen die Begrenzung

$$\sqrt{3} > 2 - \frac{1}{4-1}, \text{ d. i. } > \frac{5}{3}.$$

Um nun eine genauere Annäherung für $\sqrt{3}$ zu erhalten, hat Archimedes $\frac{5}{3}$ quadriert zu $\frac{25}{9}$ und den Radicandus 3 zu einem uneigentlichen Bruche mit dem Nenner 9 umgeformt. Er setzte also $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{25+2}{9}}$, und berechnete daraus die Begrenzung (Satz 4)

$$\tfrac{1}{3}(5 + \tfrac{1}{5}) > \sqrt{3}, \text{ d. i. } \frac{26}{15} > \sqrt{3}.$$

Um aber eine noch genauere Annäherung zu gewinnen, hat er $\frac{26}{15}$ quadiert zu $\frac{676}{225}$ und wiederum den Radicandus 3 zu einem uneigentlichen Bruche mit gleichem Nenner umgeformt. So erhielt er $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{676-1}{225}}$, und berechnete daraus die weit genauere Begrenzung

$$\tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{52}) > \sqrt{3}, \text{ d. i. } \frac{1351}{780} > \sqrt{3}.$$

Hierzu ergab sich (nach Satz 6) die Begrenzung nach der andern Seite hin, nämlich

$$\sqrt{3} > \tfrac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52-1}\right), \text{ d.i.}$$

$$> \frac{1326-1}{15 \cdot 51}, \text{ d.i. } > \frac{265}{153}.$$

Somit ist nachgewiesen, auf welchem Wege Archimedes zu der von ihm gesetzten Begrenzung

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

gelangt ist[1]). Zugleich erinnert uns 1351, als die größte hier vor-

1) Unter den früheren Lösungsversuchen sind hier zunächst diejenigen anzuführen, in denen die im Obigen ohne fremdartige Zwischenglieder entwickelten Werte ebenfalls und zwar so erscheinen, daß sie, wenn auch durch Zwischen-

kommende Zahl, daran, daß er die Ausrechnung nicht bis zu den Myriaden und darüber hinaus fortsetzen wollte. Ganz mit Recht. Denn die Quadrierung von $\frac{1351}{780}$ und die daraus sich ergebende Annäherung für $\sqrt{3}$ würde zwar zu einem ungemein genauen Werte geführt haben, allein mit einem Bruche, dessen Zähler größer als 365 Myriaden ist — darauf führt nämlich die Ausrechnung[1]) —

---

glieder getrennt, doch nicht allzuweit von einander entfernt sind. Hinzuweisen ist zuerst auf die Reihe bei Günther Quadrat. Irrationalitäten S. 61 (vgl. mit S. 114. 117 f.). Schoenborn in Zeitschr. für Mathem. u. Phys., hist.-liter. Abteil., XXVIII (1883), S. 174 f. fügt zu der Güntherschen Reihe die Scheidung der Werte, je nachdem sie größer oder kleiner als $\sqrt{3}$ sind, hinzu und gelangt so zu einer Uebersicht, die mit $\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3}$ beginnt, dann die Begrenzung $\frac{26}{15} > \sqrt{3}$ aufweist, danach aber mehrere Zwischenglieder enthält, welche von Archimedes sicherlich nicht in Betracht gezogen worden sind. Später erscheint in der Schoenbornschen Reihe $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$, und in der nächsten Zeile $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$. Zu den beiden Lösungen, welche Tannery Sur la mesure du cercle d'Archimède in Mém. de la Société des sciences de Bordeaux, 2e série, IV p. 319 ff. und 327 ff. vorgeschlagen hat, sind Günther a. a. O. S. 87 ff. 127, Hunrath Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel S. 12 f., ders. die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln S. 20 ff. zu vergleichen; außerdem ist hervorzuheben, daß Tannery, wenn auch nach anderen Voraussetzungen, p. 322 die in der obigen Darstellung im Nenner erscheinende Zahl 52, und p. 323 f. das Correlat 51 entwickelt hat. Die in den obigen Hülfssätzen 5 und 6 dargelegten Modificationen des in Satz 4 entwickelten Nenners $2a$ erscheinen schon bei Hunrath, Die Berechnung u. s. w. S. 20 f. (vgl. mit S. 22), freilich nach anderen Voraussetzungen und in Verbindung mit verschiedenartigen, für Archimedes nicht nachweisbaren Combinationen. Ueber die Näherung $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a + 1}$ bei dem Araber Alkarchî (XI. Jahrh.), der aus griechischen Quellen geschöpft hat (Cantor Vorles. I S. 655 ff.), und über die von Ibn Albannâ (XIII. Jahrh., Cantor I S. 689 ff.) daran geknüpften Begrenzungen vgl. Cantor I S. 659. 692, Günther Quadrat. Irration. S. 43 ff. 96, Hunrath a. a. O. S. 21 f.; doch wissen jene mittelalterlichen Quellen nichts von der Archimedischen Zurückführung des Radicandus auf die nächste Quadratzahl, noch von der davon abhängigen, sowohl für die Summen- als für die Differenzformel durchgeführten Begrenzung, welche oben (S. 398 f.) aus den Sätzen 4—6 gezogen worden ist. In den verschiedenen von Weissenborn in Zeitschr. für Mathem. u. s. w. (oben S. 368 Anm. 2) und in der Schrift Die irrationalen Quadratwurzeln u. s. w. aufgestellten Reihen erscheinen außer den von Archimedes selbst gegebenen Annäherungen $\frac{265}{153}$ und $\frac{1351}{780}$ (Die irration. Quadratw. S. 9 Nr. 25) noch die Annäherungen $\frac{7}{4}$ (S. 8 Nr. 18), $\frac{5}{3}$ (Nr. 19—21), $\frac{26}{15}$ (Nr. 18. 22. 25), allenthalben aber gemischt mit anderen, nichtarchimedischen Werten.

1) Da nämlich $\left(\frac{1351}{780}\right)^2 = \frac{1825201}{608400}$, und $3 = \frac{1825200}{608400}$ ist, so würde die Archimedische Ausrechnung von $\frac{\sqrt{1351^2 - 1}}{780} = \sqrt{3}$ die Annäherung

hätte er die übrigen vielfach verschlungenen Rechnungen seiner Kreismessung nicht so durchführen können, daß der ganze Beweis übersichtlich und seinen Zeitgenossen verständlich geblieben wäre.

Von $\frac{7}{4}$ als der ersten Näherung für $\sqrt{3}$ ist Archimedes, wie wir sahen, auf $\frac{5}{3}$, dann auf $\frac{26}{15}$ und erst von da auf $\frac{1351}{780}$ gekommen. Das Zwischenglied $\frac{26}{15}$ erscheint, reichlich ein Jahrhundert später, mehrmals in den Anweisungen zur praktischen Rechenkunst, die unter Herons Namen auf uns gekommen sind[1]). Nur wird dieser Bruch hier, um praktisch verwendbar zu sein, schlechthin als ein mit $\sqrt{3}$ u n g e f ä h r g l e i c h e r Wert, nicht, wie bei Archimedes, als eine Begrenzung verwendet. Auch Heron ist von der durch die Normale aus der Spitze abgeschnittenen Hälfte des gleichseitigen Dreieckes ausgegangen; doch hat er die kleinere Kathete nicht, wie Archimedes, $= 1$, sondern $= 15$ gesetzt. Hiernach ergab sich ihm die größere Kathete $= \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675}$. Da dieser Radicandus nur um 1 kleiner ist als $676 = 26^2$, so bestimmte er $\sqrt{675}$ auf *κς' σύνεγγυς*, d. i. auf n a h e z u 26, und rechnete nun weiter mit der Näherung $\frac{26}{15} \sim \sqrt{3}$*). Daß nach Ale-

---

$$\frac{1351 - \frac{1}{2702}}{780} > \sqrt{3}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{3650401}{780 . 2702} > \sqrt{3}$$

ergeben haben. Der Fehler in dieser Annäherung ist so verschwindend klein, daß er auch heutigen Tages bei einer noch so genauen praktischen Ausrechnung nicht in Betracht kommen würde. Denn wenn man $\frac{3650401}{2107560}$ in eine gemischte Decimalzahl zerlegt und die Ausrechnung bis zur 11ten Stelle einschl. fortführt, so erhält man

1,7320508076 (6 näher als 5),

d. i. denselben Wert, wie ihn die directe Ausrechnung von $\sqrt{3}$ nach der uns geläufigen Methode ergiebt.

1) Heronis Alexandrini geom. et stereom. ed. Hultsch p. 58—60. 134 f. 147—149. 206. 218. 229. Den näheren Nachweis giebt die folgende Anmerkung, und zwar sind dort die Heronische *γεωμετρία*, *γεωδαισία* u. s. w. nach Capiteln und Unterabteilungen citiert.

*) Geom. 17, 5, und ähnlich Geod. 16, 4 (vgl. auch die im Parisinus 2013 überlieferte Redaction in der Anmerk. zu pag. 60, 16). Weggeblieben ist das *σύνεγγυς* in der stark gekürzten Ausrechnung Geom. 17, 4. Wenn so das Verhältnis der Normale im gleichseitigen Dreieck zur halben Seite nahezu gleich 26 : 15 gesetzt war, so verhielt sich die ganze Seite zur Normale wie $2 \cdot 15 : 26 = 15 : 13$, d. h. die Normale war $= \frac{13}{15}$ der Seite, mithin, wenn die Seite $= 1$ gesetzt wurde, gleich $1 - \frac{2}{15} = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$ (vgl. Cantor Vorles. I S. 334). Nach diesem Ansatze wird aus der Seite die Normale berechnet in den Exempeln

xandreia außer den Endergebnissen, welche in der *κύκλου μέτρησις* des Archimedes vorliegen, auch eine Kunde von der Methode seiner Wurzelausziehungen gedrungen sei, muß nach dem regen wissenschaftlichen Verkehr, den Archimedes mit Dositheos gepflogen hat, als wahrscheinlich gelten. Auch läßt sich nachweisen, daß mehrere Heronische Wurzeln auf Archimedische Näherungswerte zurückgehen. Doch muß dies einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben; hier genüge es zu constatieren, daß Heron nicht bloß den Archimedischen Wert $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$, sondern auch die Zwischenstufe $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{676-1}}{15} = \frac{\sqrt{26^2-1}}{15}$ kennt, vermittelst deren Archimedes zu der genaueren Annäherung $\frac{1351}{780}$ gekommen ist. Eine solche Uebereinstimmung kann nicht zufällig sein; sie muß auf Archimedische Tradition zurückgehen. Dabei liegt aber der Unterschied zwischen der feinen Methode des großen Mathematikers und dem Verfahren des praktischen Rechenmeisters klar vor Augen. Archimedes benutzt die nach streng wissenschaftlichen Voraussetzungen gefundene Annäherung $\frac{26}{15}$, um von da auf $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{26^2-1}}{15}$ und weiter auf einen viel genaueren Wert für $\sqrt{3}$ zu kommen; Heron dagegen nimmt als gegeben hin, daß in der Hälfte des gleichseitigen Dreieckes die kleinere Kathete = 15 und die Hypotenuse = 30 sei. Danach versucht er die größere Kathete als $\sqrt{30^2-15^2}$ zu berechnen, kommt aber nicht weiter als zu den Vergleichungen $30^2-15^2 = 675 \sim 676$, d. i. $\sim 26^2$, mithin zu den Näherungen 26 für die größere Kathete und $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$.

Da Archimedes als erste Näherung $\frac{7}{4} > \sqrt{3}$ gesetzt hat, so ist zu fragen, ob ihm das oben (S. 382 ff.) erwähnte Verfahren des Theodoros bekannt gewesen ist, die Wurzel der *τρίπους δύναμις*

Geom. 15, 1. 16, 2, Geod. 14, 1 f. 15, 2. Da ferner nach demselben Verhältnisse die Fläche des gleichseitigen Dreieckes = $\frac{13}{30}$ vom Quadrate seiner Seite ist, so wird in den Aufgaben Geom. 14, 1 f. 16, 1. 17, 1, Geod. 13, 1 f. 15, 1. 16, 2 gezeigt, daß man die Fläche findet, wenn man vom Quadrate der Seite $\frac{1}{3}$ und dann noch $\frac{1}{10}$ (d. i. zusammen $\frac{13}{30}$) abzieht. Auch in den Aufgaben Geom. 17, 2 f., Geod. 16, 1. 3 wird als Verhältnis der Seite zur Normale 15 : 13 gesetzt und danach auf verschiedenen Wegen die Fläche des Dreieckes berechnet. Ebenso ist in den Messungen der regulären Vielecke Geom. 102, Mensurae 51—53, Lib. geepon. 75—77. 172—179 die Anwendung der Näherung $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ mehrfach nachzuweisen; nur einmal scheint, um das Endresultat abzukürzen, die gröbere Näherung $\frac{7}{4}$ gewählt worden zu sein. Vgl. Tannery L'arithmétique des Grecs dans Héron in den Mém. de la Société des Sciences de Bordeaux, 2e série, IV p. 184 f. 191.

durch die Zahl 1 mit auslaufenden binären Brüchen zu umgrenzen [1]). Gewiß hat er eine Untersuchung nicht unbeachtet gelassen, die kein Geringerer als Platon einer besonderen Erwähnung für würdig erachtet hatte, und diese Vermutung wird zunächst dadurch bestätigt, daß schon bei Theodoros (S. 382), wie später bei Archimedes, die Formel $\frac{7}{4} > \sqrt{3}$ als erste Näherung erscheint. Ueberdies wird sich zeigen, daß Archimedes in den Zwischenrechnungen seines Beweises des 3. Satzes der Kreismessung soweit als thunlich von binären Brüchen ausgeht und, wenn andere Brüche dazwischen gekommen waren, möglichst bald zu jenen zurückkehrt. So mag also die Annahme gelten, daß dem Archimedes das Verfahren des Theodoros, sei es unmittelbar aus dessen Schrift, sei es aus einem Auszuge, bekannt gewesen ist; allein ganz verfehlt würde es sein, lediglich aus der übereinstimmenden Näherung $\frac{7}{4}$ und aus dem gemeinsamen Gebrauche von binären Brüchen folgern zu wollen, daß jene ganze Methode des Archimedes, die wir oben (S. 399 ff.) auf analytischem Wege ermittelt und synthetisch festgestellt haben, schon früher von Theodoros erfunden und angewendet worden sei.

Der Rückblick auf Theodoros führt uns auch zu einer Erwägung, welche bei der obigen Synthesis absichtlich noch zurückgestellt worden war. Von der ersten Umgrenzung $\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3}$ ist Archimedes fortgeschritten zur Quadrierung von $\frac{5}{3}$ u. s. w. Was für ein Grund aber lag vor, daß er nicht $\frac{7}{4}$ quadrierte und von da aus weiter ging? Die Antwort ist leicht zu finden. Von $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ wäre er zu der Formel $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{49-1}}{4}$, und von da zu der ersten Näherung $\frac{7-\frac{1}{14}}{4} > \sqrt{3}$, d. i. $\frac{97}{56} > \sqrt{3}$ gelangt. Schon dieser Bruch ist weniger bequem als $\frac{26}{15}$, d. i. der oben (S. 403) aus

---

1) Der Ausdruck „binäre Brüche" für beliebige Abschnitte der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

ist, wie schon oben (S. 383), so auch hier und im Folgenden gewählt worden, um eine kurze und zugleich deutliche Benennung zu haben. Die binären Brüche weisen in den Nennern die Reihe der Potenzen von 2, gerade wie die Decimalbrüche die Potenzen von 10, und die Sexagesimalbrüche die Potenzen von 60 auf. Der modernen Bezeichnung 0 an einer beliebigen Stelle der decimalen Bruchreihe entspricht, wie schon bemerkt, im Griechischen das Fehlen eines Gliedes der vollständigen binären Bruchreihe (gerade so, wie auch bei den Sexagesimalbrüchen). Daß die binären Brüche Stammbrüche sind, geht unmittelbar aus dem Aufbau der Reihe hervor.

$\frac{5}{3}$ hergeleitete e r s t e Näherungswert. Wäre nun aber vollends der z w e i t e Näherungswert aus $\frac{7}{4}$ durch Quadrierung von $\frac{97}{56}$ und durch die Formel $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{97^2 - 1}}{56}$ berechnet worden, so hätte sich der Bruch $\frac{18817}{56 \cdot 194}$, mithin ein Zähler, der > 10000 ist, ergeben. Archimedes brauchte aber einen Zähler der < 10000 ist (S. 399. 404 f.); deshalb wählte er nicht von $\frac{7}{4}$, sondern von $\frac{5}{3}$ aus die z w e i t e Annäherung, die ihm den verhältnismäßig bequemen Wert $\frac{1351}{780}$ und nach der anderen Seite hin die noch bequemere Begrenzung $\frac{265}{153}$ ergab [1]).

VI.

Hiermit sind wir an das Ende der Untersuchung über die Archimedische Begrenzung von $\sqrt{3}$ gelangt. Wenn wir uns nun zu den andern in der Kreismessung noch vorkommenden Wurzeln wenden, so ist zunächst zu wiederholen, daß nach dem Gange der ganzen Beweisführung (S. 385 ff.) allenthalben entweder größere oder kleinere Näherungswerte statt des gesuchten Wurzelwertes berechnet worden sind. Da nun Archimedes auch die Annäherungen für $\sqrt{3}$ von vornherein so auseinandergehalten hat, so ist anzunehmen, daß er jene Formel $\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$, welche ihm der Reihe nach die Näherungen $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{1351}{780}$ g r ö ß e r als $\sqrt{3}$ ergab (S. 403), auch zur Berechnung der Näherungswerte im zweiten Teile seines Beweises (S. 389 ff.), nämlich

$$3013\tfrac{3}{4} > \sqrt{9082321}$$

$$1838\tfrac{9}{11} > \sqrt{3380929}$$

$$1009\tfrac{1}{6} > \sqrt{1018405}$$

$$2017\tfrac{1}{4} > \sqrt{4069284\tfrac{1}{36}},$$

verwendet hat. Es waren also die Radicanden 9082321, 3380929 u. s. w. zu zerlegen in die nächste Quadratzahl $= a^2$ und in eine Differenz „Radicandus $-a^2 = b$“, bez. „$a^2 -$ Radicandus $= b$“, und danach die Näherungen $a + \frac{b}{2a}$, bez. $a - \frac{b}{2a}$, deren jede größer

1) Um diesen Beweis ganz einwandfrei zu machen, ist noch zu constatieren, daß die e r s t e Annäherung von $\frac{7}{4}$ aus, d. i. $\frac{97}{56} = 1{,}732\mathit{143}$ weit weniger genau ist als die zweite Annäherung von $\frac{5}{3}$ aus, d. i. $\frac{1351}{780} = 1{,}732051$. Vgl. S. 399 Anm. 2.

als die gesuchte Wurzel ist, auszurechnen [1]). Da die Nenner der auslaufenden Brüche in den hier aufgegebenen Ausrechnungen zwischen 7000 und 2000 liegen und auch die Zähler nicht ganz kleine Zahlen darstellen, so ist der Bruch $\frac{b}{2a}$ von Archimedes jedesmal, und zwar sehr stark, gekürzt worden.

Soweit ist alles klar; aber es stellt sich doch noch eine Schwierigkeit heraus, wenn wir die hier aufgegebenen Berechnungen mit jenen bei $\sqrt{3}$ genauer vergleichen. Dort war nämlich jedesmal durch die Quadrierung einer vorher gefundenen Näherung diejenige Quadratzahl gegeben, welche dem neugebildeten Radicandus am nächsten stand. Hier aber ist zu jedem Radicandus die erforderliche Quadratzahl erst zu suchen, d. h. es sind aus einer gegebenen mehrstelligen Zahl zunächst die Ganzen der Wurzel auszuziehen.

Nun ist die Vermutung ausgesprochen worden, daß Archimedes überhaupt nicht nach arithmetischer Methode Wurzeln habe ausziehen können, sondern sich auf die Benutzung von Tabellen der Quadratzahlen und zur Bestimmung der auslaufenden Brüche auf ein Versuchen und Erraten beschränkt habe [2]). Das bedarf wohl

---

1) Aus dem VII. Abschnitte wird hervorgehen, weshalb hier diese beiden Formeln ausdrücklich unterschieden worden sind. Heutigen Tages wenden wir bei der Ausrechnung einer Quadratwurzel, weil wir gleichmäßig für die Ganzen wie für die Brüche das Decimalsystem durchführen, nur die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, bez. die Annäherung $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$ an. Archimedes hat zwar, wie sofort zu zeigen ist, die Ganzen der Wurzel nach derselben Methode ausgezogen; aber den noch verbliebenen Rest „Radicandus $- a^2 = b$“ nur dann beibehalten und die Ganzen der Wurzel nebst auslaufendem Bruch auf die Form $a + \frac{b}{2a}$ gebracht, wenn der Rest kleiner als die halbe Differenz zwischen a^2 und $(a + 1)^2$ war. Im entgegengesetzten Falle hat er statt dieses Restes die leicht zu berechnende Differenz der nächsthöheren Quadratzahl und des Radicandus gesetzt. Wenn so die Wurzel als eine Zahl von Ganzen *minus* Bruch dargestellt war, wurde zuletzt dieses Resultat auf die für gemischte Zahlen übliche Form zurückgeführt, mithin $3013 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ statt $3014 - \frac{1}{4}$ (p. 268, 12 Heib.) und $1838 \frac{9}{11}$ statt $1839 - \frac{2}{11}$ (p. 268, 16) geschrieben und demgemäß auch gesprochen.

2) Nesselmann Die Algebra der Griechen S. 110: „Es bleibt also nur die Vermutung übrig, daß die Alten ihre Wurzeln durch Versuche und Erraten gefunden haben, worauf namentlich die Multiplicationsproben bei Eutokius hindeuten. Die zunächst kleinere ganze Zahl, welche der gesuchten Wurzel entsprach, konnten sie leicht aus einer Tabelle der Quadratzahlen entnehmen; und daß ähnliche Tafeln, die ihnen ihre mühsamen Rechnungen erleichterten, ihnen nicht fremde waren, beweist die Multiplicationstafel bei Nikomachus [Arithm. I, 19, 9]“. Der Zusammenhang der Stelle zeigt, daß das von den Griechen allgemein Gesagte auch für Archimedes gelten soll. Vgl. auch Friedlein Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer S. 81. [Wenn

keiner Widerlegung, nachdem die bisherigen Untersuchungen gezeigt haben, eine wie feine Methode Archimedes auf die Begrenzung von $\sqrt{3}$ verwendet hat. Im Vergleiche dazu war die Ausziehung der Ganzen einer Quadratwurzel aus einer mehrstelligen Zahl nur ein Spiel, freilich kein Errratespiel, und auch die Abrundung der auslaufenden Brüche ist, wie noch zu zeigen, auf einem ganz anderen Wege als dem des Tastens und Erratens zu Stande gekommen.

Die Ausziehung der Ganzen einer Wurzel würde mit wenigen Worten zu erledigen sein, wenn die alten Griechen nicht eine von der unsrigen abweichende Zahlenbezeichnung gehabt hätten. Nur aus diesem Grunde bedarf es einer etwas längeren Darstellung.

Das griechische Zahlensystem steht an Brauchbarkeit weit zurück hinter dem indisch-arabischen mit seinen 9 Ziffern und der Null. Aber immerhin haben die Griechen ihre 27 Zahlzeichen schon so verwendet, daß die Beziehungen auf das decimale System, welches ihnen ja unmittelbar mit den Zahlwörtern ihrer Sprache gegeben war, möglichst deutlich hervortraten. Von 1 bis 999 brauchten sie allerdings 27 Zahlzeichen, während wir mit 10 auskommen. Von 1000 an traten aber wieder die ersten 9 Zahlzeichen ein, und dieselben kamen dann zum dritten Male zur Anwendung um die ersten Myriaden bis 90000 zu zählen. Da mit den Myriaden die Zählung überhaupt wieder von vorn anfing, so wurden ferner 10 Myriaden durch $\overline{\iota}$, 20 durch $\overline{\varkappa}$ u. s. w. bezeichnet. Zur Unterscheidung erhielten die Zahlzeichen für die Tausende vorn einen Strich, die Zehntausende aber wurden durch Beifügung von

---

der letztere, um seine mit Nesselmann übereinstimmende Ansicht zu stützen, auf Hultsch in den Jahrbüchern für Philologie herausg. von Fleckeisen, 1867 S. 534, sich beruft, so beruht dies auf einem Mißverständnis. An der angeführten Stelle ist nicht von Quadratwurzeln, sondern von einer Cubikwurzel, und nicht von Mathematikern aus der Blütezeit der altgriechischen Mathematik, sondern von König Pheidon die Rede, der im 7. Jahrh. v. Chr., oder nach anderen noch früher, ein System der Längenmaße, Hohlmaße und Gewichte geschaffen hat. Setzt man voraus, daß dieses System ein in sich geschlossenes war, so kam für den Begründer desselben als Längeneinheit die Seite eines Würfels in Betracht, dessen Wassergehalt ein bestimmtes Gewicht darstellte; es konnte also auch die Frage auftauchen, nach einem kubischen Volumen Wassers, das ein bestimmtes Gewicht vertrat, die Längeneinheit zu bestimmen. Wenn etwas der Art schon zu Pheidons Zeiten zur praktischen Ausführung gekommen ist (und die neuesten Forschungen verschiedener Metrologen neigen mehr und mehr zu dieser Ansicht hin), so kann man nur an eine versuchsweise Annäherung, nicht an die methodische Ausrechnung einer Cubikwurzel denken. Ueber Cubikwurzeln bei Heron und Vitruvius vgl. Hultsch in Fleckeisens Jahrb. 1876 S. 253 ff.]

μυριάδες (wofür verschiedene Abkürzungen in Gebrauch waren), von den niedrigeren Zahlen abgetrennt. Es stand also z. B. $\overline{\gamma}$ *μυρ.* $,\overline{\gamma\gamma}$ der heutigen Bezeichnung 33003 nicht allzu fern. Diophantos, der freilich ganz am Ende der altgriechischen Mathematik steht, ist noch einen Schritt weiter gegangen und hat die Myriaden nur durch einen Punkt von den niedrigeren Zahlen abgetrennt[1]. Bilden wir hiernach die Zahl $\overline{\tau\lambda\gamma}.\,,\overline{\gamma\tau\lambda\gamma} = 3333333$, so differieren nur die Zeichen *τλ* von der heutigen, ganz auf dem Stellenwert beruhenden Bezeichnung.

Doch deutlicher noch weisen die gesprochenen griechischen Zahlen darauf hin, wie die Ganzen einer Wurzel, Stelle für Stelle, aus einer größeren Zahl zu entwickeln waren. Die Quadrate der Zahlen 1 bis mit 9 reichen von 1 bis 81, sie werden also ausgesprochen entweder bloß als *μονάδες*, z. B. *τέσσαρες*, oder als *μονάδες* und *δεκάδες* zusammen, z. B. *ἑκκαίδεκα*, *εἴκοσι πέντε* u. s. w. Ferner reichen die Quadrate von 10 bis mit 90 von 100 bis mit 8100, werden also ausgesprochen als *ἑκατοντάδες*, z. B. *τετρακόσιοι*, oder als *ἑκατοντάδες* und *χιλιάδες* zusammen, z. B. *χίλιοι ἑξακόσιοι*, *δισχίλιοι πεντακόσιοι* u. s. w. Das Quadrat von 100 bildet eine neue Einheit, die *μυριάς*, und von da geht die decimale Gruppierung weiter wie vorher[2].

Wenn nun Archimedes durch seine Sandrechnung nachgewiesen hat, wie die decimale Gruppierung der Zahlen bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann, ohne daß man andere Zahlwörter als die allgemein üblichen anzuwenden brauchte, so konnte er nicht im mindesten darüber im Zweifel sein, welche Decimalstellen die Gan-

---

1) Vgl. Diophanti opera ed. Tannery I p. 222, 12 f. 15 f. 224, 20 f. 23 f. u. ö. Dagegen ist das Zeichen $\overset{v}{M}$ oder M^{v} beigefügt p. 120, 9. 186, 4—9.

2) Die griechischen Zahlwörter von 10 aufwärts zeigen zumeist unmittelbar durch die Wortbildung an, welche Zahlengruppen sie vertreten. Daß *ἕνδεκα* die Summe von 1 Einheit (*μονάς*) und 1 *δεκάς* ausdrückt, konnte niemanden verborgen bleiben. Dasselbe gilt von *δώδεκα*, *τρεῖς καὶ δέκα* u. s. w. Auch *δισχίλιοι* = 2 *χιλιάδες* u. s. w. waren unmittelbar kenntlich. In *διακόσιοι*, *τριακόσιοι* u. s. w. war die Grundform *ἑκατόν* auch für den Laien nicht zu verkennen. Endlich bei *εἴκοσι*, *τριάκοντα* u. s. w., wo der Klang des Wortes keinen Anhalt gab, genügte die Analogie der übrigen Zahlwörter um darin die Bedeutungen *δύο δεκάδες*, *τρεῖς δεκάδες* u. s. w. zu erkennen. Unzweideutig erklärt den dekadischen Aufbau des Systems der griechischen Zahlwörter Archimedes aren. p. 266, 21—24: *ἀριθμείσθωσαν — μονάδες καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας*, und ähnlich p. 268, 2—4. Vgl. auch p. 270, 2: *εἴ κα ἔωντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κειμένοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκὰς ᾖ*, d. i. wenn von 1 ab 10 und die Potenzen von 10 der Reihe nach hingeschrieben werden.

zen einer aus einer beliebigen Zahl auszuziehenden Wurzel einnehmen werden.

Nehmen wir z. B. gleich den Radicandus 9082321, der vor kurzem (S. 408) an erster Stelle angeführt wurde. In dieser Zahl würden wir Modernen die Stellen rückwärts zu je zwei abzählen. So kurz konnte Archimedes nicht verfahren, da die griechisch geschriebene Zahl ϡ̅η̅. ͵β̅τ̅κ̅α̅ trotz ihrer 7 Decimalstellen nur 6 Zahlzeichen enthielt (denn für 0 fehlte, wie gesagt, die Bezeichnung). Allein seine Einteilung des Radicandus lief auf dasselbe hinaus. Denn dem ausgehenden Betrage κ̅α̅ entsprachen die *μονάδες* der Wurzel, dem Betrage ͵β̅τ̅ die *δεκάδες*, dem Betrage η̅ (*μυριάδες*) die *ἑκατοντάδες*, endlich dem Betrage ϡ̅ (*μυριάδες*) = 9 · 100 · 10000 die *χιλιάδες* der Wurzel. Die Ganzen von $\sqrt{9082321}$ mußten also die Form

$$1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta$$

haben, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf die Werte 0, 1, 2 ... 8, 9 beschränkt sind.

Nehmen wir nun an, daß α schon gefunden war, so mußte in dem Reste „Radicandus $-(1000\alpha)^2$" nach Eukl. Elem. II, 4 zunächst $2 \cdot 1000\alpha \cdot 100\beta$ und $(100\beta)^2$, ferner $2(1000\alpha + 100\beta) \cdot 10\gamma$ und $(10\gamma)^2$, endlich noch zwei Zahlen enthalten sein, die vor der Hand außer Betracht bleiben können.

Daß $\alpha = 3$ ist, lag klar vor Augen. Wir bezeichnen nun der Kürze halber jedesmal den bereits ausgerechneten Teil der Wurzel durch a und den Rest, welchen die Subtraction des Quadrates a^2 vom Radicandus ergiebt, mit b. Das Quadrat von 3 *χιλιάδες* sind 900 *μυριάδες*. Es verbleiben mithin als Rest 8 *μυριάδες* + 2321. Darin soll zunächst $2 \cdot 3000 \cdot 100\beta$ enthalten sein. Allein wenn wir auch β minimal $= 1$ setzen würden, müßten $2 \cdot 3000 \cdot 100 = 600000$, d. i. mehr als 8 Myriaden abgezogen werden. Es giebt also in diesem Falle keine Wurzelstelle von der Form 100β, oder mit andern Worten, die Stelle der *ἑκατοντάδες* bleibt frei. Demnach bleibt zunächst $a = 3000$ und der Rest $b = 82321$. Da in diesem Reste $2a \cdot 10\gamma$ enthalten sein soll, so wird γ durch die Division $\frac{82321}{2 \cdot 3000 \cdot 10}$ vorläufig zu bestimmen sein. Wir haben demnach $\gamma = 1$ zu setzen und ziehen von b zunächst $2 \cdot 3000 \cdot 10$, sodann noch 10^2 ab. Somit ist a auf 3010 und der Rest b auf 22221 berechnet. Weiter bestimmen wir nun δ durch die Division $\frac{22221}{2 \cdot 3010}$ auf 3, und ziehen von b zunächst $2 \cdot 3010 \cdot 3$, sodann noch 3^2 ab. Es verbleibt als Rest 4152. Da $\frac{4152}{2 \cdot 3013} < 1$ ist, so sind mit dem

Betrage 3013 die Ganzen der Wurzel definitiv bestimmt, und aus dem Reste wird ein Bruchteil der Wurzel zu ermitteln sein, und zwar, wie die fertige Ausrechnung des Archimedes zeigt, nur eine ganz ungefähre Annäherung.

So also, meinen wir, hat Archimedes die Ganzen von $\sqrt{9082321}$, und so auch die Ganzen der übrigen in der Kreismessung vorkommenden Wurzeln ausgerechnet, und mit dieser Annahme wird wohl das Richtige getroffen sein, weil eine andere passende und mit griechischen Zahlzeichen ausführbare Methode überhaupt nicht in Betracht kommen kann. Nur um die Darstellung nicht ohne Not zu erschweren, sind im Vorhergehenden moderne Zahlzeichen gewählt worden. Natürlich hätte sich dasselbe auch mit griechischen Zahlzeichen darlegen lassen, ja man hätte das Ganze auch in griechischer Sprache und durchgehends nach den Anschauungen der alten Mathematiker niederschreiben können, und es wäre dabei nur hin und wieder die Form, nicht aber der wesentliche Inhalt der obigen Schlußfolgerungen zu ändern gewesen.

VII.

Die Ermittelung der Ganzen der Wurzel aus einem mehrstelligen Radicandus war nur ein vorbereitender Schritt zur Lösung der Aufgabe, einen passenden Näherungswert für die Wurzel aus einem solchen Radicandus zu finden. Es bleibt also noch die Frage zu beantworten, nach welcher Methode Archimedes die in der Kreismessung überlieferten auslaufenden Brüche aufgefunden hat.

Zur Vergleichung fügen wir die letzteren teils hier, teils später zu Anfang des VIII. Abschnittes in so genauer Ausrechnung bei, als die von Archimedes gestellten Aufgaben es erfordern. Wir bringen also die Wurzel jedes siebenstelligen Radicandus auf 8 Decimalstellen. Der vierte Radicandus $4069284\frac{1}{36}$ würde eigentlich zum mindesten als zehnstellige decimale Zahl zu geben sein; da jedoch $\frac{1}{36}$ einen stark gekürzten, mithin wenig genauen Wert darstellt, so genügt die Ausrechnung der Wurzel auf 9 Decimalstellen.

Da alle diese Werte von $\sqrt{3}$ abhängen, so sind auch die Archimedischen Annäherungen für diese Wurzel mit in die folgenden Uebersichten aufgenommen worden.

Zunächst haben wir es mit den Wurzeln zu thun, die im zweiten Teile des Beweises des 3. Satzes (oben S. 389 ff.) vorkommen und sämmtlich größer als der gesuchte Wurzelwert sind.

Aufgabe.	Ausrechnung des Archimedes.	Dieselbe Ausrechnung in Decimalbrüchen.	Genaue Annäherung auf 8, bez. 9 Decimalstellen.
$\sqrt{3}$	$< \frac{1351}{780}$	$< 1{,}7320513$	1,7320508
$\sqrt{9082321}$	$< 3013\frac{3}{4}$	$< 3013{,}7500$	3013,6889
$\sqrt{3380929}$	$< 1838\frac{9}{11}$	$< 1838{,}8182$	1838,7303
$\sqrt{1018405}$	$< 1009\frac{1}{6}$	$< 1009{,}1667$	1009,1605
$\sqrt{4069284\frac{1}{36}}$	$< 2017\frac{1}{4}$	$< 2017{,}2500$	2017,24664.

Alle hier von Archimedes gesetzten Brüche haben als gemeinschaftliches Merkmal, daß sie starke Kürzungen der eigentlich zu berechnenden Werte darstellen.

Um einen gemeinen Bruch, dessen Zähler und Nenner mehrstellig und zu einander prim sind, annähernd zu kürzen, ist entweder der Zähler oder der Nenner, oder es sind beide zugleich auf Beträge zu bringen, welche die Vereinfachung des Bruches durch gemeinschaftliche Teilung ermöglichen. Da Archimedes in der Kreismessung nur mit solchen Werten rechnet, welche größer oder kleiner als die gesuchte Größe sind, so mußte die Kürzung eines vorliegenden Bruches, der bereits größer als die gesuchte Größe ist, einen wenn auch möglichst nahen, aber immerhin noch größeren Wert darstellen, und im entgegengesetzten Falle einen noch kleineren Wert.

Ein Bruch wird aber größer als ein gegebener Bruch, wenn man entweder den Zähler vergrößert oder den Nenner verkleinert oder, vorkommenden Falls, auch beides zugleich thut. So hat Archimedes z. B. am Schlusse des ersten Teiles seines Beweises zum 3. Satze (oben S. 389) $\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} > \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ gesetzt, d. h. er hat von dem gegebenen Nenner $4673\frac{1}{2}$ die Zahl 1 abgezogen und ist dadurch auf die Kürzung $\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$, und auf die Näherung $\frac{1}{7} > \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ gekommen.

Soll zweitens die Kürzung einen kleineren Wert als den gegebenen Bruch darstellen, so tritt natürlich das umgekehrte Verfahren ein.

In diesen beiden Fällen ist angenommen, daß der auslaufende Bruch als Glied einer Summe zu der vorhergehenden ganzen Zahl hinzutritt. Wenn er aber als Subtrahendus in einer Differenz erscheint, so ist selbstverständlich, um eine Kürzung,

die **g r ö ß e r** als die **g e g e b e n e   g e m i s c h t e   Z a h l** ist, zu erhalten, der Subtrahendus zu **v e r k l e i n e r n** und in diesem Sinne sind Zähler oder Nenner des gegebenen Bruches zu modificieren.

Bei der Ausziehung der Ganzen von $\sqrt{9082321}$ war der Rest $9082321 - 3013^2 = 4152$ geblieben (S. 412). Da $4152 > 3013 + 1$ ist, so folgt aus dem oben eingeschalteten 2., bez. 3. Hülfssatze (S. 395), daß der Radicandus 9082321 näher bei 3014^2 als bei 3013^2 liegt. Die Differenz zwischen diesen beiden Quadraten ist nach dem 1. Hülfssatze $= 3013 + 3014 = 6027$; mithin ist $3013^2 + 4152 = 3014^2 - (6027 - 4152) = 3014^2 - 1875$, und ferner nach Satz 4

$$3014 - \frac{1875}{2 \cdot 3014} > \sqrt{9082321}.$$

Nun hat Archimedes statt des Bruches $\frac{1875}{2 \cdot 3014} = \frac{1875}{6028}$ die Kürzung $\frac{1}{4}$, d. h. einen binären Bruch gesetzt[1]). Daß er auf einen solchen Stammbruch nicht zufällig gekommen ist, sondern daß er ihn gesucht hat, zeigt der Vergleich mit den übrigen Wurzeln. Denn die oben (S. 408) aufgeführte Reihe schließt, trotzdem daß dazwischen die Brüche $\frac{9}{11}$ und $\frac{1}{8}$ sich finden, wieder mit $\frac{1}{4}$, und in der analogen, zu Anfang des VIII. Abschnittes aufzuführenden Reihe erscheinen **n u r** binäre Brüche. Und solche hat Archimedes auch in den beiden Fällen, wo der Bruch $\frac{3}{4}$ ausläuft (p. 268. 12. 14), durch die Schreibung **S** δ″, d. i. $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ ausdrücklich bezeichnet.

Damit aber ist noch immer nicht nachgewiesen, auf **w e l c h e m   W e g e** Archimedes zu der Kürzung $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1875}{6028}$ gekommen ist. Vorläufig sehen wir nur, erstens daß $\frac{1}{4}$ der nächste binäre Bruch zu $\frac{1875}{6028}$ ist[2]), zweitens, daß $\frac{1}{4} = \frac{1507}{6028}$ die Bedingung erfüllt **k l e i n e r** als $\frac{1875}{6028}$ zu sein (damit umsomehr $3014 - \frac{1}{4}$, d. i. $3013\frac{3}{4}$ **g r ö ß e r** als $\sqrt{9082321}$ sei).

Indes ist auch das Weitere unschwer aufzufinden[3]). Es ist

1) Statt $3014 - \frac{1}{4}$ hat Archimedes p. 268, 12 Heib. aus leicht ersichtlichen Gründen ‚γιδ' S δ″ $= 3013\frac{3}{4}$ geschrieben. Vgl. oben S. 409 Anm. 1.

2) Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1875}{6028}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, weisen der Reihe nach, wenn sie auf den gemeinschaftlichen Nenner $2 \cdot 6028$ gebracht worden sind, die Zähler 6028, 3750, 3014, 1507 auf, woraus unmittelbar hervorgeht, daß $\frac{1}{4}$ näher als alle anderen binären Brüche bei $\frac{1875}{6028}$ liegt.

3) Welche Wege die Erklärung hier einzuschlagen habe, deutet Archimedes selbst durch die kurzen Hinweise p. 268, 15: *ἑκατέρα γὰρ* (*πλευρά*) *ἑκατέρας δ' ιγ″* und p. 270, 1: *ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια' μ″* an. Damit meint er, wie aus der oben gegebenen Bearbeitung seines Beweises (S. 391) hervorgeht, daß erstens die Zahl $5924\frac{1}{4}$ $(= \sqrt{9082321} + 2921)$ zu 780 sich deshalb wie 1823 : 240 verhält,

früher (S. 400) darauf hingewiesen worden, daß der im zweiten Teile des Archimedischen Beweises erscheinende Nenner des Näherungswertes für $\sqrt{3}$, nämlich 780, das Product von $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ ist. Dieser Nenner würde bei den complicierten Ausrechnungen, welche an die Näherung $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ sich knüpfen (S. 390 ff.), unverändert geblieben sein, wenn nicht damit die Zähler zu unhandlich großen Zahlen angewachsen wären. Da nun die Zähler in letzter Instanz auf angenäherte Wurzelwerte zurückgingen, so war es wünschenswert die Annäherungen der auslaufenden Brüche, unbeschadet der Richtigkeit der ganzen Näherungsrechnung, so zu gestalten, daß man Zähler erhielt, die einen gemeinschaftlichen Teiler mit dem Nenner 780 hatten.

Sehen wir nun von den im Texte fertig vorliegenden Resultaten ab und versetzen uns im Geiste an jene Stelle der erst beginnenden Ausrechnung, wo an Archimedes die Aufgabe herantrat, eine passende Näherung für $3014 - \frac{1875}{6028}$ zu finden (S. 415). Den noch zu suchenden Bruch bezeichnen wir mit $\frac{x}{y}$. Derselbe hatte folgende Bedingungen zu erfüllen: 1) er sollte thunlichst nahe bei dem gegebenen Bruche liegen (womit zugleich ausgesprochen ist, daß $x < y$ sein soll) — 2) er sollte kleiner als der gegebene Bruch sein — 3) er sollte im Fortgange der Rechnung zu einem Zähler führen, der einen gemeinschaftlichen Teiler mit 780 hat.

Aus der obigen Bearbeitung des Archimedischen Beweises (S. 391) geht hervor, daß zu $3014 - \frac{x}{y}$ zunächst 2911 hinzuzählen war. So stellte sich als Zähler $5925 - \frac{x}{y}$ heraus. Dieser Betrag sollte einen gemeinschaftlichen Teiler mit dem Nenner $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ haben, und am erwünschtesten war es gewiß, wenn zunächst 13 eliminiert werden konnte. Die Division $5925 : 13$ ergab als Rest 10. Es waren also in der Formel $10 - \frac{x}{y} = \frac{10y - x}{y}$ die Werte x und y so zu wählen, daß der Zähler $10y - x$ durch 13 teilbar war und überdies die vorher unter 1 und 2 gestellten Bedingungen

weil man das Verhältnis $5924\frac{1}{4} : 780$, ohne es zu alterieren (vgl. Elem. V, 4. 15), mit 4 erweitern und durch 13 kürzen kann, und daß zweitens das Verhältnis $3661\frac{9}{11} : 240$ durch Erweiterung mit 11 und dann durch Division beider Glieder (ὅροι) durch 40 zu dem Verhältnis $1007 : 66$ vereinfacht werden kann. Wenn Tannery Sur la mesure du cercle d'Archimède in Mém. de la Société des sciences de Bordeaux, 2e série, IV p. 319 f. es unterläßt, diese ausdrücklichen Zeugnisse des Archimedes anzuführen, so setzt er dabei offenbar voraus, daß dieselben jedem Leser des griechischen Textes in die Augen fallen müssen.

gungen erfüllt wurden. Danach ergab sich ohne Schwierigkeit als nächste Lösung $y = 4$ und $x = 1$.

Auf diesem Wege also ist Archimedes darauf gekommen statt $3014 - \frac{1875}{6028}$ die Näherung $3014 - \frac{1}{4}$, d. i. $3013\frac{3}{4}$ zu setzen. Durch die Hinzufügung von 2911 erhielt er dann $5924\frac{3}{4} = \frac{13 \cdot 1823}{4}$; mithin war der Bruch $\frac{5924\frac{3}{4}}{780}$ umgeformt zu $\frac{13 \cdot 1823}{4 \cdot 13 \cdot 60} = \frac{1823}{240}$.

Ein ähnliches Verfahren war bei der nächsten Wurzelannäherung einzuschlagen. Die Ausrechnung von $\sqrt{3380929}$ ergab 1838 Ganze und als Rest 2685. Es war also der Radicandus umzuformen zu

$$1839^2 - (1838 + 1839 - 2685) = 1839^2 - 992,$$

und es ergab sich nach Satz 4 (S. 396)

$$1839 - \frac{992}{2 \cdot 1839} > \sqrt{3380929}.$$

Nun kann es dem Archimedes nicht entgangen sein, daß statt $\frac{992}{2 \cdot 1839} = \frac{1984}{7356}$ in erster Linie die Näherung $\frac{1}{4} = \frac{1839}{7356}$ sich darbot; denn dies war sowohl ein binärer Bruch als auch $< \frac{1984}{7356}$, wie der Zusammenhang der Rechnung es verlangte. Wenn er also statt dessen die etwas entferntere Näherung $\frac{2}{11}$ gewählt hat[1]), so muß die Rücksicht auf die spätere Eliminierung eines gemeinschaftlichen Theilers, ganz wie vorher, den Ausschlag gegeben haben.

In der That war nicht schwer zu finden, daß statt $1839 - \frac{992}{2 \cdot 1839}$ die Näherung $1839 - \frac{x}{y}$ so gewählt werden konnte, daß der nachher in der Rechnung hervortretende Zähler $1839 - \frac{x}{y} + 1823$ (vgl. S. 391) einen nicht unansehnlichen Teiler mit dem Nenner 240 gemeinsam hatte. Die versuchsweise Teilung von $1839 + 1823 = 3662$ durch 40 ergab als Rest 22. Es waren also womöglich in der Formel $22 - \frac{x}{y} = \frac{22y - x}{y}$ die Werte x und y so zu wählen,

1) Um zunächst $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{11}$ mit einander zu vergleichen, sind diese Brüche auf den gemeinschaftlichen Nenner 44 zu bringen, wonach sich Zähler 11 > Zähler 8, mithin $\frac{1}{4} > \frac{2}{11}$ ergiebt. Da nun $\frac{1}{4} < \frac{992}{2 \cdot 1839}$ ist, so folgt daraus zugleich, daß $\frac{2}{11}$ eine entferntere Näherung als $\frac{1}{4}$ darstellt. Es mögen aber zu deutlicherer Vergleichung noch die Brüche $\frac{992}{2 \cdot 1839}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{11}$ auf den gemeinschaftlichen Nenner $4 \cdot 11 \cdot 1839$ gebracht werden. Dann ergeben sich der Reihe nach die Zähler $21824 > 20229 > 14712$.

daß der Zähler $22y - x$ durch 40 teilbar und überdies der Bruch $\frac{x}{y}$ ähnlich dem gegebenen Bruche $\frac{992}{2 \cdot 1839}$, und zwar kleiner als dieser war. Allen diesen Anforderungen entsprach die Lösung $y = 11$ und $x = 2$.

Deshalb also hat Archimedes den Bruch $\frac{992}{2 \cdot 1839}$ zu $\frac{2}{11}$ gekürzt, dann $1839 - \frac{2}{11}$ umgesetzt zu $1838\frac{9}{11}$, und, nachdem hierzu 1823 addiert worden war, Zähler und Nenner des Bruches $\frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{40280}{11 \cdot 240}$ durch 40 dividiert. So erhielt er $\frac{1007}{66}$.

Die beiden noch übrigen angenäherten Wurzelausrechnungen (vgl. S. 414) bieten keine Schwierigkeiten. Nachdem der Radicandus 1018405 auf die Form $1009^2 + 324$ gebracht worden war, ergab sich nach Satz 4 (S. 396)

$$\sqrt{1009^2 + 324} < 1009\tfrac{324}{2018}.$$

Statt des auslaufenden Bruches mußte nun ein ähnlicher und zwar größerer gesucht werden. Da $324 : 2018$ sich annähernd wie $1 : 6$ verhalten, so wurde $\frac{324}{1944}$ statt $\frac{324}{2018}$ gesetzt. Somit war ein größerer Wert als der gegebene Bruch und zugleich die bequeme Abrundung $\frac{324}{1944} = \frac{1}{6}$ gefunden. Auch im Hinblick auf die noch folgenden Ausrechnungen war hieran nichts zu ändern.

Endlich wurde der Radicandus $4069284\frac{1}{36}$ auf die Form $2017^2 + 995\frac{1}{36}$ gebracht. Hieraus ergab sich als erste Annäherung für den auslaufenden Bruch der Wurzel $\frac{36 \cdot 995 + 1}{36 \cdot 2 \cdot 2017}$. Doch war es nicht nötig, diesen vielstelligen Bruch auszurechnen; denn es genügte als nächstgrößerer Wert (indem, bei der Kürzung durch 36, im Zähler 1 statt $\frac{1}{36}$ gesetzt wurde) die Abrundung $\frac{996}{2 \cdot 2017} = \frac{498}{2017}$. Daß hier Zähler und Nenner sich sehr nahe wie $1 : 4$ verhalten und daß $\frac{1}{4} > \frac{498}{2017}$ ist[1]), war sofort ersichtlich; es wurde also $\frac{1}{4}$ definitiv als Näherung für den auslaufenden Bruch der letzten in diesem Teile des Beweises zu berechnenden Wurzel gesetzt.

Wie Archimedes zuletzt von dem Verhältnis $66 \cdot 96 : 2017\frac{1}{4}$ auf die Annäherung $223 : 71$ und somit auf die Begrenzung $\pi > 3\frac{10}{71}$ gekommen ist, wird im IX. Abschnitte gezeigt werden.

1) Um dies zu erkennen, bedurfte es gar nicht der Ausrechnung $\frac{1}{4} = \frac{500}{2000} > \frac{498}{2017}$; sondern es genügte, in dem gegebenen Bruche $\frac{498}{2017}$ den Zähler auf 500 zu vergrößern und den Nenner auf 2000 zu verkleinern. Vgl. oben S. 414.

VIII.

Zu Anfang des vorigen Abschnittes war bereits auf die Aufgabe hingewiesen worden, die nun noch vorliegt. Wir haben uns dem ersten Teile des Beweises des 3. Satzes (S. 386 ff.) zuzuwenden, wo Archimedes von einer Annäherung, welche kleiner als $\sqrt{3}$ ist, ausgeht. Danach hat er die Wurzeln aus einer sechsstelligen Zahl und aus zwei siebenstelligen Zahlen, denen noch Brüche beigefügt sind, auszuziehen, und zwar jedesmal eine Annäherung, die kleiner als die gesuchte Wurzel ist, aufzusuchen.

Wir geben zunächst, ähnlich wie vorher, eine allgemeine Uebersicht.

Aufgabe.	Ausrechnung des Archimedes.	Dieselbe Ausrechnung in Decimalbrüchen.	Genaue Annäherung auf 8, bez. 10 Decimalstellen.
$\sqrt{3}$	$> \frac{265}{153}$	$> 1{,}7320261$	1,7320508
$\sqrt{349450}$	$> 591\frac{1}{8}$	$> 591{,}1250$	591,14296
$\sqrt{1373943\frac{33}{64}}$	$> 1172\frac{1}{8}$	$> 1172{,}1250$	1172,153367
$\sqrt{5472132\frac{1}{16}}$	$> 2339\frac{1}{4}$	$> 2339{,}2500$	2339,258870.

Durch die im V. Abschnitte aufgestellten Hülfssätze und durch die Darlegungen im VII. Abschnitte ist eigentlich schon alles erledigt, was wir zur Lösung der hier vorliegenden Aufgaben brauchen, und es wäre demnach zu erwarten, daß wir unsern Weg ohne Hindernisse fortsetzen könnten. Dem ist aber nicht so; denn gleich zu Anfang tritt eine auffällige Schwierigkeit entgegen.

Archimedes hat, wie in den vorher behandelten Fällen, auch aus dem Radicandus 349450 zuerst die Ganzen der Wurzel gezogen und dann (nach Satz 4) die erste Annäherung gesucht. Es ergab sich

$$\sqrt{591^2 + 169} < 591 + \frac{169}{2 \cdot 591}.$$

Da aber eine Annäherung, welche kleiner als die gesuchte Wurzel ist, auszurechnen war, wurde zweitens (nach Satz 5)

$$\sqrt{591^2 + 169} > 591 + \frac{169}{2 \cdot 591 + 1}$$

gesetzt.

Nun ist $169 = 13^2$, und $2 \cdot 591 = 7 \cdot 13^2 - 1$; es ergab sich also, ohne daß es, wie in den vorher behandelten Fällen (S. 415 ff.), umständlicher Zwischenrechnungen bedurfte,

$$\sqrt{349450} > 591\frac{1}{7}.$$

Diese so präcise Abrundung[1]) kann dem Archimedes unmöglich entgangen sein; trotzdem aber findet sich in dem uns überlieferten Texte (p. 264, 11) und ebenso bei Eutokios (p. 274, 15—21) die Näherung $591\frac{1}{8}$ *), mithin ist der auslaufende Bruch mehr verkleinert worden, als nötig war[2]).

Die an sich nicht unwahrscheinliche Vermutung, daß etwa der Schreibfehler η'' statt ζ'' sich eingeschlichen haben könnte, wird sofort hinfällig, wenn man die nächsten Textesworte verfolgt. Denn Archimedes hat mit dem Bruche $\frac{1}{8}$, nicht mit $\frac{1}{7}$ weiter gerechnet (vgl. oben S. 387 f.).

Es ist also an der Thatsache nicht zu rütteln, daß Archimedes einen weniger genauen Wert statt des ihm bekannten genaueren in den Calcül eingeführt hat; aber das berechtigt durchaus nicht zu dem Schlusse, daß er dadurch das Endergebnis seiner Rechnung beeinträchtigt habe. Im Gegenteil ist leicht nachzuweisen, daß die Abweichungen von der genaueren Rechnung, welche durch die Satzung von $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ veranlaßt wurden, im Fortgange der Rechnung völlig verschwunden sind.

Wir formulieren also vorläufig folgenden Satz: Archimedes

---

1) Die Quadrierung von $591\frac{1}{7}$ ergiebt $349449\frac{43}{49}$, d. i. nur um $\frac{6}{49}$ weniger als 349450.

*) Zu beachten ist, daß Archimedes auch in diesem Falle den gesuchten kleineren Bruch durch Vergrößerung des Nenners um 1 erlangt hat $\left(\frac{1}{7+1} = \frac{1}{8}\right)$ Er hat also das Verfahren, zu dem Nenner eines gegebenen Bruches 1 hinzuzählen, nicht bloß in dem Falle von Satz 5 (S. 397), wo es gilt zu einem gegebenen Werte, der größer als die gesuchte Wurzel ist, einen andern, der kleiner ist, aufzufinden, sondern auch hier angewendet, um zu einem Bruche, der schon kleiner als der gesuchte Wert ist, einen noch kleineren Näherungswert ausfindig zu machen. Wir werden demselben Verfahren wieder bei der Abrundung der nächsten Wurzel, und der umgekehrten Operation (da es sich dort um Vergrößerung eines schon größeren Grenzwertes handelt) am Ende des ersten Teiles des Beweises (S. 424) begegnen, und zuletzt finden, daß nach ähnlichen Erwägungen auch der zuerst für π berechnete Grenzwert $3\frac{1}{7}$ zu dem anderseitigen Grenzwerte $3\frac{10}{71}$ umgebildet worden ist. — Nach Archimedes' Vorgange hat auch Heron Geom. p. 93, 6—8, um einen auslaufenden Bruch kürzen zu können, statt der ersten Annäherung $11\frac{14}{22} > \sqrt{135}$ den noch größeren Wert $11\frac{14}{21} = 11\frac{2}{3}$ eingesetzt und ist dann, nachdem er $11\frac{2}{3}$ quadriert und mit $135 = \frac{1215}{9}$ verglichen hatte, wiederum nach Archimedischer Methode, zu der genaueren Näherung $11\frac{13}{21} > \sqrt{135}$ gekommen. Nur hat er zuletzt $11\frac{13}{21}$ nicht als größer im Vergleich zu der gesuchten Wurzel, sondern als derselben gleich *παρ' ὀλίγον παντελῶς* hingestellt.

2) Vgl. Nesselmann Die Algebra der Griechen S. 109, Tannery Mesure du cercle a. a. O. S. 319, Günther Quadratische Irrationalitäten S. 116 mit Anm. *.

wählte $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ um diesen ganzen Teil seines Beweises in binären Brüchen führen zu können, und er war zu dieser Abweichung berechtigt, weil sie keinen thatsächlichen Einfluß auf den Fortgang der Rechnung ausübte, sondern nur eine formale Bedeutung hatte[1]).

Diese Behauptung ist nun im Einzelnen auszuführen und als richtig zu erweisen. Der von Archimedes gewählte Bruch ist kleiner als er sein sollte. Da nun auch bei den folgenden Annäherungen immer wieder ein kleinerer Wert gesetzt worden ist, so könnte man denken, daß zuletzt ein recht erheblicher Fehler herauskommen mußte. Das trifft aber aus leicht ersichtlichem Grunde nicht zu. Auf den Radicandus 349450 folgt im Fortgange des Beweises ein zweiter, der > 1000000, und ein dritter, der > 5000000 ist. Die Ganzen der entsprechenden Wurzeln stehen als genaue Werte da, nur die auslaufenden Brüche, d. i. verhältnismäßig geringe Werte, sind durch Annäherung abgerundet. Da nun jedesmal für die Abrundung des nächstfolgenden Wurzelbruches hauptsächlich die Ganzen der Wurzel maßgebend sind, so muß der Fehler mit der Fortsetzung der Ausrechnung sich verringern. Dies ist schon aus der obigen Uebersicht (S. 419) zu erkennen; doch mögen hier noch die genauen Verhältniszahlen beigefügt werden. Archimedes hat mit einer Annäherung für $\sqrt{3}$ begonnen, welche um 14 Milliontel des genauen Wurzelwertes hinter dem letzteren zurücksteht; dann freilich erhöht sich bei $\sqrt{349450}$, da hier als auslaufender Bruch $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ genommen ist, das Minus auf 30 Milliontel des genauen Wurzelwertes; allein schon bei $\sqrt{1373943\frac{33}{64}}$ sinkt es auf 24 Milliontel, um zuletzt bei $\sqrt{5472132\frac{1}{16}}$ auf ein Minus von weniger als 4 Millionteln herabzugehen.

Sehen wir nun, wie Archimedes mit seiner Abrundung $591\frac{1}{8}$ weiter gerechnet hat (S. 387 f.). Er zählt dazu 571, erhält so den Bruch

1) Das läßt sich auch durch einen Vergleich mit dem modernen Rechnen verdeutlichen. Wir pflegen ohne Bedenken, wenn der Zusammenhang der Rechnung es erfordert, einen weniger genauen Decimalbruch statt eines gegebenen gemeinen Bruches, z. B. $\frac{1}{7}$, zu setzen und rechnen die Decimalstellen nicht weiter aus, als die gesamten Voraussetzungen der Aufgabe es nötig machen. Man wird also je nach Bedarf 0,14286, 0,1429, 0,143, ja selbst 0,14, statt $\frac{1}{7}$ setzen können. Decimalbrüche kannten die Alten nicht, wohl aber hatten sie als Analogon die binären Brüche, welche, ähnlich wie die Decimalbrüche, geeignet sind, jeden andern gegebenen Bruch annähernd darzustellen (vgl. S. 383 Anm. 1). In diesem Sinne war also Archimedes, vorausgesetzt, daß damit kein Fehler in das Endresultat der Rechnung kam, wohl berechtigt $\frac{1}{2^3}$ zu sagen statt $\frac{1}{7}$.

$\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$, rechnet das Quadrat davon aus und bildet wieder durch Addition den Bruch $\frac{1373\,943\frac{33}{64}}{153^2}$. Die Wurzel aus dem Zähler hält 1172 Ganze und es bleiben als Rest $359\frac{33}{64}$. Also ist die gesuchte Wurzel, die wir kurz mit R bezeichnen wollen, nach Satz 4 (S. 396) kleiner als $1172 + \frac{359\frac{33}{64}}{2\cdot 1172}$, und daraus folgt weiter nach Satz 5

$$R > 1172 + \frac{359\frac{33}{64}}{2\cdot 1172 + 1}, \text{ also um so mehr (S. 414)}$$

$$> 1172 + \frac{359}{2\cdot 1172 + 1}.$$

Da nun $2\cdot 1172 + 1 = 2345$ nahezu das Siebenfache von 359 beträgt und $\frac{1}{7} = \frac{359}{2513}$ auch die Bedingung erfüllt, kleiner als $\frac{359}{2345}$ zu sein, so würde Archimedes den auslaufenden Bruch gewiß auf $\frac{1}{7}$ abgerundet haben, wenn er nicht auch hier den noch kleineren Wert $\frac{1}{7+1}$ vorgezogen hätte, um den nächsten binären Bruch zu erhalten[1]).

Zu $1172\frac{1}{8}$ zählt er dann die vorher berechneten $1162\frac{1}{8}$ hinzu und erhält so den Bruch $\frac{2334\frac{1}{4}}{153}$. Hier ist ferner der Zähler $2334\frac{1}{4}$ zu quadrieren und zu dem Quadrat sind 23409 hinzuzählen. Aus der Summe $5472132\frac{1}{16}$ ergiebt sich die Wurzel

$$R > 2339 + \frac{1211\frac{1}{16}}{2\cdot 2339 + 1} > 2339\frac{1}{4}.$$

Hier haben wir einen Augenblick innezuhalten und zu fragen: was wäre herausgekommen, wenn Archimedes mit dem genaueren Werte $591\frac{1}{7}$ weiter gerechnet hätte? Die Antwort lautet: bei der von Archimedes eingehaltenen Methode starker Kürzungen der auslaufenden Brüche, dasselbe wie vorher. Denn es wäre dann $591\frac{1}{7} + 571 = 1162\frac{1}{7}$ quadriert worden zu $1350576\frac{1}{49}$. Hierzu wäre 23409 addiert und aus der Summe die Wurzel R gezogen worden. Es hätte sich ergeben

$$R > 1172 + \frac{401\frac{1}{49}}{2\cdot 1172 + 1} > 1172\frac{1}{8}.$$

Hiernach würde die Summe $1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{7} = 2334\frac{15}{56}$ quadriert und zu dem Quadrate würden 23409 gezählt worden sein. Das

1) Vgl. oben S. 420 Anm. *.

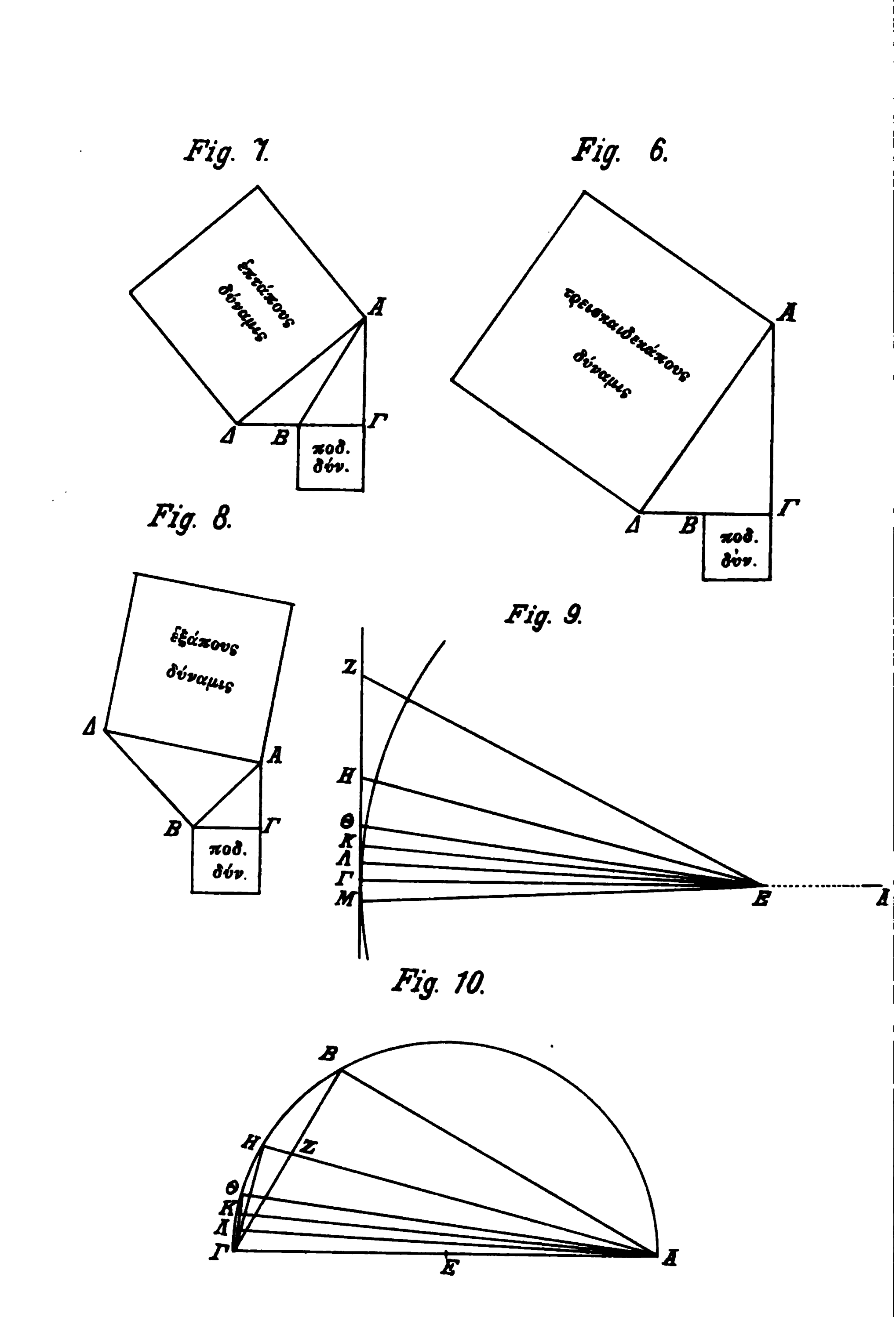


Fig. 7.
ἑπτάπους
δύναμις
Α
Δ
Β
Γ
ποδ.
δύν.
Fig. 6.
τρεισκαιδεκάπους
δύναμις
Α
Δ
Β
Γ
ποδ.
δύν.
Fig. 8.
ἑξάπους
δύναμις
Δ
Α
Β
Γ
ποδ.
δύν.
Fig. 9.
Ζ
Η
Θ
Κ
Λ
Γ
Μ
Ε
Α
Fig. 10.
Β
Η
Ζ
Θ
Κ
Λ
Γ
Ε
Α

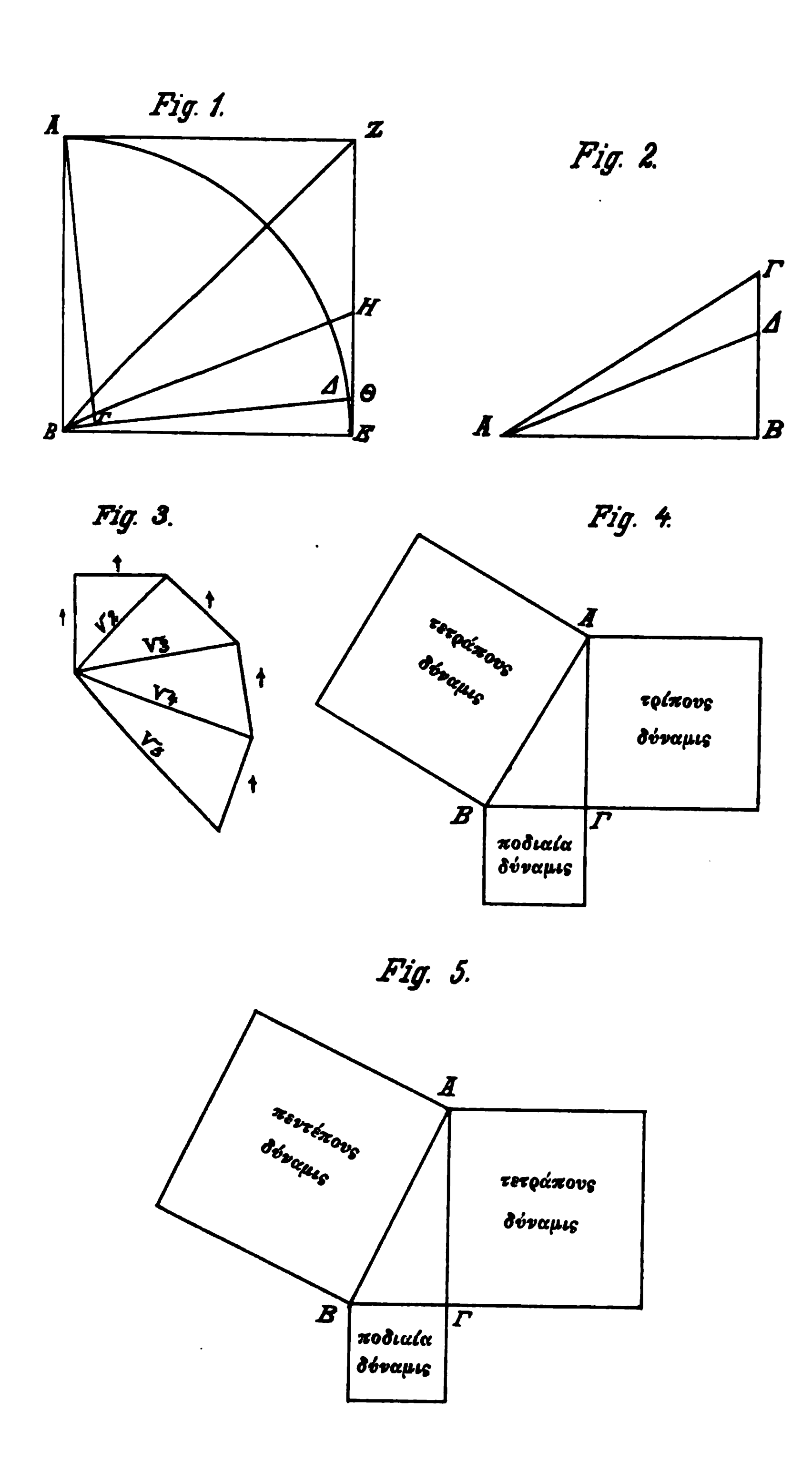
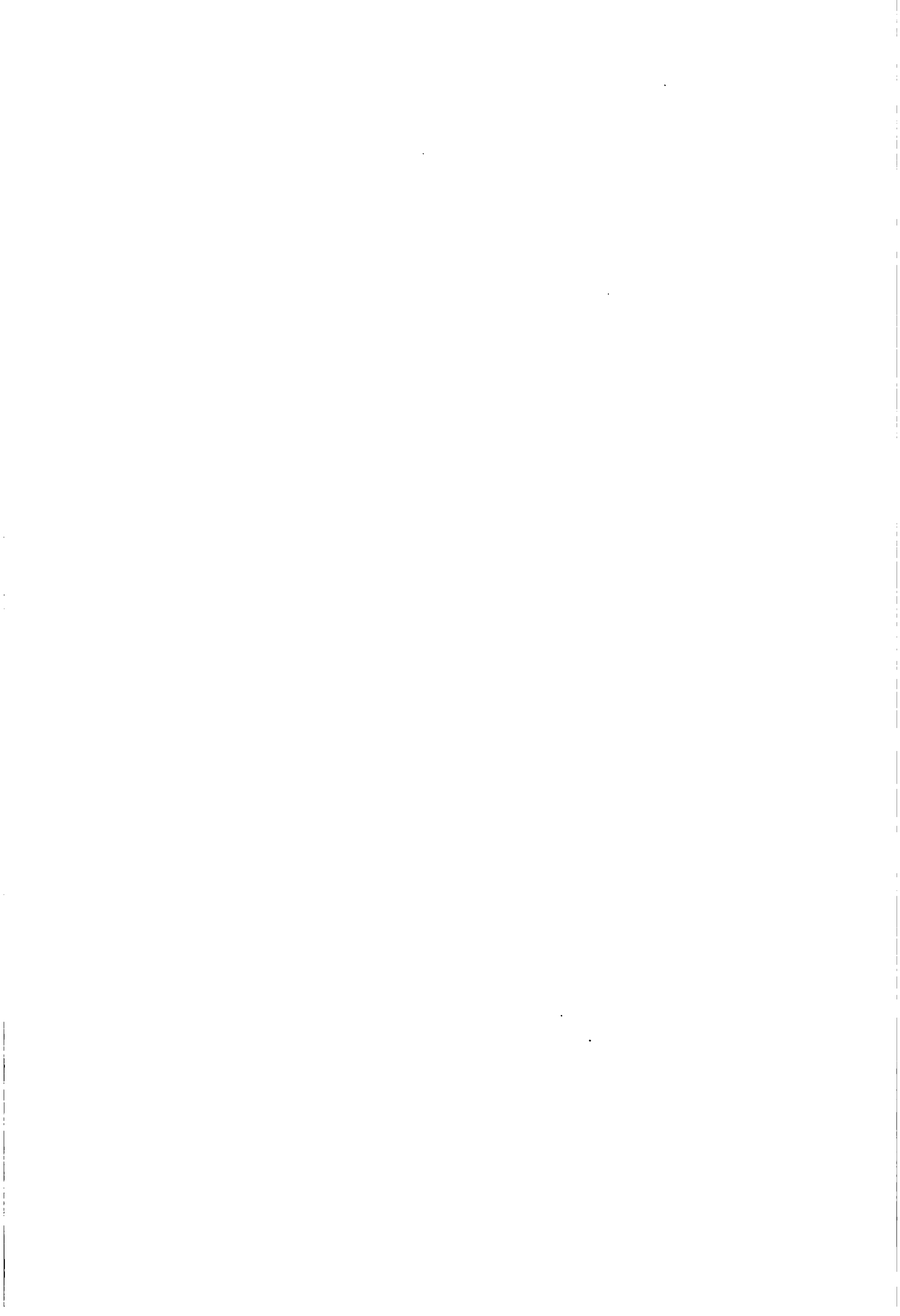


Fig. 1.
A
Z
H
Δ
Θ
B
Γ
E
Fig. 2.
Γ
Δ
A
B
Fig. 3.
1
√2
√3
√4
√5
Fig. 4.
A
τετράπους δύναμις
τρίπους δύναμις
B
Γ
ποδιαία δύναμις
Fig. 5.
A
πεντέπους δύναμις
τετράπους δύναμις
B
Γ
ποδιαία δύναμις



hätte 5472409 und dazu in Annäherung den Bruch $\frac{79}{84}$ ergeben. Die Wurzel daraus hätte 2339 Ganze, d. i. dasselbe wie vorher, und dazu einen Bruch ergeben, welcher kleiner sowohl als $\frac{1}{8}$ wie als $\frac{3}{8}$ ist. Es war aber ein genäherter Wert, welcher kleiner als der in der Rechnung auslaufende Bruch ist, zu suchen, und da boten sich nur zwei Näherungen in binären Brüchen, nämlich die genauere $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$, und die weniger genaue $\frac{1}{4}$ dar. Nun läßt sich leicht nachweisen, daß Archimedes, auch wenn er die schwierige Weiterrechnung mit $\frac{5}{16}$ nicht gescheut hätte, zu keinem andern Schlußresultat als dem uns überlieferten gekommen wäre; es war also für den auslaufenden Bruch die zwar weniger genaue, aber bei weitem bequemere und dem Endzwecke der gesamten Rechnung vollkommen genügende Näherung $\frac{1}{4}$ auch in dem Falle vorzuziehen, daß, wie wir jetzt vorausgesetzt haben, von $591\frac{1}{7}$ (statt $591\frac{1}{8}$) aus weiter gerechnet wurde.

Gewiß ist anzunehmen, daß Archimedes, ehe er zu der Wahl der weniger genauen, aber bequemeren Näherung $591\frac{1}{8}$ sich entschloß, dieselbe Rechnung mit $591\frac{1}{7}$, die wir soeben hypothetisch dargelegt haben, wenigstens soweit ausgeführt hat, bis er sich überzeugte, daß die Kürzung $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ keinen Fehler in das Schlußergebnis bringen würde.

Zu dem Schlusse dieses Teiles der Archimedischen Rechnung ist nur Weniges zu bemerken. Zu $2339\frac{1}{4}$ wurden die vorher berechneten $2334\frac{1}{4}$ gezählt und das Verhältnis der Summe $4673\frac{1}{2}$ zu 153 umgebildet zu der Begrenzung, daß der Umfang des um den Kreis geschriebenen Sechsundneunzigeckes zum Kreisdurchmesser in einem kleineren Verhältnis steht als $96 \cdot 153 : 4673\frac{1}{2} = \left(3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}\right) : 1$. Was weiter folgt, ist bereits oben (S. 389) angedeutet worden; es kommt aber außerdem noch für den Anfang des nun folgenden Abschnittes in Betracht.

IX.

Obwohl der Titel dieser Untersuchungen nur auf die Näherungswerte von Quadratwurzeln hinweist, so ist doch, ehe wir abschließen, noch zu erörtern, wie Archimedes zuletzt auf die Annäherung $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ gekommen ist. Denn nur um dieser Begrenzung willen sind alle vorher vorkommenden Wurzeln ausgerechnet worden, und es ist zu erwarten, daß, nachdem die von Archimedes dabei angewendete Methode erkannt worden ist, daraus zugleich ein Aufschluß sich ergeben wird über die schließ-

liche Begrenzung des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser.

Durch Wurzelausziehungen war Archimedes im ersten Teile seines Beweises zu dem Ergebnis gelangt, daß der Umfang des umgeschriebenen Sechsundneunzigeckes zum Kreisdurchmesser in einem kleineren Verhältnis steht als $\left(3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}\right) : 1$ (vgl. S. 389. 423). Der auslaufende Bruch war zu kürzen, und zwar zu einem Betrage, der **größer** als dieser Bruch sein mußte. Was konnte nun näher liegen, als das schon vorher so oft angewendete Verfahren, zu einem gegebenen Bruche den passenden **größeren** Wert zu finden, indem man den Nenner um 1 **verkleinerte**? Der Versuch ergab $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{7}$, und es war damit die gewünschte Annäherung definitiv gefunden, denn wenn der Nenner des gekürzten Bruches kleiner als 100 bleiben sollte, so war ersichtlich, daß aus der Reihe der Brüche mit ganzzahligen Zählern und mit den Nennern 7, 8, 9 . . . 98, 99 kein Bruch beigebracht werden kann, der größer als $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ wäre und zugleich näher bei letzterem Bruche läge als $\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \ldots \frac{14}{98}$. Dieselbe Kürzung war endlich um so mehr für das Schlußergebnis $\pi < 3\frac{1}{7}$ gültig.

Wieder durch Wurzelausziehungen kam Archimedes im zweiten Teile seines Beweises zu dem Ergebnis, daß der Umfang des eingeschriebenen Sechsundneunzigeckes, und um so mehr der Umfang des Kreises zum Kreisdurchmesser in einem größeren Verhältnis steht als $6336 : 2017\frac{1}{4}$. Letzteres Verhältnis ist nun, ähnlich wie im ersten Teile, umzubilden zu $\left(3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}\right) : 1$, und weiter, indem die Brüche aus Zähler und Nenner entfernt werden, zu $\left(3 + \frac{1137}{8069}\right) : 1$. Der auslaufende Bruch war zu kürzen, und zwar zu einem Betrage, der **kleiner** als dieser Bruch sein mußte.

Versuchen wir also zunächst, was herauskommt, wenn der Bruch durch Hinzufügung von 1 zum Nenner verkleinert wird. Wir erhalten dann $\frac{1137}{8070} = \frac{379}{2690}$. Die Division 2690 : 379 ergiebt einen Quotienten, der zwischen den ganzen Zahlen 7 und 8 liegt; also ist

$$\frac{1}{7} > \frac{379}{2690} > \frac{1}{8}.$$

Nun war aber bereits gefunden, daß $3\frac{1}{7} > \pi$ ist. Die Aufgabe war also darauf zurückgeführt, für π zwischen $3\frac{379}{2690}$ und $3\frac{1}{8}$ einen

Wert $3 + \frac{x}{y}$ der Art zu finden, daß der auslaufende Bruch erstens sich erheblich kürzen ließ, zweitens aber auch möglichst nahe bei $\frac{379}{2690}$ lag.

Sicherlich hat Archimedes es nicht unterlassen durch Ausrechnung sich zu vergewissern, daß in der That $\frac{379}{2690} > \frac{1}{8}$ ist[1]). Dabei mag sich ihm nun die Beobachtung dargeboten haben, daß der erstere Bruch nur einer geringen, und zwar den Voraussetzungen der Rechnung entsprechenden Umwandlung bedarf, um durch 38 gekürzt werden zu können. Denn wenn $\frac{379}{2690} > \frac{1}{8}$ ist, so ist auch $\frac{379+1}{2690+8} > \frac{1}{8}$ *), d. i. $\frac{10}{71} > \frac{1}{8}$, und dieser gekürzte Bruch $\frac{10}{71}$ hat den Vorzug vor $\frac{1}{8}$, daß seine Differenz von $\frac{379}{2690}$ weit geringer ist als die Differenz $\frac{379}{2690} - \frac{1}{8}$ **).

Somit war zu der obigen Begrenzung $3\frac{1}{7} > \pi$ die andere Begrenzung $\pi > 3\frac{10}{71}$ hinzugetreten und es hatte sich beiläufig herausgestellt, daß, gleichwie beim Wurzelausziehen (S. 397. 419. 422), so auch bei der Berechnung von π zu einem anfänglich berechneten größeren Grenzwerte ein passender kleinerer Wert sich darbot, wenn man, nachdem der auslaufende Bruch $\frac{1}{7}$ zu $\frac{10}{70}$ erweitert worden war (vgl. S. 424), den letzteren Nenner um 1 vergrößerte.

---

1) Nachdem beide Brüche auf den gemeinschaftlichen Nenner 2690 · 4 gebracht worden sind, ergiebt sich der Zähler 379 · 4 = 1516 größer als der Zähler $\frac{2690}{2} = 1345$.

*) Diesen Weg der Kürzung hat Dr. Franz Rietzsch (vgl. S. 395 Anm. 1) gezeigt, indem er mir mitteilte, daß zu $\frac{1137}{8069}$ im Zähler 3 und im Nenner 25 hinzuzählen ist, um zu $\frac{10}{71}$ zu gelangen, und daß, da $\frac{1137}{8069} > \frac{3}{25}$ ist, auch $\frac{1137}{8069} > \frac{1137+3}{8069+25}$, d. i. $> \frac{10}{71}$ ist. Ich habe dann die Zwischenstufe $\frac{1137}{8069} > \frac{1137}{8069+1}$, d.i. $> \frac{1137}{8070}$ eingeschaltet und bin so auf die Begrenzung zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{7+1}$ gekommen, die aller Wahrscheinlichkeit nach von Archimedes gesetzt worden ist, ehe er an die genauere Ausrechnung ging; denn es war ja bereits $3\frac{1}{7} > \pi$ ermittelt (S. 389. 424). Der allgemeine Beweis, daß, wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ist, auch

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d}$$

ist, findet sich bei Pappos Synag. VII Propos. 8. Aehnlich wird (was für meine Annahme erforderlich ist) erwiesen, daß unter derselben Voraussetzung auch $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$ ist. Beide Hülfssätze mit ihren Beweisen sind ohne Zweifel schon dem Archimedes bekannt gewesen.

**) Es ist nämlich $\frac{379}{2690} - \frac{10}{71} = 0{,}000047$; dagegen $\frac{379}{2690} - \frac{1}{8} = 0{,}01589$.

Wir haben nun zu dem Wortlaute bei Archimedes zurückzukehren. Das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser soll größer sein als $6336 : 2017\frac{1}{4}$. Um in dem Verhältnis $3\frac{1137}{8069} : 1$, welches $= 6336 : 2017\frac{1}{4}$ ist, hinter 3 einen kleineren auslaufenden Bruch zu erhalten, soll zu dem Bruche $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$ ein zwar kleinerer, aber möglichst wenig entfernter Bruch der Art ermittelt werden, daß in demselben Zähler und Nenner so stark, als nur immer thunlich, gekürzt werden können. Der Nachweis des nächst kleineren Wertes mußte in diesem Falle an den Zähler geknüpft werden; denn nur so ließ auch die feinste Differenz zwischen dem gegebenen und dem dazu gesuchten Bruche sofort sich erkennen. Da nun $3\frac{10}{71}$ nach den vorhergegangenen Ausrechnungen die Wahrscheinlichkeit für sich hatte, der gesuchte Grenzbetrag zu sein, so war diese gemischte Zahl auf gleichen Nenner mit $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$ zu bringen. Der Zähler des zu berechnenden Bruches war also $= 2017\frac{1}{4} \times 3\frac{10}{71} = 6335\frac{247}{284}$, d. i. ein Betrag, der um ein Minimum hinter dem gegebenen Zähler zurückstand. Je kleiner die Differenz im Zähler, desto genauer die Abrundung; also wurde definitiv statt $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$ der um ein Minimum kleinere Betrag

$$\frac{6335\frac{247}{284}}{2017\frac{1}{4}} = \frac{2017\frac{1}{4} \times 3\frac{10}{71}}{2017\frac{1}{4}} = 3\frac{10}{71}$$

als der gesuchte Grenzwert hingestellt.

Ob nun Archimedes als gewissenhafter Rechner sich überzeugt hat, daß es unmöglich sei eine genauere Begrenzung als $\pi > \frac{223}{71}$ unter der Bedingung, daß der Nenner des Bruches kleiner als 100 bleibe, aufzufinden, muß dahingestellt bleiben. Die Wahrscheinlichkeit neigt dahin, daß er nichts unterlassen hat, um auch diesen Teil seiner Beweisführung vollkommen einwandfrei zu halten; doch würde es zu weit führen, auch auf diese, über den Rahmen der gegenwärtigen Untersuchung hinausliegende Frage hier einzugehen.

X.

Ueberblicken wir zum Schlusse nochmals die bisherigen Untersuchungen, so stellt sich als Gesamtergebnis heraus, daß Archimedes bei der Ausrechnung irrationaler Quadratwurzeln ausschließlich die Methode eingehalten hat, zum Radicandus die

nächste Quadratzahl, also die nächste Zahl mit rationaler Wurzel, aufzusuchen und aus der Differenz dieser Quadratzahl und des Radicandus eine möglichst gekürzte Annäherung des auslaufenden Bruches der Quadratwurzel zu ermitteln.

Da er die Wurzeln nur durch annähernde Begrenzung dargestellt hat, so brauchte er in jedem Einzelfalle entweder einen größeren oder kleineren Wert als die gesuchte Wurzel.

Zur Auffindung des größeren Wertes verwendete er nach einem Satze der Elemente Euklids die Formel $\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$. Den kleineren Wert sicherte er sich in jedem Falle durch eine Formel, welche auf dem Satze beruht, daß die Differenz zweier auf einander folgenden Quadratzahlen gleich der Summe ihrer Wurzeln ist.

Die Wurzel aus 3 hat er durch eine Reihe von Annäherungen umgrenzt, welche von der Identität $3 = 2^2 - 1$ ausgingen. Die Quadrierung der zuerst berechneten, noch nicht genauen Annäherungen führte nach einem leichten und schnellen Verfahren zu immer genaueren Grenzwerten. Archimedes blieb bei der Begrenzung $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ stehen, weil er nicht zu Zahlen aufsteigen wollte, die größer als 10000 sind. Bei dieser Beschränkung war $\frac{1351}{780}$ der genaueste Wert, der sich auffinden ließ, und aus diesem wurde nun die anderseitige Begrenzung $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ ermittelt.

Bei der Umgrenzung von $\sqrt{3}$ waren die dem Radicandus nächsten Quadratzahlen jedesmal schon durch die vorherige Ausrechnung gegeben; bei den andern in der Kreismessung zu berechnenden Wurzeln war die nächste Quadratzahl erst zu suchen. Demnach wurden aus dem Radicandus zunächst die Ganzen der Wurzel nach einer Methode ausgezogen, welche auf der Einsicht beruhte, daß die griechischen Zahlwörter (und in der Hauptsache auch die Zahlzeichen) nach decimalem Systeme gebildet sind. So wurde zunächst ermittelt, welche von den Zahlen 1, 2 . . . 8, 9 die oberste dekadische Stelle der Wurzel einnehmen würde. War diese Zahl gefunden, so ließ sich nach der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ die nächste oder, wenn diese überhaupt nicht zu besetzen war, die dann nächste dekadische Stelle der Wurzel bestimmen und, nachdem der fertig ausgerechnete Teil der Wurzel wiederum $= a$ gesetzt worden war, das nächste Glied b, und so fort immer ein folgendes Glied berechnen, bis keine Ganzen mehr auszuziehen waren. Wenn der dann verbleibende Rest vergli-

chen wurde mit der ausgerechneten Zahl der Ganzen der Wurzel, so war sofort zu erkennen, ob das Quadrat dieser Zahl von Ganzen oder das Quadrat der um 1 höheren Zahl die dem Radicandus nächste Quadratzahl darstellt, und daraus ergab sich weiter die Annäherung für den auslaufenden Bruch.

Bei dieser Annäherung hat Archimedes nicht in allen Fällen den überhaupt nächsten kleinzahligen Bruch, sondern einigemal den nächsten Wert aus der Reihe der binären Brüche gewählt, immer aber mit der Maßgabe, daß dadurch die Richtigkeit der Näherungsrechnung nicht beeinträchtigt wurde.

Dasselbe Verfahren, welches Archimedes erfunden hatte, um zu einem Werte, der größer als die gesuchte Wurzel ist, einen passenden kleineren Wert hinzuzufügen, nämlich die Vergrößerung oder Verkleinerung des Nenners um 1, hat er auch angewendet, um vorläufig zu den zuerst berechneten Näherungswerten für π andere, abgekürzte Näherungswerte zu erhalten. Ein so gefundener unechter Bruch konnte entweder, nachdem er durch Ausrechnung kontrolliert worden war, definitiv als Näherungswert eintreten, oder er führte doch, wieder nach der Methode der Einschließung des gesuchten Wertes zwischen zwei Grenzen, zu demjenigen Näherungswerte, bei dem es zu bewenden hatte. So hat Archimedes als Nenner für den einen Grenzwert eine kleinere Zahl als 10 und für den andern Grenzwert eine kleinere als 100 gefunden.

Daß Archimedes das Gebiet der Arithmetik mit nicht minderer Sicherheit und mit ebenso genialer Erfindungsgabe beherrscht hat wie die höhere Geometrie und die Mechanik, war schon früher aus seiner Sandrechnung und einigen Einzeluntersuchungen, die in anderen seiner Schriften eingefügt oder wenigstens angedeutet sind, zu ersehen. Durch die Erschließung der bei der Kreismessung angewendeten Methoden ist, so hoffen wir, ein Zweig mehr in den unvergänglichen Ruhmeskranz des größten Mathematikers des Altertums eingeflochten worden.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1893.

(Fortsetzung.)

The Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College:
Bulletin. Vol. XXIII. N. 5.
The Academy of Natural Sciences of Philadelphia:
Proceedings 1892. Part II. April — October. Philadelphia 1892.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. XII. N. 102. Baltimore 1893.

Nachträge.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. Twaalfde Deel. Nieuwe Reeks, Veerde Deel. 1. Afl. Leiden 1893.

März und April 1893.

Kön. Preuss. Akademie der Wissensch. zu Berlin:
Sitzungsberichte IX—XX. Berlin 1893.
Kön. Bairische Akademie der Wissensch. zu München:
a. Sitzungsberichte: a. mathematisch-physikalische Classe. 1892. Heft III. 1893. Heft I. b. philosophisch-philologische und historische Classe. 1892. Heft IV. München 1893.
b. Festrede geh. am 15. Nov. 1892 v. F. v. Reber. Kurfürst Maximilian I. von Bayern als Gemäldesammler.
c. Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe. 19. Band. 3. Abtheilung. München 1892.
Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
Berichte über die Verhandlungen. Mathematisch-physische Classe. 1892. IV—VI. Leipzig 1892.
Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
Zeitschrift. Band 46. IV. Heft. Leipzig 1892.
Astronomische Gesellschaft:
Vierteljahrsschrift. 27. Jahrgang. 4. Heft. Leipzig 1892.
Sach- und Orts-Verzeichniss zu den Mineralogischen und Geologischen Arbeiten von Gerhard vom Rath. Im Auftrage der Frau vom Rath bearbeitet von W. Bruhns und K. Busz. Leipzig 1893.
Leopoldina. Heft XXIX. N. 3—6. Halle a. S. 1893.
Verein für Erdkunde zu Dresden:
Jahresbericht XXII. Dresden 1892.
Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald:
Mittheilungen. 24. Jahrgang 1892.
P. E. Richter, Litteratur der Landes- und Volkskunde des Königreichs Sachsen. Nachtrag 1. Dresden 1892.
Handbuch der organischen Chemie von F. Beilstein. Dritte Auflage. Lieferung 15—18. Hamburg u. Leipzig 1893.
Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung von H. v. Helmholtz. (Separatabzug aus den Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge Band XLVIII 1893). Leipzig.
Astrophysikalisches Observatorium zu Potsdam:
Publicationen. Achter Band. Potsdam 1893.
Naturwissenschaftlicher Verein zu Bremen:
Abhandlungen. XII. Band. 3. Heft. Bremen 1893.

chen wurde mit der ausgerechneten Zahl d
so war sofort zu erkennen, ob das Qua ...sbericht und b. wissenschaft-
zen oder das Quadrat der um 1 höh... zu Altenburg i. S. A.:
dus nächste Quadratzahl darst... Neue Folge. 5. Band.
...burg i. S. A. 1892.
ter die Annäherung für den a... ...nberg:

Bei dieser Annäherung
den überhaupt nächsten ... zum Abdrucke bestimmten geschnittenen Holz-
nächsten Wert aus d... Jahrhundert. Erster Theil. XV. u. XVI. Jahrh.
aber mit der Maßg... ...isches Institut:
rechnung nicht ... ...logisches Jahrbuch für 1891. Beobachtungssystem des
...Sachsen. II. Hälfte oder III. Abth. d. IX. Jahrg. 1891.
Dasselbe ... Königreiches Sachsen. Heft 1. 2. Chemnitz 1892—93.
zu einem ... 16:4. Berlin, Stockholm, Paris 1893.
...-Ungarn).
passend ... Geologische Reichsanstalt:
oder ... Jahrgang 1892. XLII. Band. 3. u. 4. Heft.
ur ... Verhandlungen. N. 17. 18. 1892. Titel. N. 1. 1893. Wien 1893.
Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:
a. Venetianische Depeschen vom Kaiserhofe. Herausgeg. von der historischen Commission. 2. Band.
b. Verzeichniss einer Anzahl von Arbeiten, welche für den Sommer 1893 in Aussicht genommen sind. (Verbesserter Abdruck). Wien 1892 – 93.

K. K. Gradmessungs-Bureau. Publikationen für die Internationale Erdmessung: Astronomische Arbeiten. IV. Band, Längenbestimmungen. Wien 1892.
Oesterreichische Gesellschaft für Gradmessung:
Meteorologische Zeitschrift (auch für die Deutsche Met. Gesellsch.). 1893. Heft 2—4. Wien 1893.
Königl. böhmische Gesellschaft der Wissensch. in Prag:
a. Sitzungsberichte: 1. Philos.-histor.-philolog. Classe. 1892.
2. Mathem.-naturwissenschaftliche Classe. 1892.
b. Jahresberichte für 1892. Prag 1893.
Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:
Bericht für 1892. Prag 1893.
Naturwissenschaftlicher Verein in Steiermark:
Mittheilungen. Jahrg. 1891 (der ganzen Reihe 28. Heft). Graz 1892.
Verein für siebenbürgische Landeskunde:
a. Archiv. Neue Folge. 24. Band. 3. Heft.
b. Jahresbericht für das Vereinsjahr 1891/92. Hermannstadt 1892.
Akademie der Wissenschaften in Krakau:
Anzeiger 1893. Februar. März. Krakau 1893.
Ungarische Akademie der Wissenschaften:
Ungarische Revue. 1.—2. Heft. 1893. 13. Jahrgang. Budapest 1893.
Ertesitö az Erdély Muzeum-Egylet, Oroos-Természettudowányi Szakosztályából 1892. XVII Évfolyam:
a. I. Oroosi Szak. II, III Füzet.
b. II. Természettudomanyi Szak. III Füzet.
c. III. Népszerii Szak. II u. III Füzet. Kolozsvart 1892.
(Schweiz).
Astronomische Mittheilungen von Dr. Rudolf Wolf. Zürich 1893.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

n Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

12. Juli. **№ 11.** 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Mai.

Die Ehe bei den Arabern.

Von

J. Wellhausen.

Diese *παραδόξων ἐθῶν συναγωγή* ist eine Nachlese zu der Ernte, die Andere, namentlich WRSmith, gehalten haben[1]). Das Material ist statistisch geordnet, nach sachlichen Gesichtspunkten, die für die historische Genesis nicht bindend sind. Natürlich soll damit kein System des arabischen Eherechts gegeben werden, sondern nur ein unverfängliches Schema, das zu Nachträgen geeignet ist. Der zu beschreibende Zustand der Dinge herrschte um die Zeit Muhammads, der Islam machte auf diesem Gebiet nicht überall einen scharfen Einschnitt.

I. Verlobung und Brautgeld. Raubehe.

1. Bei der richtigen Ehe geht ein Rechtsakt der Heirath voraus, die Verlobung oder Trauung. Der Valî, d. i. der Vater,

1) Freytag, Einleitung in das Studium der arab. Sprache (Bonn 1861). Wilken, das Matriarchat bei den alten Arabern (Leipzig 1884). WRSmith, Journal of Philology IX 75 sq. Derselbe, Kinship and Marriage in early Arabia. Nöldeke, Oest. Monatsschrift für den Orient 1884 p. 301 ss. Derselbe DMZ 1886 p. 148 ss. Snouck-Hurgronje, Mekka II 102 ss. (Haag 1889).

Bruder oder Vetter der Braut, unter dessen Mund (Vilâ) sie steht, verlobt sie. Das heißt: er überträgt die Gewalt über sie an den Freier und zwar gegen Bezahlung des Brautgeldes (Mahr). Das ist die Trauung, dadurch wird die Ehe als Rechtsverhältnis geschlossen. Der Mann kann nun seine Frau heimführen; will er es nicht, so muß er sich von ihr scheiden. Der Name für Verlobung ist Tazvîg, von dem griechischsn ζεῦγος[1]). Doch gibt es auch ein einheimisches Wort dafür, Tamlîk oder Imlâk[2]). Hie und da, namentlich in Mekka, geschieht der Akt öffentlich im Gemeindehaus oder in der Gemeindeversammlung[3]).

Liebesverhältnisse legen zuweilen den Grund zur Ehe, namentlich solche zwischen Kindern[4]). Sie können aber auch ein Hindernis derselben sein; etwa dem entsprechend, daß bei uns die Ehebrecher sich nicht heirathen dürfen. Es kommt oft vor, daß die Vormünder das Mädchen dem Liebhaber nicht geben wollen, weil sie sein Vorgehn als Eingriff in ihre Rechte und in das Recht betrachten[5]). Das öffentliche Liebeln und besonders das Ansingen empfindet auch die Geliebte, wenn sie etwas auf sich hält, als eine Bloßstellung[6]), ihrer selbst und ihrer Familie; und äußerst häufig ist Beschimpfung in der That die Absicht des Liebesdichters.

Natürlich wird oft die Tochter, von liebenden Eltern, gefragt, ob sie den Freier haben will. Im Islam muß sie gefragt werden; ihr Stillschweigen gilt als Einverständnis.

Das Vilâ über Töchter, Schwestern und andere weibliche Verwandte, das Recht sie zu verloben, gilt als nutzbringendes Kapital, sofern der Vormund das Brautgeld bekommt (WRSmith p. 78). So namentlich bei geringen Leuten, die freilich manchmal Schwie-

---

1) Construirt mit doppeltem Akkusativ, mit Akkus. des Mannes und من der Frau (Agh. VIII 49, 9) und umgekehrt (IX 149, 31).

2) Kamil 557, 12. Bochari III 193, 16. IV 30, 22 (Bulaq 1289). Tabari III 757, 15. 941, 4. Snouck II 158 ss.: Mulka und Mumlik.

3) BHischam 80, 11 sq. Agh. XIV 138, 10 sq. XIX 7, 26 sqq. 65, 22 sqq. 131, 2. XX 12, 1. Snouck II 163. 164. Im Islam hat die Obrigkeit (das Sultân) die Obervormundschaft und wird vielfach in Ehesachen angerufen, ebenso wie seiner Zeit der Prophet es wurde; doch hat daneben auch das Geschlecht eine Art Ehegerichtsbarkeit behalten.

4) Snouck II 106. Kinderverlobung durch die Eltern in den Leges Homerit. § 13.

5) Agh. XII 170, 3. XX 181, 11: die Araber geben ihre Töchter keinem der sie angeliebelt hat. Nicht ganz richtig wird der Sachverhalt dargestellt von WRSmith p. 71. Verbot die Töchter zum Huren zu zwingen Boch. IV 164.

6) Der Terminus technicus dafür ist فضح. Merkwürdig Ham. 218 v. 1.

rigkeit haben, die Töchter los zu werden[1]). Bei den Vornehmen dagegen kommt es vor, daß sie keinen Freier heranlassen[2]). Sie sehen in der Verheirathung ihrer Töchter eine Selbsterniedrigung, sie ziehen es wohl gar vor sie zu töten. Denn die Sitte die neugeborenen Mädchen lebendig zu verscharren wird nicht bloß von den Armen aus Noth geübt, sondern auch von den Vornehmen „aus Furcht vor der Schande“[3]). Das Gefühl sitzt tief, daß es eigentlich eine Schmach sei, sein eigen Fleisch und Blut in der Gewalt eines fremden Mannes zu sehen[4]).

2. Für **Brautgeld** gibt es eine Anzahl Synonyma. Es sind jedoch ursprüngliche Unterschiede der Bedeutung zu erkennen, die sich erst mit der Zeit ausgeglichen haben.

Das auch im Hebräischen[5]) vorhandene alte Hauptwort für Brautgeld, *mahr*, ist der Preis, den der Valî für die Braut bekommt, wie WRSmith (p. 68. 78 sq.) erschöpfend nachgewiesen hat. Der Valî — wenn er nicht allzu nah verwandt ist — darf sein Mündel sich selbst verloben und braucht dann kein Mahr zu geben (Boch. III 206 und noch Agh. VIII 186 sqq. XIX 7 sqq.); zwei Vormünder können ihre Mündel zur Ehelichung austauschen, statt sich gegenseitig das Mahr zu bezahlen[6]). Neben dem Mahr können noch weitere Bedingungen gestellt werden, und an stelle der Zah-

1) BHischam 465, 3 sq. vgl. Vaqidi 147. Solche Leute sind dankbar, wenn etwa ein Dichter ihre Töchter anpreist (Agh. VIII 80, 11 sqq. IX 82, 5 sqq. XI 43, 7 sqq. XVI 123, 20 sqq.). Kupplerinnen, welche die Reize der (verhüllten und abgeschlossenen) Frauen den Männern beschreiben, sind in Mekka und Medina häufig (X 54, 31 XVII 119, 5 sqq.). Oefters bedienen sich die Freier eines Mittlers, der dann wohl auch einmal für sich selber wirbt (X 53, 5. XI 109, 17 sqq. XIII 55, 11 sqq.); vgl. den Proxenus Adulterii in den Leges Homeritarum § 16. Ueblich war indessen ein Schadchen (שַׁדְּכָן) nicht. Ueber die heutigen Verhältnisse vgl. Snouck II 157 sqq.

2) Agh. IX 149 (Aus b. Haritha), XIX 131 (Dhu 'lGaddain), WRSmith p. 266 sq.

3) XII 150, 23. Hamasa 141 v. 2.

4) Besonders für den Sohn ist es eine Schande, wenn seine Mutter sich wieder verheirathet.

5) Auch aramäisch מוהרא. Aber das gewöhnliche aram. Wort ist מכר (מכירתא = المهيرة Agh. XV 53, 5). Nach dem Hebräischen hat man angenommen, das bedeute einfach *verkaufen*. Aber auch im Hebräischen wird das Wort in der älteren Literatur nie vom Verkauf von Sachen gebraucht, sondern nur von der Dahingabe von Personen, auch ohne daß dafür ein Preis gezahlt wird. So in der bekannten häufigen Redensart: der Herr verkaufte sein Volk in die Hand der Feinde.

6) Das heißt شغار oder فشاغ Boch. III 202—205.

lung kann eine andere Leistung treten, z. B. eine Waffenthat oder Knechtsdienst[1]).

Mit dem Mahr wird im Koran (4, 3) konfundirt die *çaduqa* oder wie es gewöhnlich heißt, das *çadâq*. Ursprünglich ist das aber etwas anderes. Es heißt nicht Gebühr, wie Nöldeke meint (DMZ p. 154); das arabische صدق hat nicht die rechtliche Bedeutung des hebräischen und aramäischen צדק, es bedeutet immer nur: echt, zuverlässig, treu, aufrichtig, wahr[2]). Cadâq (auch als Abstractum III gebraucht) bedeutet zunächst Freundschaft, dann Geschenk — aber freies Geschenk, keine vertragsmäßig ausgemachte Zahlung[3]). So weit hat WRSmith (p. 76. 91) jedenfalls Recht, und noch weiter auch darin, daß während der feste Preis dem Valî zukommt, das freie Geschenk der Frau gegeben wird, jener bei der Verlobung, dieses bei der Heirath[4]). Dann wäre also Çadâq sowohl die Morgengabe als das Geschenk an die Buhle (אתנן im Gegensatz zu מהר). WRSmith stellt es mit Çadîqa (Freundin = Buhle) zusammen. Aber der spezifische Sinn von Çadîqa haftet nicht an Çadâq, nicht nur die Çadîqa bekommt ein Çadâq[5]).

Das spätere Verschmelzen des Çadâq mit dem Mahr wird dadurch begünstigt, daß auch das Mahr seinen ursprünglichen Sinn abschwächt. Wie es Gen. 31, 15 getadelt wird, daß Laban den Preis für seine Töchter sich selber zu Gemüthe führt, so kommt es schon vor dem Islam auf, daß das Mahr nicht dem Valî, son-

---

1) Agh. XI 45, 22. XIV 138, 5. 1 Sam. 18, 25. — Tâg unter ختن: Moses verdang sich بعقّة فرجه = dafür daß er eine Frau bekam. Gen. 29, 15 sqq.

2) صدق ist fast immer das Gegentheil von كذب; beides wird nicht bloß vom Reden gebraucht, sondern auch vom Thun und Wesen, z. B. Agh. XIV 32, 11 كان يكذب باللسان ويصدق بالفعال. Der Mann صدق, wenn er sich bewährt, seine Sache ordentlich macht, tapfer ist; كذب, wenn er versagt, feige ist, die Erwartungen täuscht. Von Sachen gesagt entspricht صدق dem deutschen *echt* im Volksmunde, z. B. ein *echter* Stock, zu dem man Du sagen kann. So رمح صدق, und im Gegensatz رمح كذب. Daß es verkehrt ist, vom Arabischen auszugehen, um den Sinn des hebräischen צדק zu bestimmen, liegt auf der Hand. — صدقة *Almosen, Steuer* ist jüdisch und aramäisch; schon auf der Inschrift von Taima heißt צדקת Gebühr.

3) Denominativ اصدق verschenken.

4) Freytag Einl. p. 203 verweist auf Hariri p. 68 (ed. 2, p. 79): اسم ما تعطى المراة فى النكاح الصداق.

5) Aehnlichen Sinnes wie صداق scheinen zu sein هديّة (Agh. X 49, 2. 56, 22 sq.), حلوان (Freytag p. 208) und نحلة (Sur. 4, 3. Boch. III 299). Jetzt صبحة Snouck II 186.

dern der Frau zufällt. Im Koran wird dies nicht erst eingeführt, sondern als bestehende Sitte vorausgesetzt. Daher kann اجر für مهر gesagt werden[1]) und umgekehrt مهر für اجر in der merkwürdigen Redensart مهر البغىّ (BHischam 123, 5. Boch III 236). Die muslimischen Frauen, die aus Mekka zu Muhammad nach Medina flüchten, müssen ihr Mahr an die Quraisch herausgeben, haben es also bei sich (Vaq. 263, vgl. freilich Sur. 60, 10). Guvairija bekommt ihre Freilassung als Mahr, ebenso Çafîja (ib. 178. 291).

Man sagt für مهر auch بُضع. Eigentlich ist das so viel wie اقتضاض laesio virginitatis, auch allgemein concubitus[2]). Dann die Entschädigung dafür. Derselbe Bedeutungsübergang findet sich bei عُقر (BHischâm 273, 6. 274, 20) und wohl auch bei dem hebräischen ארש[3]). Die Entschädigung wird natürlich an die Vormünder des Mädchens gezahlt, aber ursprünglich nicht, wie das Mahr, vor der Heirath, sondern nachher; die Verlobung hinkt in diesem Falle nach, wenn man aus der Etymologie Schlüsse ziehen darf. Indessen wie schon bei dem hebräischen ארש, so ist auch im Arabischen dieser Unterschied von عقر und مهر völlig verwischt.

Die Namen für Brautgeld weisen also auf ursprünglich verschiedene Typen der Ehe, die dann jedoch alle in einen herrschenden Typus zusammengesunken sind[4]).

3. Bis zum Islam war der Frauenraub in Arabien sehr im Schwange[5]). Die Heirath mit der Geraubten, ohne Vali und Mahr,

1) Sur. 5, 7. 33, 49. 60, 10. 65, 6.

2) Agh. VIII 139, 24. XVIII 111, 27 sq. 210, 3. Die Grundbedeutung ist الشجّة التى تقطع الجلد وتشقّ اللحم Kamil 275.

3) = ارش. Das Wort wird mit خدش und خمش erklärt und zum Beleg ein Vers des Ruba angeführt أصبح فما من بشر مأروش. Darnach bedeutet ارش zunächst die Verletzung und dann die Entschädigung (ähnlich ثأر und دم); es wird im Lisan ausdrücklich in dieser Beziehung mit عقر verglichen. Allerdings wird nun ارش nicht speziell von der Entschädigung für die laesa virginitas gesagt, sondern allgemein von der Entschädigung für eine leichte Verletzung. Aber das ist kein Grund gegen die Zusammenstellung mit ארש. Steht doch auch خمش von der laesio virginitatis (Agh. X 44, 17. XVIII 171, 19. XIX 117, 1. XX 65, 23).

4) Ausnahmsweise findet es sich, daß die Frau dem Manne etwas zubringt, vgl. unten § 3, 2.

5) Vgl. z. B. Nabigha 2, 15. 10, 28. 20, 11. 27, 29. Die Heirath mit der Frau des erschlagenen Mannes (13, 10), namentlich mit des besiegten Königs Töchterlein (Vaq. 237. 178. 278 sq.), ist der Triumph des Siegers, der bis dahin gelobt hat sich der Weiber zu enthalten. Bei leichten Fehden handelt es sich um die

ist zunächst nur eine Vergewaltigung; aber es erwächst daraus sehr oft eine Ehe[1]) — während das bei dem Verhältnis mit der ererbten oder gekauften Magd nicht leicht eintritt. Es wird darum die Ehe mit der Geraubten der Ehe mit der Verlobten koordinirt (Agh. XV 53, 5. BAthir IV 262, 26). Im Deuteronomium wird angegeben, wie eine richtige Ehe mit der Kriegsgefangenen zu schließen ist. Es scheint nicht, daß bei den Arabern der Uebergang der Geraubten zur Ehefrau formell markirt wurde; die Geburt von Kindern wird dabei von Einfluß gewesen sein. Muhammad fragt bisweilen kriegsgefangene Frauen, ob er ihnen als Sklavinnen beiwohnen solle oder als Ehefrauen; im letzteren Falle schenkt er ihnen die Freiheit als Brautgabe, sie aber müssen seine Religion annehmen. Urva b. alVard entläßt seine durch Raub erworbene Frau zu ihren Verwandten, um sie von diesen durch richtige Verlobung wieder zu bekommen. Aehnliches wird von alNamir b. Taulab erzählt (Agh. XIX 158, 25 sqq.). Das ist freilich nicht eigentlich eine Legitimirung der Raubehe, sondern eine nachträgliche Umwandlung derselben in eine Vertragsehe. Die Kinder der Geraubten sind frei, doch haftet an ihnen ein Makel; eben darum damit nicht seine Kinder „Kinder der Geraubten" heißen sollten, that Urva was er that. Solche Kinder haben nemlich keine *achvâl* (Müller und Nöldeke, Del. 43, 8); die Geraubte hat keinerlei Beziehungen zu ihrem Geschlechte und ihre Kinder kennen ihre mütterlichen Verwandten nicht.

2. Rücksichten für die Auswahl der Braut und des Freiers.

1. Ebenso wie bei den alten Hebräern (Gen. 29, 19) haben auch bei den Arabern der Ibn ʿAmm und die Bint ʿAmm ein Vorrecht auf einander (Agh. XIV 143, 21. 161 sq. XX 152 sqq.). Der Ibn ʿAmm ist nicht der Gegensatz zum Ibn Châl, nicht der pa-

---

Kamele, nur bei schweren um die Weiber (Ham. 250 v. 2). Aber schon vor dem Islam begingen die Stämme von Rabîʿa keinen Frauenraub unter einander

1) Der gewöhnlichste Fall ist wohl, daß die gefangene Frau (سبية oder اخيذة) gelöst wird. Dies geschieht auch dann noch, wenn sich das Verhältnis zu ihrem Besitzer — welches sich dieser in der Regel sofort zu nutze macht Vaq. 178. 375, vgl. die Beschränkungen BHischam 759 — bereits gefestigt hat (Agh. XI 172, 26). Qais b. ʿÂçim, der Fürst von Tamim, mußte die üble Erfahrung machen, daß seine gefangene Nichte lieber bei ihrem Herrn bleiben als sich von ihm lösen lassen wollte (XII 150, 17 sqq.). Aehnlich Vaq. 308. 378; dagegen Agh. XIII 3, 8 sq. XVI 22, 15. Vaq. 319. Beispiele übler Behandlung gefangener Frauen als Sklavinnen Hudh. 199, 6. 201, 3. Agh. XVI 22, 14. Marʾalqais 54, 3. Vgl. WRSmith p. 73 sq. 178.

truelis im Gegensatz zum matruelis, sondern es ist der Einheimische im Gegensatz zum Auswärtigen (*'aschari* XIV 152, 1, *min qaumihi* XIX 132, 7). Ebenso natürlich die Bint 'Amm = eine Frau aus demselben Stamme oder derselben Sippe. All the souls of a tribe are accounted *eyyal amm* (Doughty I 316). Es wird also nicht eine eigenthümliche Verwandtenheirath, zwischen Geschwisterskindern von Vaters- aber nicht von Mutterseite, empfohlen, sondern vielmehr die Endogamie[1]). Man soll sich die Braut nicht außerhalb seines Kreises, seines Dorfes suchen. Aber allein legitim ist die Endogamie keineswegs; die Exogamie, mit der *nazi'a* oder *gharîba*, ist ebenfalls eine durchaus legitime Ehe, die in derselben Form, durch Verlobung des Vali gegen Mahr, abgeschlossen wird. Sie kommt in der Zeit, bis zu welcher unsere Quellen reichen, sehr häufig vor und zeigt, wie ausgedehnt trotz aller Fehden der friedliche Verkehr zwischen den Stämmen gewesen sein muß[2]).

Warum wird nun im Allgemeinen die Endogamie der Exogamie vorgezogen? Die Eltern der Frau wollen natürlich ihre Tochter, und deren Kinder, lieber bei sich behalten als sie dahingeben „unter die Feinde“; weil sie dann leichter einen Druck auf den Eidam ausüben können[3]). Für den Mann sollte aber dieser Gesichtspunkt umgekehrt ein Motiv sein, sich die Frau lieber nicht aus dem eigenen Lager zu holen. Es kommt in der That vor, daß davor gewarnt wird, sowohl aus anderen Gründen (Agh. XIV 143, 21), als auch deshalb weil es zu häßlichen Zwisten führe, vermuthlich zu Zwisten zwischen den Familien des Mannes und der Frau, die durch Einmischung der Schwiegereltern hervorgerufen werden (IX 185, 6). Aber um einer höheren und wichtigeren Rücksicht willen empfiehlt sich die Endogamie doch auch dem Freier

1) Es kommt allerdings vor, daß der nähere Vetter dem entfernteren vorgezogen wird, z. B. Agh. XVIII 151 sq. — Die Ehe mit der Bint 'Amm ist durchaus Vertragsehe; die Weiber sind in der Zeit Muhammads das Privateigenthum der einzelnen Familie und nicht das Gesamteigenthum des Stammes. Der Ibn 'Amm muß die Bint 'Amm kaufen, wenn er nicht zugleich ihr Vali ist; er hat kein Zwangsrecht an sie.

2) Es scheint, daß die Exogamie besonders bei den Vornehmen und Reichen beliebt war.

3) Kamil 270, 14 (WRSmith p. 77) wird den Brüdern und Vätern ein Vorwurf daraus gemacht, daß sie ihre Schwestern und Töchter in die fernste Fremde verkaufen. Agh. IX 150, 1 weigert sich die Tochter des Tâiten Aus b. Haritha den Murriten Hârith b. Auf zu nehmen, weil sie nicht seine Bint Amm sei, so daß er Rücksicht auf die Verwandtschaft nehmen müsse. Agh. XIX 131, 28: في الاعداء. Hudh. 164.

und dessen Verwandten, nemlich um der Solidarität des Stammes willen. Da der Zusammenhang des Stammes auf dem Verwandtschaftsgefühl beruht, so ist es für die Festigkeit dieses Zusammenhanges am besten, wenn die Verwandtschaft nicht über den Stamm hinausreicht, wenn also nicht in den einzelnen Familien durch Heirath Verwandtschaftsbeziehungen zu andern Stämmen entstehen, welche die Kinder nach zwei Seiten ziehen und ihre ausschließliche Zugehörigkeit zu dem väterlichen Stamme beeinträchtigen können. Da es obrigkeitlichen Zwang nicht gibt und das Princip, daß nur die väterliche Verwandtschaft politische Verwandtschaft ist, nicht alle Einzelnen durchdringt, so liegt die Gefahr nahe, daß die Kinder der Auswärtigen es eventuell mit der Mutter und deren Stamm halten oder dorthin übersiedeln, ja daß auch der Ehemann selber Vater und Mutter verläßt und zu seinem Weibe zieht.

2. Eine gewisse Gleichartigkeit des Paares muß indessen auch bei der Exogamie vorhanden sein. Vom Islam wurde Gleichheit der Religion verlangt; kein Heide durfte eine Muslimin zur Frau haben und umgekehrt kein Muslim eine Heidin. Das war keine unerhört neue Forderung; das zu Grunde liegende Gefühl bestand auch im Heidenthum. Die Frau des ʿAbbâs b. Mirdâs betrachtete ihre Ehe ohne weiteres als aufgelöst, als sie hörte, er sei zum Islam übergetreten (Agh. XIII 65). Ebenso mußte die Frau des Qais b. ʿÂçim, auf das Drängen ihrer Verwandten, sich von ihm scheiden, als er zum Islam übertrat, zu seinem und ihrem Leidwesen (XII 155 sq.). Alle eigentlichen Araber waren schon in der heidnischen Zeit verbunden durch eine weitgehende Gemeinsamkeit des geistigen Besitzes in Sprache und Poesie, der Formen des Verkehrs und des Rechtes, der Bräuche und Sitten, der Begriffe darüber, was heilig sei, was erlaubt und verboten; die Quintessenz dieses geistigen Gesamthabitus kann man wohl als Religion betrachten. Nur innerhalb dieser ethnischen Religionsgemeinschaft heiratheten sie [1]). Dem Maʿqil b. Chuvailid kommt die Zumuthung verrückt vor, daß er in ein Volk einheirathen soll, dessen Sitten ihm fremdartig sind (Hudh. 57). Und so mochten sie auch ihre Weiber keinem unbeschnittenen Barbaren geben, und sei es auch der Perserkönig (Tab. I 1026 sq.) [2]). Eine Beduinin nahm nicht einmal einen arabischen Bauer oder Städter gern zur Ehe.

1) Es kommen auch engere Religionsgemeinschaften vor, auf die sich das Connubium beschränkt. So die Hums, nicht bloß diejenigen zu denen die Quraisch gehörten, sondern auch andere (Agh. X 41, 12).

2) Auch unbeschnittene Weiber, wie die Griechinnen wollten sie nicht haben.

Vor allem aber ist die Ebenbürtigkeit (كفؤ = match) wichtig. Bei der Endogamie kommt sie nicht in Betracht, innerhalb derselben Gens sind alle Einzelnen gleich vornehm, und der ärmste Ibn ʿAmm ist immer auch der reichsten und nach unseren unaristokratischen Begriffen vornehmsten Bint ʿAmm ebenbürtig. Aber innerhalb größerer zusammengehöriger Gruppen ragen einzelne Stämme oder Geschlechter hervor, die für edler gelten als die anderen, und es gibt Adelsgeschlechter, welche für die ganze Gruppe den Fürsten stellen. Die vornehmen Geschlechter der verschiedenen Gruppen haben nun unter sich ein Connubium, von dem sie minder vornehme ausschließen. Es ist höchst schimpflich, wenn ein armer Adliger aus Habgier, mit Rücksicht auf ein hohes Brautgeld, seine Tochter einem reichen Mann zweifelhafter Herkunft gibt (Kamil 271). Die Werbung eines Nichtebenbürtigen ist gradezu ein Affront; freilich auch in manchen Fällen die Zurückweisung eines Freiers[1]).

Eine strenge und allgemein anerkannte Rangordnung der Stämme und Geschlechter gibt es zwar nicht, sie schwankt und wechselt; doch aber ist die öffentliche Meinung darüber, zu einer und derselben Zeit, ziemlich fest ausgebildet. Der Islam ist in diesem Punkte, wie in so vielen anderen, der Erbe des Heidenthums. Grundsätzlich duldet er die Unterschiede des Blutes nicht, thatsächlich erkennt er sie an. Ungemein häufig wird in der Zeit der Omaijiden von einem altarabischen Geschlechte, das sich besonderen Adels rühmt, Klage bei dem Chalifen geführt, daß ein ihm angehöriges Mädchen in Gefahr ist, von einem mächtigen Beamten, der nicht ebenbürtig ist, geheirathet zu werden; gar nicht selten verhindert der Chalif die Ehe und verweist den Uebermüthigen in seine Schranken.

Mit den fremden oder zweifelhaften Elementen des eigenen Stammes läßt sich natürlich auch keine echte Verbindung eingehn. Mit Sklaven ist es ganz unmöglich; wenn eine mit einem Knecht verheirathete Magd frei wird, so wird dadurch ihre Ehe ohne weiteres aufgelöst (Boch II 67, 4. 13). Auch die Ehe mit einem Halbbürtigen oder Freigelassenen wird verabscheut. In einem alten

1) Beispiele sind so häufig, daß es überflüssig ist, welche anzuführen; besonders hübsch ist Ham. 117 sq. Es sieht so aus, als sollte die Exogamie durch solche Bedingungen der Endogamie möglichst angenähert werden. Dann wäre also die Endogamie die Voraussetzung nicht zwar der Exogamie überhaupt, wohl aber der in dieser Weise bedingten und beschränkten Exogamie.

Verse[1]) heißt es: „die Verheirathung in einem Hungerjahre, dem schon ein anderes vorhergegangen, kommt mir vor wie das Huren mit einer Blutflüssigen, die nicht rein ist"; gemeint ist nach dem Scholion der Fall, daß ein Vollbürtiger in einer Zeit äußerster Noth, um Brot für den Hunger zu bekommen, seine Tochter mit einem halbschlechtigen Manne verheirathet. Es finden sich natürlich Ausnahmen, aber sie bestätigen die Regel. Zum Beispiel bittet Muhammad die Mediner, sie möchten dem Abu Hind, einem Freigelassenen, das Connubium gewähren (BHischam 459, 2. 3).

Auf die Ebenbürtigkeit wird weniger bei der Braut gesehen als bei dem Freier. Der Mann kann eher eine minder vornehme Frau nehmen. Doch kam dieser Grundsatz erst im Islam zu ausgedehnterer Geltung, und auch dann nahm echt arabischer Sinn Anstoß daran, wenn Sklavinnen „ihre eigenen Herren", d. h. freie Kinder gebaren (Boch II 67, 15), wenn sogar Chalifen von Sklavinnen abstammten. Den Aliden wurde die theilweise zweifelhafte Herkunft ihrer Mütter zum Vorwurf gemacht[2]). In der alten Zeit folgen die Kinder einer Magd meist (Agh. X 63, 31) dem Stande ihrer Mutter[3]). Echtes Vollblut muß *muʿimm* und *muchvil* sein, d. h. nach beiden Seiten hin die nöthigen Ahnen besitzen; auch die Mütter werden in der Genealogie verfolgt (z. B. Agh. XV 53 oben). Vgl. Wilken p. 52.

3. Allzu nahe Verwandtschaft steht der Ehe im Wege. So

---

1) Tâg unter خشن.

2) Tab. III 150, 7. In der ersten Zeit des Islam legten die vornehmen Quraischiten großen Werth auf Verbindungen mit Beduinenfrauen aus reinstem arabischen Blut. Mantzur b. Zabbân alFazâri und ʿAqil b. Ullafa alMurri sind berühmte Schwiegerväter.

3) Das bekannteste Beispiel ist Antara. Dann Vaq. 362: der befreite Sohn einer Sklavin Kunna kaufte alle Kinder frei, die seine Mutter ihren verschiedenen Besitzern geboren hatte. Ferner Agh. IX 36, 17: Mervan I trat seinem Freigelassenen eine Sklavin ab mit ihrer Tochter, die von Mervan stammte. Dagegen XX 164 sq.: „Qattâls Ohm hatte eine Kebse, Qattal aber verbot ihm ihr beizuwohnen, indem er sagte: wir sind Leute, denen es verhaßt ist, daß Mägde in sie hinein gebären. Da der Ohm sich nicht sagen ließ, so schlug Q. die Magd tot; die Behauptung des Ohms, sie sei von ihm schwanger gewesen, wurde durch Sektion vor Zeugen widerlegt." Hier ist das Kind der Magd mehr werth als sie selber, wir befinden uns schon mitten im Islam — aber man sieht, wie die Araber gegen dessen Laxheit ihr reines Blut zu schützen strebten. In der Theorie erkennt übrigens auch der Islam in Bezug auf Kinder von Sklavinnen an, daß partus sequitur ventrem. — Daß die Verbindung mit einer Kriegsgefangenen aus edlem Geschlecht ganz anders beurtheilt wird als die mit einer Magd, erhellt aus § 1, 3; es kommt nicht sowohl auf die persönliche Freiheit der Frau an, als auf ihre Ingenuität.

wird Agh. XVIII 205, 17 sqq. der Alide Hasan b. Hasan von seinem mütterlichen Großvater Mantzûr b. Zabbân alFazârî getadelt, daß er die Tochter seines Vatersbruders Husain geheirathet habe, da aus so naher Verwandtschaft keine gesunden Kinder erwüchsen. In der Beschreibung eines kräftigen Recken sagt ein alter Vers: ein Mann, den keine nah verwandte Bint ʿAmm geboren hat, so daß er schwach ist, wie Kinder zu sein pflegen, von denen das Blut auswärtiger Frauen fern gehalten ist[1]). Es sind aber nicht bloß schlechte Erfahrungen mit dem Nachwuchs, sondern auch religiöse d. h. unangebbare Gründe, wegen deren ein Vorurtheil gegen Verwandtschaftsehe besteht. Die Verbote Muhammads (Sur. 4, 27. 24, 31) verschärfen nur die schon früher giltige Praxis, „der Parsismus" war schon den heidnischen Arabern greulich (Aus 24, 2 Jaq. IV 620, 12 Schahrastani p. 440). Gegen die Heirath mit Geschwisterkindern hatten sie allerdings keine religiösen Bedenken, wohl aber gegen die mit der Mutter und Tochter und auch gegen die mit der Schwester. Es kamen natürlich Inceste vor, aber sie wurden von der öffentlichen Meinung misbilligt[2]). Bei Polygamie darf man nicht Mutter und Tochter zugleich heirathen (Hudh. 61); angeblich auch nicht zwei Schwestern zugleich: dem widerspricht jedoch das Beispiel Kulaibs (Ham. 420 sq.). In allen Fällen gilt Adoptiv- und Milchverwandtschaft der Blutsverwandtschaft gleich[3]).

3. Die Hochzeit.

1. Die Werbung muß im Stamme oder in der Heimath der

---

1) Tag. X 221. Ebendaselbst heißt es in der scherzhaften Beschreibung eines Reibholzes: اخوها ابوها والضوى لا يضيرها وساق ابيها امّها عقرت عقرا. Das Wort ضوى ist technisch für die durch Inzucht hervorgerufene Verkümmerung der Kinder. Aber während gegen einen Menschen das عمك خالك eine Beschimpfung ist, ist es ein Lob für ein Kamel; da wird die Inzucht nicht perhorrescirt. Vgl. Aus b. Hagar (ed. Geyer) 12, 14: sein Bruder ist sein Vater, sein Ohm (avunculus) ist sein Vetter (patruus).

2) Agh. XII 127, 11. 155, 5. XIX 84, 25. Einen Fall, wo ein Mann seine Halbschwester von Vatersseite geheirathet haben soll, führt WRSmith p. 163 an und dazu biblische und phönicische Analogien. Einen wirklichen Nachweis dafür, daß bei den Arabern Verwandtschaft durch die Mutter die Ehe hindert, durch den Vater nicht, hat er nicht erbracht.

3) Ueber ضيزن s. WRSmith p. 88. 271. Muhammads Heirath mit der Frau seines Adoptivsohns wurde ihm als Uebertretung seines eigenen Gesetzes, nicht als Verletzung altarabischer Sitte zum Vorwurf gemacht (WRS. p. 44 sq.). — Man sagt, das Verbot der Verwandtschaftsehe sei ursprünglich Verbot der Endogamie, wobei man voraussetzt, daß innerhalb der Gruppe keine Einzelfamilien bestanden haben.

Braut angebracht werden, wenn sie eine Auswärtige ist[1]). Es ist keine Ausnahme von dieser Regel, daß die mannbaren Töchter mit auf die Messe von Ukâtz gebracht, dort besehen und verlobt werden; denn ʿUkâtz war neutraler Boden und zu der heiligen Zeit gewissermaßen die Heimath aller Stämme. Auch die Hochzeit findet sehr häufig im Hause des Schwiegervaters statt[2]); es gibt manche Erzählungen von Ueberfällen bei der Gelegenheit, daß der Ehemann sein junges Weib aus der Fremde in seine Heimath überführt[3]); davon daß die Eltern ihre Tochter dem auswärtigen Freier in sein Haus bringen, findet sich aus alter Zeit kaum ein Beispiel (Agh. XI 90), er muß sie selber abholen. Für feiner aber gilt es, wenn er die Heirath mit ihr erst in seiner Heimath vollzieht, so daß dieselbe durch Zeit und Ort deutlich von der Verlobung geschieden ist: sonst kommt sich die Braut vor wie eine Magd oder Kriegsgefangene, mit der keine Umstände gemacht werden[4]).

Wie die öffentliche Verlobung, so ist auch die feierliche Hochzeit ein Maß für den Werth der Frau und der Ehe[5]). Sie heißt سباع, weil sie eine Woche dauert[6]). Die Braut wird erst eine Weile gepflegt, dann herausgeputzt, parfumirt und besonders geschminkt; auch der Bräutigam parfumirt sich, jedoch mit Maßen[7]).

1) Agh. I 40, 26 sq. 71, 11 und besonders X 66, 1 sq.: Amr b. Schâs alAsadi warb um die schöne Tochter eines Amiriten, der bei ihm zu Gaste war; der wollte sie ihm jedoch nicht geben, so lange er bei ihm zu Gaste sei, um den Anschein zu meiden, daß er es gezwungen thue, versprach sie ihm aber, wenn er wieder zu Hause sei und Amr dort die Werbung anbringe.

2) Dies heißt عُمْرَة. Jetzt heißt in Mekka so die der Duchla vorhergehende Scheinceremonie (Snouck II 165 schreibt Ghumra). Eine Analogie dazu findet sich schon Agh. XIX 131.

3) Agh. XII 144, 29 sqq. XVI 27, 14 sqq.

4) Die klassischen Beispiele dafür sind die Erzählungen über Buhaisa, die Braut des Harith b. Auf, und alQadûr, die Braut des Laqît b. Zurâra (IX 150. XIX 131 vgl. X 53, 17). Die Erklärung, die WRSmith p. 81 für diese Sitte gibt, widerspricht der in den Erzählungen selbst gegebenen, wonach die Braut grade nicht wie eine Kriegsgefangene behandelt werden will.

5) Ueber die gegenwärtig üblichen Bräuche bei der Hochzeit s. Wetzstein in der Ztschr. für Ethnologie 1873 p. 287 sqq. und besonders Snouck a. O. Sehr merkwürdig für Mekka ist die Qilâda der Braut, ein riesiger Kranz aus hundert Aepfeln.

6) Agh. II 162, 14. XII 145, 2. XVIII 209, 2. XIX 131, 17 sq. Gen. 29, 27. Die Hochzeit des syrischen Mönches, der Braut Christi, dauert sieben Tage in der Kirche (Bibl. Orient. I 174).

7) Das Pflegen der Braut heißt ودن; jedoch Agh. XI 90, 18 ist die Bedeutung eine andere. Das Schminken der Braut, besonders an den Händen, ist

Ein Festmahl, zu dem Lieder gesungen werden, gehört sich[1]; es geht aber sehr einfach dabei her. Wie böhmisch dem richtigen Araber eine Hochzeit im syrischen Stil vorkam, ersieht man aus Agh. XII 35 sq. Von dem Einholen der Braut mit großem Pomp finde ich aus alter Zeit in Arabien keine Spuren[2], auch nicht von dem Paradebett (منصّة, مرتبة, jetzt in Mekka اريكة). Zur Zeit des Propheten gab es in Medina nur ein Brautkleid (Boch. II 80), den Schmuck lieh man sich von den Juden.

Die Braut bekommt gute Rathschläge und Verhaltungsmaßregeln von der Mutter oder dem Vater mit auf den Weg und wird mit Segenswünschen übergeben[3]. Von heiligen Formeln, die dabei angewendet werden, ist im Koran die Rede; die Ehe heißt ein Bund Gottes[4]. Sie entbehrte schon im Heidenthum nicht der religiösen Weihe; wenigstens scheint Muhammed dieselbe nicht neu einzuführen, sondern vorauszusetzen. Ueber den Vorgang im Thalamus belehren uns die Geschichten von Muhammad und Âischa (Boch. II 266), von ʻUthmân und Nâila (Agh. XV 70 sq.) und von Schuraih und Zainab (XVI 37 sq.): nachdem die Weiber ihm die Braut ins Haus gebracht hatten, ergriff Schuraih Besitz von ihr, indem er sie bei dem Stirnhaar packte[5], während sie niederkniete; dann betete er mit ihr und sprach Averruncationen.

ganz unerläßlich, خضاب ist manchmal so viel wie Hochzeitmachen (II 133, 4. 6. XVII 117, 4. XVIII 6, 8. Tab. III 169, 16. 176, 5. 178, 10 sq. 183, 18. 550, 21. Hudh. 55, 2). Ueber das Parfumiren des Bräutigams s. Agh. II 162, 14. V 193, 22 sqq. VII 112, 14. XVI 103, 23. XIX 131, 14 sqq. Es bedarf indessen der Bemerkung, daß das Weib nicht nur zur Hochzeit sich schminkt, sondern auch sonst, um die Männer anzulocken (2 Reg. 9, 30. Hier. 4, 30) — daher darf die Witwe während ihrer Carenz sich nicht schminken. Aehnliches gilt auch vom Parfumiren.

1) وليمة. Vgl. Boch. III p. 208: bei einer Hochzeit in Medina schlugen Mädchen die Pauke und besangen die, welche bei Bedr gefallen waren.

2) Im Gegentheil scheint sich der alte ʻAqîl b. ʻUllafa solchen Unfug als unarabisch zu verbitten, als er seine Tochter dem Chalifen Jazid I verlobt (Agh. XI 90). Aus den syrischen Grenzländern kommen schon früh Beispiele der großartigen زفّة vor (1 Macc. 9, 37. Agh. XX 23, 28). Man meint (WRS. p. 81), sie sei ein Rest der Raubehe; die Araber besaßen ja aber das Institut noch in nacktester Wirklichkeit und brauchten keinen Rest davon symbolisch zu konserviren. Gewöhnlich geleiten nur einige Weiber die Braut zum Bräutigam.

3) Agh. XV 70 sq. XVIII 128. XIX 131 sq. Skizzen III 155.

4) Sur. 2, 35. 4, 25. BHischam 969, 6. Agh. XI 154, 14.

5) Als wäre sie seine Kriegsgefangene? Der Brauch findet sich wie in alter so auch noch in heutiger Zeit. Vgl. Goldziher, Muh. Studien I 251; Snouck II 180.

Im Monat Schauvâl durfte keine Hochzeit stattfinden [1]), ebenso wenig natürlich im Kriege, wo das Schwert der Lagergenoß war, bis zur Erfüllung des Rachegelübdes.

2. Für das junge Paar wird ein besonderes Zelt (oder anderweitiges Obdach) errichtet, und dies ist der bedeutsamste Ritus bei der ganzen Hochzeit, davon hat sie den Namen. Hier hat nun WRSmith (p. 167 sq.) die Frage aufgeworfen, ob das Zelt von jeher, so wie es zur Zeit Muhammads durchschnittlich der Fall war [2]), dem Manne gehört habe. Aus der Redensart „er ging ein zu ihr“, welche im Gegensatz zu der zur Zeit Muhammads herrschenden Praxis steht daß die Braut zum Manne geführt wurde, schließt er, daß es ursprünglich der Frau gehört habe. Der Schluß wird freilich dadurch ungewiß, daß jene Redensart nicht bloß für das erste Beilager, sondern überhaupt für den geschlechtlichen Verkehr gebraucht wird, im Arabischen wie im Hebräischen [3]). Auch aus dem zweiten und spezifischeren Ausdrucke für Heirathen, nemlich Bauen, gewinnt man keinen sichern Aufschluß. Das Subject wechselt dabei, bald ist es der Mann bald ist es die Frau; die übertragene Bedeutung (Heirathen) hat meist die eigentliche (Bauen) verdunkelt [4]). Aber eigenthümlich ist jedenfalls die nahe Beziehung der Frau zum Zelt oder der Hütte. Sie ist die „Besitzerin des Hauses“ (Ham. 687 v. 1), ihr gehört es, außer wenn Gäste da sind (691 v. 2). Ein Zelt ist immer ein Zeichen, daß eine Frau da ist; *ahl* (eig. Zelt = אהל) wird häufig genug nicht bloß für die Familie, sondern gradezu und ausschließlich für die Frau gesagt.

---

1) Umm Salama pflegte zu sagen: es schadet nichts im Schauvâl zu heirathen; der Prophet hat die Ehe mit mir im Schauvâl geschlossen und im Schauvâl vollzogen (Vaq. 152). Vgl. Munzinger Ostafr. Studien p. 147.

2) Das sieht man schon aus الولد للفراش, denn wessen das Lager ist, dessen ist auch das Zelt.

3) Agh. VII 118, 5. IX 149, 20. Ham. 40, 10. Man sagt: بها und دخل عليها.

4) Man sagt vom Manne بها und بنى عليها, ابتنى بها; und für بنى auch عرس. Aber auch von der Frau in dem sehr merkwürdigen Verse Agh. X 76, 23: bei Gott, nie wird Umm ʿAçim ihr Zelt über einem Manne, wie er war, aufschlagen d. i. nie einen solchen Mann wieder heirathen. Der Schwiegervater بنى عليه بها X 53, 17; in Wirklichkeit schlägt aber die Schwiegermutter das Zelt auf (XIX 131, 10). Passivisch بُنِىَ عليه بها häufig. Der Bräutigam heißt البانى Antara 25, 7 (البوانى masculinisch) und Agh. X 97, 7 (مصباح بانٍ die Leuchte eines Bräutigams); aber dabei wird die ursprüngliche Bedeutung des Bauens nicht mehr empfunden sein. — Die arabischen Lexika lassen uns bei solchen gewöhnlichen Ausdrücken meist im Stich.

Und zwar ist immer nur eine verheirathete Frau in einem Zelte oder in einer Hütte, nie ihrer mehrere zusammen. So oft Muhammad eine neue Frau nimmt, muß er eine neue Hütte bauen; er selbst hat kein besonderes Obdach; wenn er es mit allen seinen Frauen verdorben hat, muß er auf dem Söller schlafen (Boch. III 171 IV 27). Während die Männer draußen sind und auch die jungen Mädchen, wenn keine Dienerschaft da ist, manchmal die Kamele hüten, haftet die Frau am Zelte. Sie nimmt es mit auf der Wanderung, sie hat für das Aufschlagen und Abbrechen und für den Transport zu sorgen. Man kann das nicht darauf schieben, daß ihr überhaupt alle Arbeit aufgebürdet sei; denn z. B. melken darf sie nicht. Die Frau gewährt auch Aufnahme in das Zelt und dadurch dem Schutzflehenden Schutz; sie macht das Zelt zum Heiligthume. Allerdings erklärt sich das zum theil daraus, daß sie immer im Zelte zu treffen ist und darum häufig von Fremden angesprochen wird wenn der Mann nicht zu Hause ist, daß außerdem die Flüchtigen sich mit Vorliebe hinter die Frau und die Kinder zu stecken suchen, weil diese weniger gut in der Welt Bescheid wissen und die Verantwortung leichter nehmen als der Mann — aber nicht für alle Fälle genügt diese Erklärung [1]). Auch verwitwete und geschiedene Frauen haben regelmäßig ihr eigenes Zelt, während die ledigen Männer keins besitzen, sondern herumlungern. So ist es wenigstens nach Doughty heutzutage, und schwerlich war es im Alterthum anders.

Ein überliefertes Zeugnis für seine Meinung findet WRSmith bei Ammianus Marcellinus XIV 4, 4, wo es von den Saracenen heißt: dotis nomine futura coniunx hastam et tabernaculum offert marito. Er sagt p. 66: as the woman could not go off by herself, with her tent, into the desert, we must suppose that among these Saracens the husband, if he was not his wife's tribesman, temporarily joined her tribe. Das ist allerdings eine etwas weitgehende Supposition. Es steht nur da, daß die Frau dem Manne Zelt und Lanze zubringt; ähnlich finden wir noch in späterer Zeit, daß sie ihm Roß, Schwert und Hausgeräth zubringt, so jedoch, daß Alles dies ihr Erbe und Eigenthum bleibt und ihr beim Tode

1) Agh. XVIII 137, 5 sqq.: Sulaik b. Sulaka entrann vor seinen Verfolgern in ein Zelt und begab sich in den Schutz der Hausfrau; die zog ihm ihren Bock an und stellte sich mit bloßem Schwert den Verfolgern entgegen — als sie nicht abließen, zog sie den Schleier von ihrem Haar und rief ihre Brüder zu Hilfe. XX 162, 17 sqq. hat die Frau den Schutz zu gewähren und zu versagen, obgleich ihre beiden Brüder zugegen sind. XIX 79, 16. 80, 4 bestätigen dagegen die Männer den Schutz, den die Frau im Zelte gewährt hat.

des Mannes wieder zufällt [1]). Aber es folgt jedenfalls, daß das Zelt hier der Frau gehört. Ueber einige Fälle, wo die Frau bei der Scheidung das Zelt abbricht und mitnimmt, wird später die Rede sein (§ 8, 1).

4. Die Frau in der Gewalt des Mannes.

1. In der Zeit, auf welche unsere ältesten arabischen Quellen sich beziehen, herrscht die Patrarchie. Die Sitte ist durchaus, daß die Frau in die Familie des Mannes übersiedelt und ihm unterthan ist [2]). Wie hoch hinauf diese Sitte reichen muß, ergibt sich aus den gemeinsemitischen Namen حم und كنّة. Der erstere bedeutet den Schwiegervater, aber nur den der Frau, das Haupt der Familie ihres Mannes, vereinzelt auch wohl ihren Schwager [3]), im Plural allgemeiner die Verwandten ihres Mannes [4]). Das Correlat dazu ist كنّة, hebräisch und aramäisch כלה = nurus. Es heißt auch Braut und junge Frau [5]), aber immer die junge Frau außerhalb des Kreises ihrer Blutsverwandten. Die Existenz dieser zwei Urwörter, für den Schwiegervater der Frau und für die Schwiegertochter in seinem Hause, ist sehr lehrreich.

In seiner letzten großen Rede an das Volk, bei der Abschiedswallfahrt, soll Muhammad gesagt haben (BHischam 969. Vaq. 431): „O ihr Leute, ihr habt Pflichten gegen eure Weiber, und sie haben Pflichten gegen euch. Sie dürfen keinen, den ihr nicht wollt, eure Teppiche betreten lassen [und keinem gegen euren Willen Einlaß in euer Haus gewähren]; thun sie es dennoch, so ist es euch erlaubt, ihr Lager zu meiden und sie mit mäßigen Hieben zu züchtigen. Lassen sie es aber und gehorchen euch, so habt ihr freundwillig für ihren Unterhalt und ihre Kleidung zu sorgen. Haltet

---

1) Agh. XI 155, 27 اذا متّ يوما فاحصرى امّ خالد تراثك من طرف وسيف واقدر. Für das mir unverständliche فاحصرى darf man vielleicht فاحظرى (raff zusammen) lesen. Das Hausgeräth bringt die Frau noch gegenwärtig mit; es ist von ihrem Mahr angeschafft (Snouck II 211).

2) Daher هدىّ *die Braut*, weil sie zu dem Manne geführt wird (uhdijat ilaihi) — eine Gegeninstanz gegen دخل عليها (Ham. 698 v. 2).

3) Agh. VIII 49, 20 vgl. 50, 19: der frühere Mann der Frau wird dadurch, daß sie seinen Bruder heirathet, ihr حم.

4) BHischam 280, 7. BAthir III 213 oben. Agh. XI 67, 2. 4. — Es wird zusammengestellt حمو وبعل (XIV 154, 11), حموها وجارها (Gauh. s. v.).

5) Beispiele bei WRSmith p. 136 und DMZ 1890 p. 708 sq. Synonym حنّة Agh. X 44, 18. Lisan XVIII 243, 5.

euch an zu gütiger Behandlung der Weiber; denn sie stehn zu euch wie Kriegsgefangene und haben in betreff ihrer selbst keine Gewalt, ihr aber habt sie als heiliges Pfand empfangen und unter heiligen Formeln das Beilager mit ihnen gehalten.“ Es wird hier als eine Thatsache vorausgesetzt, daß auch die angetraute Frau in der herrschenden Form der Ehe nicht anders zu dem Manne stehe als die Kriegsgefangene (عانية). Der Mann ist in allen semitischen Sprachen der Baal [1]), d. h. der Herr der Frau. Sie ist sein Besitz — das zeigt sich in vielen Stücken.

2. Als werthvoller Besitz wird die Frau schon in alter Zeit sorgsam gehütet, wenngleich noch nicht so abgesperrt wie im Islam. Daher محصنة domi custodita = Ehegattin. Das Ursprüngliche ist, daß احصن aktivisch vom Manne [2]), dagegen passivisch von der Frau gesagt wird [3]). Dieser Unterschied verwischt sich nachgehens, und das eigentlich transitive Verb (II und IV) wird auch intransitiv gebraucht für *verheirathet sein*, beides vom Manne und von der Frau (BHischam 393, 17. 18). Schließlich bedeutet dann محصنة die *ehrbare* Frau; die Ehrbarkeit ist von Haus aus nicht ihre Moral, sondern ein ihr vom Manne auferlegter Zwang — aus der Noth entsteht die Tugend. Mit der Hut übernimmt der Mann aber auch den Schutz der Frau gegen jede feindliche Berührung von außen — deshalb bringt sie ihm Lanze Schwert und Roß zu, deshalb bietet sie sich dem an, der sie vertheidigt hat [4]). Die Frauen sind das Heiligthum (حريم, حرمة); wer sie antastet, wer die Zelthülle über ihnen zerreißt (هتك الستور), begeht den äußersten Frevel, fügt die schlimmste Beleidigung zu. Ehebruch der Frau wird nicht leicht genommen (Agh. VIII 50 sq.), öfters sogar blutig gerächt [5]). Die mistrauische Eifersucht, nicht

---

1) Ueber die Bedeutung s. Agh. VIII 43, 17. 18. Synonym ist سيّد II 29, 26. Ebenso nicht der Etymologie, aber dem Gebrauche nach حليل und das seltene عشير X 52, 21. Boch. I 8, 20. 44, 18. 138, 26. 192, 5. III 216, 7. Ein alter und seltener Name für die Gattin ist حنة BHischam 868, 1. Hudh. 22, 5. 82, 3. Agh. X 44, 17; vielleicht identisch mit dem hebräischen Eigennamen Hanna oder Anna.

2) Agh. XIV 141, 31, wo irrthümlich احصر gedruckt ist.

3) مُحصَنة. Auch حصان kann passivisch sein, das Femininum zu حصين vgl. Dillmanns Aeth. Gr. § 129a.

4) Vgl. p. 443 n. 1 p. 435 n. 4.

5) Hudh. 55. 239, 5; vgl. Agh. IX 10, 3 VIII 83, 29 und besonders XV 151 sqq. die Geschichte des Ibn Dumaina, die zwar in die Abbasidenzeit fällt aber ganz vorislamische Zustände voraussetzt.

auf die Liebe, sondern auf ihr Eigenthumsrecht, ist eine hervorstechende Eigenschaft der Araber, deren sie sich rühmen[1]). Nur bei der Krankenpflege gestatten sie den Weibern, fremde Männer zu besuchen (Tarafa 10, 7). Denn die Weiber sind die geborenen Aerzte, sie sondiren und verbinden die Wunden.

Es wäre indessen ein Irrthum zu glauben, daß die Frau durch die Ehe ihren Stand verändere. Sie ist auch vorher unter der Mund, wenngleich nicht unter ganz so strenger Hut. Ebenso eifersüchtig wie der Mann sein Eigenthumsrecht an die Gattin, wahren die Blutsverwandten ihr Eigenthumsrecht an das Mädchen[2]); das selbe Wort (غير) bezeichnet das eine und das andere Verhalten. Wir hören von einem Falle, wo ein Mädchen von ihren Brüdern getötet wird, weil sie von einem Liebesverhältnis nicht ablassen will (Agh. XX 181, 16). Aehnlich schwört Fudaik b. Hantzala alGarmi vor seinen versammelten Schwestern und übrigen weiblichen Verwandten — von Ehefrauen ist keine Rede —, er werde eine jede, die sich auf Liebelei einlasse, am Leben strafen; und um ihnen einen Begriff von dieser Strafe zu geben, zieht er sein Schwert und schlägt einem dabei stehenden Knechte das Haupt ab (VII 118). Bei den Dichtern sind die Verwandten der unverheiratheten Geliebten ebenso bös angeschrieben wie der Gemahl der verheiratheten. Die Jungfrauen stehn viel höher im Preise als die Witwen und Geschiedenen, welche letzteren eben deshalb weit freier, d. h. weit vernachlässigter sind[3]).

Der Mann ist nicht an eine Frau gebunden, er ist in seiner Besitzfähigkeit unbeschränkt. Die Polygamie setzt nothwendig die Patrarchie voraus, oder wie WRSmith sich ausdrückt, die Baalsehe; ihr hohes Alter wird dadurch bewiesen, daß der Ausdruck, womit die mehreren Frauen eines Mannes in ihrem Verhältnis zu einander bezeichnet werden, der semitischen Gemeinsprache ange-

---

1) z. B. Agh. XI 44, 17. Eifersucht ist غير; Verdacht haben زنّ = ظنّ = لطخ, in Verdacht bringen وشى. Eifersucht des Wildesels als polygamen Eheherrn Maralqais 10, 7.

2) Vgl. p. 432 n. 5. 6.

3) Die Verhüllung der Weiber (Snouck Bijdr. Nederl. Ind. Inst. V 1, 365 sqq.) hat vielleicht einen anderen Ursprung als ihre Absperrung; später wird jedoch beides auf gleiche Stufe gestellt (Hamasa 522 v. 7). Mägde und Huren (dagegen Gen. 38, 14?) verhüllen sich nicht, Jungfrauen aber ebenso wohl als Frauen (Tertull. de virg. vel. 17. Bibl. Orient. I 364. 365). Wenn eine Hilfeschreiende ihr Haar auflöst und zeigt, so bedeutet das ebenso viel als wenn sie ihre Kleider abwirft (Agh. XVIII 137, 10. 202, 27 vgl. XV 99, 18).

hört: ܥܪܬܐ צרה ضرّة = Mitfrau [1]). Ein spezifisch arabisches Wort dafür ist علّة; es scheint aber nur in der Redensart بنو العلات vorzukommen = Kinder des selben Vaters, aber verschiedener Mütter [2]).

Am deutlichsten vielleicht zeigt sich die Einseitigkeit des ehelichen Rechtsverhältnisses darin, daß allein der Mann sich scheiden, d. h. seine Frau verstoßen oder entlassen kann. Er muß dabei allerdings in der Regel das Brautgeld fahren lassen; die Verwandten der Frau geben es nur heraus, wenn sie selber die Scheidung wünschen und betreiben. Dadurch wird allzu großer Eilfertigkeit ein Riegel vorgeschoben; die bekannte promissorische Eidesformel „ich will meine Frau verstoßen und meine Sklaven in Freiheit setzen, wenn ich nicht das und das thue“ beweist, daß man sich doch seiner Ehehälfte nicht ganz so leichten Herzens entledigte wie eines alten Schuhes. Aber obgleich erschwert durch den Verzicht auf ein manchmal theuer erkauftes Eigenthum kommt die Scheidung auch im arabischen Alterthum sehr häufig vor, manchmal aus Gründen, die uns ganz nichtig erscheinen [3]).

3. Jedoch unbeschränkt ist die Gewalt des Mannes über die Frau nicht. Er darf sie nicht verkaufen. Sie wird durch die Ehe

---

1) Michaelis Suppl. no. 2216, Lagarde Gött. Gel. Nachr. 1882 p. 393 sqq. Beiläufig gesagt liegt dem kirchlichen Verbot der Ehe mit der Schwägerin (Cod. Theod. III 12, 2) nicht ein Misverständnis von Lev. 18, 18 zu Grunde. Denn die Stelle lautet in der Septuaginta, von der natürlich die Gesetzgebung ausging, folgendermaßen: *γυναῖκα ἐπ' ἀδελφῇ αὐτῆς οὐ λήψῃ ἀντίζηλον . . . . . ἔτι ζώσης αὐτῆς* — der Zusatz b e i i h r e n L e b z e i t e n beugt jeglichem Misverständnis vor. Die Collatio legum mosaicarum (tit. 6 fin) beruft sich vielmehr auf Deut. 27, 23: maledictus qui concubuerit cum sorore uxoris suae = *ἐπικατάρατος ὁ κοιμώμενος μετὰ τῆς ἀδελφῆς τῆς γυναικὸς αὐτοῦ*. S e i n e S c h w ä g e r i n ist Uebersetzung von חתנתו. Der Vaticanus hat dafür die Doppelübersetzung *νύμφη* und *ἀδελφὴ τῆς γυναικός*, der Alexandrinus u. a. *πενθερὰ* und *ἀδελφὴ τῆς γυναικός*. Also ein Schwanken zwischen Schwiegermutter, Schwägerin und Schwiegertochter. Die echte Uebersetzung scheint *ἀδελφὴ τῆς γυναικός* zu sein, denn darin stimmen die Uebersetzungen überein.

2) Hudh. 31, 10. Tabari II 813, 5. 1082, 16. 18. 1166, 11. 1310, 17. Boch. II 206, 15: die Propheten (= monotheistischen Religionsstifter) sind Brüder, Kinder verschiedener Mütter (اخوة لعلّات), aber von einer und derselben Religion = ihr Gott ist der gleiche, aber ihre Nationalität verschieden.

3) Ham. 191, 17 entläßt Jemand seine Frau, weil sie mit ihm gescherzt hat. Man muß freilich bei dieser Materie überall in Anschlag bringen, daß die causes celebres in der Tradition unverhältnismäßig vorwiegen und daß namentlich in den Genealogien die unglaublichsten Familienverhältnisse construirt werden, um die dem System widerstrebenden Elemente dennoch hinein zu zwingen. Vgl. Goldziher a. O. I 20 n. 3.

nicht Sklavin, sondern bleibt frei, d. i. geschlechtsangehörig. Es gibt Leute, die sich um sie kümmern; ihre Eltern und Brüder treten für sie ein; das Geschlecht hat auch in diesen Dingen Einfluß und kann ihn geltend machen[1]). Wirksam ist derselbe allerdings nur bei Endogamie, wenn die Frau dem selben Stamme angehört wie der Mann (Agh. XIV 143, 21); ist sie eine Auswärtige, so ist der Rückhalt unsicher, den sie an den Ihrigen hat (IX 150 oben). Denn sie geht durch die Heirath nicht etwa in das Geschlecht ihres Gebieters über, sondern bleibt in ihrem eigenen Geschlecht, wie WRSmith mit Recht hervorgehoben hat[2]). Sie nimmt auch nicht etwa den Namen des Mannes an; erst wenn ein Kind geboren ist, bekommen die Eltern durch das Kind eine gemeinsame Kunja: Abu Amr, Umm Amr. Das Verhältnis zwischen den Gatten erhält rechtlich nie die Festigkeit der Blutsverwandtschaft; es fällt unter den Begriff des Givâr, der durch Vertrag und Zusammenwohnen hergestellten künstlichen Gemeinschaft, welche ohne die Blutsverwandtschaft aufzuheben an ihrer statt fungirt, aber doch keineswegs mit derselben Sicherheit und Nothwendigkeit[3]). Unter diesen Umständen ist die Stellung der Frau prekär. Doch können ihre Blutsverwandten auch aus der Ferne für sie wirken, z. B. durch Rückzahlung des Brautgeldes den Mann zur Scheidung bewegen. Jedenfalls bleiben sie rechtlich die Helfer und Rächer der Frau und ihre Zuflucht für den Fall der Scheidung und Verwitwung[4]). Andererseits tragen sie auch die Verantwortung für sie, wenn der Mann nicht für sie aufkommen will (Boch. IV 158).

1) Ein Fall, wo die Aeltesten eine Ehe trennen weil sie unfruchtbar ist, findet sich Agh. XIX 102, 31.

2) Es wird natürlich gefunden, daß die Frau es mit ihrem Bruder gegen ihren Mann hält, mit dem Stamm, in dem sie geboren ist, gegen den Stamm, in den sie eingeheirathet hat. Besonders bezeichnend ist es, daß nach Agh. XIX 132, 6 die exotische Frau nicht theilnimmt an der Klage über den Tod des Mannes; es ist also kein ausnahmsweises Verfahren, wenn Galîla aus dem Matam Kulaibs verwiesen wird (IV 151, 12); anders allerdings X 56, 21. 58, 27 in späterer Zeit. Die Trauerlieder sind immer von der Mutter oder von der Schwester verfaßt, nicht von der Frau. Die عدّة der Witwe gehört nicht hierher.

3) Als Gâra scheint ursprünglich nur die stammfremde Frau bezeichnet zu werden, nicht, wie es gegenwärtig nach Doughty bei den Beduinen gewöhnlich geschieht, auch die Bint ʿAmm. Von BHischam 275 sq. macht WRSmith (p. 142) einen zu weitgehenden Gebrauch. Der Vorwurf Hassans ist weder berechtigt noch aufrichtig gemeint; er will nur die Quraischiten an einander hetzen, wird aber durchschaut. — Wenn der Mann in den Stamm der Frau einheirathet, so ist Er der Gar.

4) Agh. XII 156, 1 sqq.: als der Tamimit Qais b. ʿAçim zum Islam überge-

Selbstverständlich ist es, daß aus dem rechtlichen Verhältnis der Frau zu ihrem Gatten auf das persönliche keine Consequenzen gezogen werden dürfen. Sie wird zwar in der Regel nicht zart behandelt, obwohl nicht eben viel schlechter, als sie es von Hause, von ihren Brüdern und ihrem Vater, gewohnt ist[1]). Es kommt wohl auch vor, daß sie ihren Mann als ihren Feind betrachtet und auf alle Weise von ihm loszukommen sucht, z. B. indem sie ihn dergestalt ärgert, daß er sich von ihr scheidet (Mufadd. 3). Aber es fehlt auch keineswegs an Beispielen der Liebe und Treue zwischen den Gatten; die Menschlichkeit ist eben durch kein System zu ersticken. Muhammad hat die Erfahrung gemacht und ausgesprochen, daß der Mann der Frau näher stehe als irgend ein Anderer (BHischam 586, 16). Sehr verkehrt wäre es insbesondere, sich die arabischen Ehefrauen als unterwürfig vorzustellen[2]). Hind bint ʿUtba, Âischa, Humaida bint Nuʿmân entwickeln ebenso viel Temperament gegen ihre Eheherren, wie Sara, Rebekka und Rahel. In der Poesie heißen die Weiber „die Tadlerinnen"; wenn der Dichter sagt, er lasse sie ruhig schelten und thue doch was er wolle, so klingt das nicht gerade immer glaubwürdig. Vor nichts hat der Ausreißer aus der Schlacht größere Sorge als vor der Begegnung, die ihm am Eingange seines Zeltes droht; es gibt ein ganzes Genre von Liedern, in denen der flüchtige Held vor seiner Frau sich rechtfertigt: wenn du wüßtest, welch eine Klinge ich geführt habe! aber wer drang schließlich alles auf mich ein! Daher nimmt man auch die Weiber als Zuschauerinnen mit in den Kampf, damit man angesichts ihrer sich schäme zu fliehn.

So drückend und entwürdigend für die Frau, wie WRSmith

---

treten war, kamen die Verwandten seiner hanifitischen Frau und schwuren sie zu verstoßen, wenn sie ebenfalls überträte; infolge dessen ließ sie ihr Mann gehen. Agh. VIII 84, 3: die Schwäger des Dichters alAʿscha prügelten ihn so lange, bis er sich von seiner Frau schied; vgl. XVIII 109, 23 sqq.: alRaschîd gestattete den Schwägern des Haitham b. ʿAdî, ihn so lange zu prügeln, bis er sich von ihrer Schwester schied. Wie eine von ihrem Manne wegen Ehebruchs getötete Frau von ihren Verwandten gerächt wird, zeigt das Beispiel des Ibn Dumaina (XV 151 sqq.); auch die Dija für sie bekommen die Verwandten (XXI 10, 17. 18). Ueber den Verbleib der Witwen und Geschiedenen siehe § 5.

1) Prügel sind nicht selten. Der Prophet protestirt dagegen Boch. III 179, 11 in einem sehr charakteristischen Zusammenhang. Aber die Peitsche des Omar konnte er für seinen eigenen Harem nicht entbehren.

2) Daß sie ihre Gatten meiden (هجر), sich vor ihm verhüllen und abscheiden, findet sich oft, selbst wenn der Gatte Chalif ist. Von dem Freier wird sehr auf das خلق, auf die Gemüthsart der Braut gesehen. Vgl. Snouck II 108. 112.

meint, ist die Baalsehe jedenfalls nicht gewesen. Sie selbst will es durchschnittlich nicht anders, als daß der Gatte streng über ihrer Ehre wacht; sie sieht in dem Grade seiner Eifersucht das Maß ihres Werthes für ihn und weiß von diesem Gesichtspunkte aus selbst seine Schläge zu würdigen[1]). Der Bedeutungswechsel von محصنة ist sehr lehrreich; wenn es ursprünglich die streng gehütete Frau heißt, so heißt es hernach ganz allgemein die keusche Frau, die etwas auf sich hält. Unter dem Schutz des Zwanges ist auch in Arabien die Ehre und das Ehrgefühl des Weibes erwachsen. Daß Muhammad nicht an irgend welche freieren Formen des Verhältnisses der Geschlechter anknüpfte, sondern an die Baalsehe, und daß er nur sie als richtige Ehe gelten ließ, war völlig nothwendig; er befand sich damit auch ganz in Uebereinstimmung mit der öffentlichen Meinung. Mit Unrecht sagt WR Smith p. 104: the effect of Mohammed's legislation in favour of women was more than outweighed by the establishment of marriages of dominion as the one legitimate type, and by the gradual loosening of the principle that married women could count on their own kin to stand by them against their husbands. Der Schaden lag nicht an der Mancipation der Weiber — die glücklichen Ehen im Islam sind die mit Sklavinnen —, sondern an der Lockerheit und leichten Auflösbarkeit der Ehe; besonders aber daran, daß Muhammad durch seine göttliche Gesetzgebung Verhältnisse, die für seine Zeit berechtigt waren, für alle Ewigkeit festlegte — wie WRSmith (p. 177) selber richtig bemerkt.

5. Scheidung und Verwitwung.

1. Die gewöhnliche Art der Scheidung ist das طلاق. Der Mann verstößt die Frau ohne das Brautgeld zurückzubekommen. Er sagt: انتِ طالق, und die Sache ist fertig[2]). Er kann sich dann aber noch besinnen; definitiv (البتّة Ham. 191, 18) wird die Sache erst durch dreimalige Wiederholung der Formel. So im Islam Agh. VII 131, 23—25. Aus der heidnischen Zeit wird dafür das Beispiel des Dichters alA'scha angeführt, weil er in einem Gedichte an seine Frau (VIII 83) drei mal hinter einander بينى sagt.

1) Arab. Provv. II 128: على جارتى عقق وليس على عقق. Proverbii sensus est: „illa a marito verberatur, diligitur et in honore habetur." Bei uns soll ein ähnlicher Aberglaube bestehn.

2) Andere Formeln bei Freytag, Einl. p. 207. Ob Veränderung der Thürschwelle (Boch. II 191 sq.) ein wirklich gebräuchlicher Ausdruck für Scheidung war, ist sehr zu bezweifeln.

„Scheide dich, keusch und ohne Tadel, geliebt und liebend, und probire einen anderen Mann wie ich eine andere Frau probiren werde, es gibt unter den Männern deines Volkes wohl eine passende Partie, unter den langen stolzen Jünglingen von Hizzân Scheide dich, denn Scheidung ist besser als der Stock, sonst siehst du ein Schwert über deinem Haupte. Ich habe das nicht deshalb vor, weil du verächtlich wärest oder mir Unheil gebracht hättest. Scheide dich, du bist entlassen; so geht es bei den Menschen: einer geht, eine andere kommt.“ Eine eigenthümlich gewichtige Scheidungsformel ist das ظهار, wobei der Mann zu der Frau sagt: du bist mir wie der Rücken meiner Mutter (Sur. 33, 4. 58, 2). Nach Agh. VIII 50, 13 war dieselbe ursprünglich quraischitisch und Hischâm b. alMughîra wandte sie zuerst an. Aber von den Quraischiten stammt immer Alles; nach anderen Angaben haben Andere die Sitte eingeführt.

Wenn der Mann die Frau auf ihre Bitte oder auf Veranlassung ihrer Verwandten entläßt und dafür das Brautgeld zurückbekommt, so heißt das nicht طلاق, sondern خلع (Agh. XIII 65, 30. Boch. II 59, 17. III 226 sq.). Auch bei خلع (*entlassen* im Gegensatz zu *verstoßen*) ist der Mann das aktive Subject.

Im Islam darf die geschiedene Frau erst nach einer Frist von drei Monaten (عدّة) sich wiederverheirathen, innerhalb deren sich herausstellt, ob sie schwanger ist oder nicht. Aber im Heidenthum konnte sie auch wenn sie schwanger war einen anderen Mann heirathen, dem dann in der Regel das Kind gehörte. Im Islam darf ferner die Geschiedene, nachdem die Scheidung perfect geworden, nicht wieder zu dem Manne zurückkehren; das geht erst, nachdem sie inzwischen einen anderen Mann geheirathet und von diesem wiederum entlassen ist[1]). Im Heidenthum war man laxer, auch nach vollzogener Scheidung konnte der Mann seine Frau ohne weiteres wiedernehmen, wie es scheint ohne abermals das Brautgeld zu zahlen. Murra b. Vâqiʿ war erstaunt, daß das im Islam nicht mehr gelten sollte, erhielt aber auf seine Beschwerde von Uthmân oder Muâvia den Bescheid, Gottes Recht gehe seinem Rechte vor (Ham. 191). Hischâm b. alMughîra fragte seine entlassene Frau, als sie sich anschickte zu ihrem Geschlechte zurückzu-

---

1) Die Maßregel richtet sich gegen leichtsinnige Scheidung. Umgekehrt Hierem. 3, 1: „wenn ein Mann seine Frau entläßt und sie dann eines Andern Weib wird, darf er sie dann wieder nehmen? würde da nicht das Land entweiht?“ Aber 150 Jahre früher nimmt Hosea auf göttlichen Befehl sein früheres Weib wieder, nachdem es inzwischen von Hand zu Hand gegangen ist.

gehen: wo treffen wir uns denn wieder? Sie antwortete: bei der Messe. Ihre beiden Söhne veranlaßten sie aber dazubleiben, und ihr Schwiegervater vermählte sie dann dem Bruder ihres früheren Mannes. (Agh. VIII 50, 12—19. Daraus daß beim طلاق das Brautgeld nicht zurückgezahlt wurde, schließt WR Smith, daß der Mann dabei noch immer gewisse Rechte auf die geschiedene Frau gehabt haben müsse. Bei den Juden hatte der erste Mann seine Einwilligung zu geben, wenn die Geschiedene sich wieder verheirathen wollte (Josephus Ant. 15, 259 sq.).

2. Für Verwitwung sagt man ايم und ارمل, gewöhnlich nur von der Frau. Aber allein die arme Witwe heißt ارملة, und das Masculinum ارمل ist gar nicht nothwendig ein verwitweter, sondern nur ein armer Mann, ebenso wie مرمل. Mit ايم verhält es sich zwar etwas anders; doch auch hier verbindet sich leicht der Begriff des Unverheirathetseins mit dem der Besitzlosigkeit, z. B. in der Formel عيمان ايمان, fem. عيمى ايمى = ein Mann (oder Weib) ohne Kamele und ohne Weib (oder Mann). Hätte er Kamele, so hätte er auch ein Weib; hätte sie Kamele, so hätte sie auch einen Mann. Ob das hebräische אלמן mit ارمل oder mit ايمان zusammenzustellen ist oder auch mit beiden, weiß ich nicht zu entscheiden.

Ueber die Witwentrauer im Heidenthum gibt es eine oft citirte Tradition der Umm Salama[1]). „Umm Salama erzählt, es sei eine Frau zum Propheten gekommen und habe ihn gefragt, ob ihre Tochter, deren Mann gestorben sei, sich wohl ihre kranken Augen einreiben dürfe[2]); da habe er zwei drei mal gesagt: sie braucht nur eine Trauerzeit von vier Monaten und zehn Tagen einzuhalten; sonst pflegte euer eine erst nach einem Jahre[3]) das Stück Mist zu werfen. Nemlich wenn einer Frau ihr Mann gestorben war, so zog sie sich in ein kleines Zelt (حفش) zurück, legte die schlechtesten Kleider an und berührte keinen Parfum, bis ein Jahr vergangen war; dann wurde ihr ein Thier gebracht, ein Esel Schaf oder Vogel, und sie berührte damit[4]) ihre Scham, und selten überlebte das Thier die Procedur; dann trat sie heraus, es wurde ihr

---

1) Tâg und Lisân unter فضّ. Boch. III 235. IV 10.

2) Durch das Einreiben der Augen mit Kuhl präsentirte sich die Frau als heirathslustig.

3) Boch. IV 10 اذا مرّ كلب wenn ein Hund vorbei lief?

4) Mit dem Esel? es scheint allein an den Vogel gedacht zu werden; vgl. den folgenden Bericht des Ibn Muslim und Levit. 14, 6.

ein Stück Kamelmist [1]) gebracht, das warf sie, und nun durfte sie wieder Parfum und was sie sonst wollte gebrauchen [2]). Ibn Muslim hat von den Higâziern folgenden Bescheid erhalten. Die verwitwete Frau wusch sich nicht, rührte nicht einmal an Wasser, schnitt sich die Nägel nicht, und zupfte sich kein Haar aus dem Gesicht; nach Verlauf eines Jahres kam sie hervor, abscheulich aussehend; dann fuhr sie mit einem Vogel über ihre Scham und warf ihn halbtot fort." Deut. 21 schert die Kriegsgefangene das (lange Zeit nicht gemachte und dadurch verfilzte) Haar und schneidet sich die (verwilderten) Nägel, wenn sie ihren Herrn heirathet; Lev. 14 wird ein Vogel gebraucht bei der Reinigung des Aussätzigen. Für die Witwe wird aber im Alten Testamente keine Reinigung vorgeschrieben, sondern nur für die Wöchnerin; vielleicht ist auch bei den Arabern der Ritus von der Wöchnerin auf die Witwe übertragen. Wenigstens ist حفش, welches in der eben angeführten Tradition das Witwenzelt bedeutet, sonst auch das Zelt, in das die Wöchnerin nach der Geburt sich zurückziehen und in dem sie sich eine Zeit lang absondern muß [3]). Uebrigens darf man nicht glauben, daß diese Art der Witwentrauer noch zur Zeit Muhammads allgemeine Sitte gewesen sei; vornehme exotische Frauen insbesondere haben sich ihr sicherlich nie unterworfen.

Die hinterlassene Frau konnte — ein Zeichen wie sehr sie als Besitz betrachtet wurde — im Heidenthum vererbt werden; sogar an die Söhne ihres Mannes, ihre Stiefsöhne, natürlich erst recht an dessen Brüder, ihre Schwäger [4]). Der Islam verbot die Ehe mit dem Stiefsohn und hob überhaupt das Erbrecht an die Frau auf, obwohl er ihre Heirath mit den Schwägern an sich billigte. Spuren, wonach die Frau zum vererbungsfähigen Besitz gehörte, finden sich bekanntlich auch im Alten Testament in der Form, daß der rebellische Sohn, der bei Lebzeiten des Vaters die Erb-

---

5) Als das zunächst zur Hand liegende, was man werfen konnte.

2) Das heißt افتضاض, eigentlich gesagt vom Brechen (des Siegels) der Jungferschaft, hier vom Brechen des Witwenthums durch den symbolischen Akt.

3) BAthir II 268, 10 (Tab. I 1896, 5). Daß auch die Menstrua sich absondern mußte und nicht am Cultus theil nehmen durfte, im Heidenthum wie im Islam, ist bekannt (Jaqut I 236, 8. IV 651, 9 vgl. Buxtorf Synag. cap. 31).

4) WRSmith p. 87 sqq. 268. Sur. 4, 23. 26 (المقت). Ibn Qutaiba p. 55 sq. Agh. I 11, 19. VIII 48. XI 55 sq. XVIII 153, 23. Boch. III 236. IV 265. Beispiele, wo die Witwe den Schwager heirathet, zeichnen die Muslime nicht aus, weil das an sich nichts Heidnisches und Verbotenes ist.

schaft antreten will, zum Zeichen davon dessen Weiber usurpirt[1]). Auch den Levirat betrachtet WRSmith wohl mit Recht als ein modificirtes Ueberbleibsel des alten Erbrechts an die Frau und schließt aus Gen. 38, daß nicht bloß die Brüder, sondern eventuell auch der Vater des verstorbenen Mannes Recht und Pflicht an die Weiber hatten[2]).

3. Die Geschiedene und die Witwe werden zusammengefaßt unter dem Namen ثيّب. Aus der Etymologie (von ثوب = שוב) könnte man schließen, daß solche Frauen zu den Ihrigen zurückkehrten; jedoch die Etymologie ist unsicher und jedenfalls die Praxis sehr verschiedenartig. Bei Exogamie wird die ledig gewordene Frau häufig von ihren Verwandten abgeholt (Hamasa 457 v. 1 Agh. XIX 132, 3). Andererseits haben wir gesehen, daß von den Verwandten des Mannes Erbrechte auf die Weiber geltend gemacht werden können, und daß auch die Geschiedene unter Umständen von ihnen zurückgehalten wird. Nicht selten aber kümmern sich weder die Agnaten, noch die Affinen um die ledige Frau. Den Rechten stehn in Arabien immer Pflichten gegenüber; überwiegen die Pflichten, so sind die Rechte nicht gesucht — namentlich nicht in Familien, wo man bitter mit des Lebens Noth zu kämpfen hat: zwischen Reich und Arm, Vornehm und Gering ist hier ein großer Unterschied. Ist eine ثيّب begehrenswerth, so lassen sie die Verwandten ihres Mannes nicht gern los und ihre eigenen Verwandten reklamiren sie; in beiden Fällen bleibt sie nicht lange unverheirathet. Wenn sie nicht begehrenswerth ist und zur Last fallen würde, so reißt man sich nicht um sie. Sie muß dann sehen wo sie bleibt, wenn sie keinen anderen Mann bekommt. Groß ist die Schar der armen Weiber, die, von ihren Verwandten vernachlässigt, im Stamme herumbetteln oder auch bei irgend einem edelmüthigen Herrn als Gârât unterzukriechen suchen[3]) und namentlich den Fürsten auf dem Halse liegen. Zu den Fürstenpflichten Muhammads gehörte es, für solche Geschöpfe zu sorgen; es wird von einem Falle erzählt, wo eine Frau sich ihm

1) So Ruben Gen. 35, 22. 49, 4 und Absalom 2 Sam. 16, 21 sq.; vgl. Abner 2 Sam. 3, 7. 8. Man muß hinzunehmen, daß der Sieger, wenn er das Erbe eines besiegten und getöteten Herrschers antritt, zu Urkund dessen seine Frauen für sich nimmt.

2) Gen. 38, 26: צדקה ממני.

3) Bekannt durch seine Sorge für solche Frauen ist der berühmte alHârith b. Tzâlim. Aus Doughtys Travels sieht man, daß diese Verhältnisse heute noch ebenso sind wie vor Alters.

schenkte, d. h. ihm ihre Vilâ übertrug, damit er sie wieder an den Mann bringe (Boch. III 193. 204). Im Koran (Sur. 4, 32) legte er den Muslimen ans Herz: انكحوا الايامى. Omar bot seine verwitwete Tochter Hafça öffentlich aus (III 10). Als Chalif hatte er viel zu schaffen mit den Witwen der zahlreichen in den Eroberungskriegen gefallenen Muslime; sein Ideal war, sie durch Pensionirung so zu stellen, daß sie keiner Wiederverheirathung bedurften (II 240, 32).

6. Die Kinder.

Zwischen ehelichen und unehelichen Kindern wird ein Unterschied gemacht, die letzteren haben keinen Vater, sondern nur eine Mutter [1]). Die ehelichen Kinder gehören dem Ehemann der Mutter. Es wird zwar Gewicht darauf gelegt, daß sie auch von ihm stammen [2]); die strenge Hut der Keuschheit der Weiber hat keinen anderen Sinn; in der unverdächtigen Abkunft von den Vätern besteht die Reinheit des Blutes (Ham. 52 v. 3). Aber das Anrecht des Mannes an die Kinder ist nicht auf die Thatsache oder die Vermuthung gegründet, daß er sie gezeugt hat, sondern darauf, daß ihre Mutter ihm gehört. Jemand kann ein Weib heirathen, welches von einem Anderen schwanger ist; wenn nichts Besonderes ausgemacht ist, verbleibt das Kind dann dem, auf dessen Lager es geboren ist [3]). Es wird ferner als heidnischer Brauch erwähnt, daß jemand sich aus seiner Frau von einem Anderen Kinder erzielen ließ, die dann seine Kinder waren [4]). Muhammad hat in dieser Hinsicht allerlei zu reformiren gefunden; er legt Nachdruck darauf, daß die wirkliche Vaterschaft zur Geltung komme und jede Unsicherheit der Abstammung vermieden werde.

---

1) Ehelich = لرشدة; unehelich لغىّ oder لزنية (Ham. 463, 2). Bei ازيب und مقرف spielt der Gedanke ein, daß Kinder von Eltern verschiedenen Standes (richtiger: verschiedener Raçe) Bastarde sind, wie Füllen von Pferd und Eselin. — In dem häufigen لا ابا لك liegt der Vorwurf der Unehelichkeit. Indessen werden die Kinder manchmal auch aus anderen Gründen nach der Mutter genannt, als weil sie keinen Vater haben.

2) Aus seinem صُلب (Rückenwirbel), daher صُلبىّ = genuin. Der Rückenwirbel gilt als der eigentliche Sitz der männlichen Zeugungskraft, wohl wegen des Rückenmarkes.

3) الولد للفراش. Der Grundsatz wird vielfach von den Genealogen angewandt als Auskunftsmittel, um widersprechende Angaben über die Zugehörigkeit einer Tribus zu dieser oder jener größern Gruppe auszugleichen.

4) Boch. III 206 استبضاع = einem das بضع überlassen.

Die neugeborenen Töchter hat der Vater Gewalt zu töten. Sie wurden lebendig verscharrt, dafür gibt es ein eigenes Wort (وأد). Die Sitte wird im Koran öfters erwähnt und natürlich verboten; als Motiv erscheint die Sorge um die Ernährung des Kindes und die Scham über die Schande, Vater einer Tochter geworden zu sein[1]). Von dem Tamimiten Qais b. ʿAçim wird berichtet, daß er alle seine Töchter gleich nach der Geburt begraben habe und nachträglich sogar eine schon ziemlich erwachsene, die bei der Geburt vor ihm versteckt war, aus dem Grunde weil er es als eine Schmach ansah sie zur Heirath dahin zu geben; es wird hinzugefügt, daß andere vornehme Herren ebenso dachten und thaten (Agh. XII 149 sq.). Von einem anderen Tamimiten, Çaʿçaʿa b. Nâgija, dem Großvater des Farazdaq, wird erzählt, daß er eine große Anzahl kleiner Mädchen dadurch vor dem Grabe rettete, daß er dem Vater zu ihrem Unterhalt einige Kamele schenkte; als Motiv, weshalb man sie tötete, wird dabei ausdrücklich die Armuth und Noth angegeben[2]). Dies sind die beiden Hauptbeispiele die man kannte; da sie beide auf Tamimiten sich beziehen, so hat man angenommen, die Sitte habe sich auf den Stamm Tamim beschränkt. Aber Muhammad kennt sie offenbar in seiner nächsten Umgebung, sowohl in Mekka als in Medina; die angeführten Stellen des Koran beweisen das. Der Berg Abu Dulâma bei Mekka wird als die Stätte genannt, wo die Quraisch ihre Töchter auszusetzen pflegten (Agh. IX 122 oben). Einem Freier, den man nicht haben will, wird gesagt, er solle sich anderswo eine Braut suchen; die Mädchen seien ja nicht mehr rar, seit der Islam sie zu töten verboten habe (Ham. 117 v. 3). Das scheint doch eine ziemlich weite Ver-

1) Sur. 81, 8: bei der Auferstehung und dem jüngsten Gericht wird das verscharrte Mädchen gefragt, um welcher Ursach willen es getötet sei. 6, 152. 17, 33: tötet eure Kinder nicht aus Furcht vor Noth, Gott gewährt euch und ihnen Unterhalt. 16, 60: wenn einem von euch die Geburt eines Mädchens angesagt wird, so verdunkelt sich sein Gesicht vor Aerger; er verbirgt sich vor den Leuten wegen der Schande dessen was ihm angesagt ist, und überlegt, ob er es behalten solle trotz Schmach oder es in die Erde verstecken — vgl. 37, 149. 53, 21. Nach Sur. 60, 12 müssen die Weiber bei der Annahme des Islams schwören, ihre Kinder nicht töten zu wollen. Man kann indessen nicht zweifeln, daß die Weiber nur auf Befehl ihrer Männer handelten, wenn sie die neugeborenen Mädchen aussetzten (Agh. XIX 4, 19).

2) Agh. XIX 2, 15. 3, 16 sq. 29. Farazdaq rühmt sich dessen in mehreren Versen: manche Mutter sei in dunkler Nacht zu seinem Großvater gekommen, um dessen Schutz für ihre neugeborene Tochter gegen den Vater zu erbitten. Hervorgehoben wird, daß Çaʿçaʿa die kleinen Mädchen nicht etwa kaufte; denn die Araber von Mudar verkauften ihre Kinder nicht (XIX 4, 20 sq.).

breitung des Brauches in der heidnischen Zeit und einen merklichen Umschwung durch den Islam vorauszusetzen.

Die Söhne werden bekanntlich viel höher geschätzt als die Töchter, nur sie gehören in den קהל, in das Heer und in die Gemeinde, nur an ihnen werden die Aufnahmeceremonien vollzogen [1]). Den neu geborenen Knäblein gegenüber scheint das Recht des Vaters, sie sich vom Halse zu schaffen, entweder nicht bestanden zu haben oder doch nicht ausgeübt zu sein. Dafür indessen, daß der Vater einen schon mehr oder weniger erwachsenen Sohn verstößt, dafür gibt es Beispiele, merkwürdiger Weise auch solche, in denen er es der bösen Stiefmutter zu gefallen thut [2]). Eine patria potestas, natürlich nicht in der römischen Schärfe, existirt auch über die Söhne, aber nur solange sie wirthschaftlich unselbständig sind: so wenigstens in Mekka und Medina. Die مستضعفون in Mekka (Sur. 48, 25), obwohl längst erwachsen und wehrfähig, standen doch noch unter der väterlichen Gewalt; wie groß dieselbe war, zeigt das Verfahren Suhails gegen seinen Sohn bei Hudaibija (Vaq. 256); Muhammad erkannte sie in dem bekannten Vertrage mit den Quraisch voll an, so daß sogar der Vater über die Religion des vollmündigen Sohnes zu bestimmen hatte. Die Söhne des Abu Sufjân durften in seiner Abwesenheit kein Geld beitragen zur Ausrüstung eines Heeres, welches zur Rettung ihres Vaters ausgesandt werden sollte (Vaq. 41). Sa'd b. 'Ubâda machte seinen Sohn dadurch von sich unabhängig, daß er ihm einen Theil seiner Güter abtrat (Vaq. 317). Die Grenze der patria potestas ersieht man etwa aus dem Verhältnis des Abubakr zu Abu Quhâfa und aus ähnlichen Beispielen, wo der Alte eher unter der Mund seiner Söhne steht als umgekehrt.

Nicht einfach ist die Frage zu beantworten, wo die Kinder bleiben, wenn der Vater stirbt oder sich von der Mutter scheidet. Bei der Endogamie spielt kein Stamminteresse hinein, wenn die Kinder mit der Frau gehen. Es wird Agh. X 143, 21 als ein Grund gegen die Endogamie angeführt, daß dabei der Mann im Falle der Scheidung die Kinder verliere. Gehen aber die Kinder mit der geschiedenen Bint 'Amm, bei Lebzeiten des Vaters, so natürlich erst recht nach dem Tode des Vaters mit der verwitweten,

---

1) Vgl. Doughty I 452: when a man child is born, the father will slay an ewe, but the female birth is welcomed in by no sacrifice. Nemlich bei der Tasmija oder 'Aqîqa (Snouck II 137.)

2) Duâds Stiefmutter bewog seinen Vater ihn zu verstoßen; er machte einen vergeblichen Versuch und verstieß dann die Frau (Agh. XV 96, 4 sqq.). Aehnlich, aber nicht ganz gleich Agh. X 63 sq. XXI 15 sq.

falls diese nicht in ihres Mannes Familie bleibt. Das Letztere ist sehr häufig der Fall, der väterliche Oheim sorgt oft rührend für die Kinder seines Bruders und heirathet auch wohl seine Witwe. Allein häufig sind doch auch die nächsten Verwandten nicht grade darauf erpicht, ihren Haushalt durch hungrige Mäuler zu belasten, eher darauf, die Waisen von sich abzustoßen oder gar ihr Erbe an sich zu reißen. Bei der Exogamie freilich, sollte man denken, würde das Geschlecht oder der Stamm sich ins Mittel legen, wenn eine auswärtige Frau, bei der Rückkehr zu ihrem Stamme, die Kinder mitnehmen und ihm entreißen wollte. Es finden sich davon auch Beispiele, indessen mindestens ebenso viel vom Gegentheil. Es handelt sich meist um kleine Kinder. Die Araber sind nicht grausam genug um solche der Mutter zu entreißen, außerdem aber ist der Egoismus der Einzelnen stärker als ihr Gemeinsinn und als die Macht des Stammes: sie haben keine Lust sich der Kinder anzunehmen und kümmern sich nicht darum daß sie dem Stamme verloren gehen. So theilen die Waisen das Schicksal der Witwen. Die herumbettelnden Gârât, verwitwete und verlassene Weiber, haben gewöhnlich nicht bloß für sich selber, sondern auch für hungrige und zerlumpte, struppige Kinder zu sorgen. Erst wenn die Söhne erwachsen sind, werden sie dann ein Gegenstand des Interesses und der Eifersucht für ihre väterlichen Verwandten.

7. Abweichungen vom herrschenden Typus der Ehe.

1. Neben der patrarchischen Privatehe kamen im Heidenthum noch andere Formen der Heirath vor, die nicht als unstatthaft galten; die Verhältnisse waren bunt, sowohl innerhalb des selben Stammes, als auch namentlich bei verschiedenen Stämmen. Eine Erinnerung daran hat sich in der islamischen Ueberlieferung erhalten, freilich nur eine schwache [1]). Mit der einfachsten Eintheilung mich begnügend, stelle ich zunächst die roheren, dann (§ 8) die feineren Formen der Abweichung von dem herrschenden Typus zusammen.

2. Boch. III 206: „Eine Sippe von Männern (الرهط), unter zehn, hatten zusammen eine Frau; wenn diese ein Kind geboren hatte, ließ sie sie alle nach einigen Tagen holen, ohne daß einer ausbleiben durfte, und bezeichnete einen als den Vater, an dem das

1) انكحة الجاهليّة كانت انواعا heißt es BAthir III 372, 6, und ausführlicher Boch. III 206 in einer Tradition des Urva b. alZubair von ʿÂischa, auf deren Wichtigkeit zuerst Goldziher aufmerksam gemacht hat.

Kind dann haftete und der sich dagegen[1]) nicht wehren konnte.“ Mit Recht hat man damit den Bericht Cäsars (Bell. Gall. 5, 14) über die alten Briten verglichen: uxores habent deni duodenique inter se communes et maxime fratres cum fratribus parentesque cum liberis; sed si qui sunt ex his nati, eorum habentur liberi, quo primum virgo quaeque deducta est. WRSmith meint, der in Deut. 25 vorgeschriebene Levirat gehe ursprünglich auf eine solche Ehe zurück, die Erbpflicht auf Erbrecht, das Erbrecht auf Gemeinbesitz: was dafür spricht, ist besonders die Eingangsformel w e n n B r ü d e r z u s a m m e n w o h n e n, die in dem gegenwärtigen Inhalt des Gesetzes keine Erklärung findet. Auch der Umstand, daß noch in später Zeit die Stellung der Schwiegertochter und Schwägerin gegenüber dem Schwiegersohn und den Schwägern für sehr gefährlich galt[2]), weise auf ein ursprüngliches Gemeinrecht der männlichen Mitglieder einer großen Familie auf die Frau oder die Frauen. Was es zu bedeuten hat, daß sowohl bei den Arabern als bei den Briten das Kind doch schließlich einem Vater zugewiesen wird, darüber handelt Wilken p. 37. 38. Aber jedenfalls darf man darin einen Anfang und Uebergang zur patrarchischen Privatehe erkennen.

Sogar künstliche Verbrüderung zwischen Männern konnte die Wirkung haben, daß aller Besitz, auch Weib und Kind, ihnen zusammen gehörten. Darum wird sie in dem bekannten syrisch-römischen Rechtsbuche verboten[3]). Ich zweifle nicht, daß dort von arabischer Sitte die Rede ist; das Institut der Verbrüderung ist spezifisch arabisch und es waren seit langen Jahrhunderten viele arabische Stämme im römischen Syrien ansässig. Als die Mediner mit den eingewanderten Mekkanern im Anfang der Higra Brüderschaft schlossen, wollten sie auch ihre Frauen mit ihnen theilen,

1) Für بِهِ sollte man erwarten مِنْهُ.

2) Agh. II 162, 3 (Kamil 390, 10). XV 53, 8: der Dichter rühmt sich, daß er seinen K a n n â t und Gârât nicht antaste. Boch. III 220, 23: Muhammad verbietet, daß jemand mit der Frau eines Anderen allein sei, es sei denn ein naher Verwandter und daß jemand in Abwesenheit ihres Gatten bei ihr eintrete; gefragt wie es denn mit dem Schwiegervater in dieser Beziehung zu halten sei, antwortet er, der sei der allerschlimmste (الحمو الموت). Aus dem Alten Testament vgl. Ezech. 22, 11: ihr wohnt euren Schwiegertöchtern bei. Ferner R. Johanan bei Wagenseil b. Sota I 28: quaecunque nurus verecunda est in domo soceri sui, promeretur, ut ab ea descendant reges et prophetae. Allerdings ließe sich das Meiste auch ganz einfach daraus erklären, daß die Versuchung beim Zusammenwohnen mehrerer jungen Haushalte in einer großen Familie sehr stark war.

3) ed. Bruns und Sachau § 86. WRSmith p. 135.

sowie sie ihre Häuser mit ihnen theilten (Boch. III 198). Selbst wenn das nur heißt, daß sie ihnen dieselben zum theil abtreten wollten, ist das immer schon eine bedenklich brüderliche Auffassung des ehelichen Verhältnisses. Es mag auch die Sitte in diesem Zusammenhang erwähnt werden, daß hie und da der Gast des Hauses über Nacht nicht unbeweibt gelassen wird (Agh. XIX 131, 11).

Strabo bezeugt diese Form der Ehe bei den Bewohnern des glücklichen Arabiens (p. 783). „Alle Verwandten (*συγγενεῖς*) haben gemeinschaftlichen Besitz, aber der Aelteste hat darüber zu verfügen (*κύριος*). Sie haben auch eine Frau; wer zuerst kommt, wohnt ihr bei, indem er seinen Stab — jeder muß einen Stab tragen — vor die Thür stellt [1]; bei dem Aeltesten aber verbringt sie die Nacht.... Ein Ehebrecher wird mit dem Tode bestraft; Ehebrecher aber ist jeder aus einer anderen Verwandtschaft (*γένος*). So hatte die Tochter eines Königs funfzehn Brüder zu Männern u. s. w.“ Es ist unmöglich hier unter *γένος* etwas anderes zu verstehen als die *συγγενεῖς* oder die funfzehn Brüder; die Frau gehört nicht dem ganzen Stamme, wie Wilken (p. 8) meint, sondern einigen bestimmten nahe verwandten Männern, die einen Haushalt führen; Ehebrecher ist jeder, der nicht zu diesem kleinen Kreise gehört. Ob es richtig ist, daß auch die Frau aus der selben Verwandtschaft sein muß wie die Männer, möchte ich bezweifeln; jedenfalls ist der Zug für die Form dieser Ehe nicht charakteristisch.

3. Boch. III 206: „Viele Männer ließen sich allesamt mit einer Frau ein, indem sie sich keinem weigerte der zu ihr kam — das waren die Huren die vor ihren Thüren Fahnen zum Zeichen aufstellten —; wenn dann ein Kind geboren wurde, so kamen alle zusammen und riefen die Spürer (قافة) herbei, welche nach ihrem Ermessen das Kind einem Vater zuwiesen, an dem es haften blieb und dessen Sohn es genannt wurde, ohne daß er sich dagegen wehren konnte.“ Es handelt sich hier nicht um den Verkehr vieler beliebiger Männer mit einer einzigen Frau, am wenigsten, wie die Parenthese meint, mit einer gewerbsmäßigen Hure, etwa auf der internationalen Messe zu ʿUkâtz. Denn wie sollten dann noch bei der Geburt des Kindes alle möglichen Väter zur Stelle gebracht werden, wie sollte unter ihnen der Spürer (Qâif) den wirklichen Vater, durch Vergleich des Gliederbaues des Kindes, heraus-

1) Herodot 4, 172: wenn ein Nasamone zu einer Frau will, so stellt er seinen Stab vor ihre Thüre, ähnlich wie bei den Massageten. Agh. XII 55, 31 fungirt ein Pfeil oder Schuh anstatt des Stabes.

finden und wodurch sollte dieser zu den ihm auferlegten Pflichten gezwungen werden? Es handelt sich vielmehr, wie man mit Recht annimmt, um die Männer eines Stammes und um ihren unterschiedslosen Verkehr nicht mit einer, sondern mit allen Frauen des Stammes, die also dessen Gesamteigenthum sind und als solches behandelt werden. Auch hier aber findet sich wieder die Feststellung der Vaterschaft, die freilich auf anderem Wege geschieht als in dem vorher besprochenen Falle, wo mehrere Brüder eine Frau besitzen.

Ehebruch würde auch bei solcher Promiscuität des geschlechtlichen Umgangs innerhalb des Stammes noch immer möglich sein, wenn nemlich ein Stammfremder daran theilnehmen wollte. Bestimmtes läßt sich nicht sagen, da es an Beispielen fehlt; denn was Jaqut und Ibn Batuta über die Frauen der Hafenstädte Mirbât in Jaman und Nazvâ in ʿUmân berichten, daß sie sich ungescheut und ungehindert den Fremden preisgäben, gehört nicht hieher, und der in einem Schmähliede gegen die Azd erhobene Vorwurf, ihre Weiber seien Gemeinbesitz (فوضى), kann nicht für bare Münze genommen werden [1]).

Von den Troglodyten am Rothen Meere erzählen Agatharchides und Artemidorus [2]), Weiber und Kinder seien ihnen gemeinschaftlich, nur der Fürst habe seine eigene Frau, und wer sich mit der Frau eines Fürsten vergehe, müsse ein Schaf Strafe zahlen. Während also im Allgemeinen noch Weibergemeinschaft herrscht, haben Einzelne, die sich das erlauben können, Privatweiber. WR Smith vermuthet, daß auch bei den Arabern die Privatehe sich theilweise ähnlich entwickelt habe wie der Privatbesitz an Grund und Boden. Dieser ist zuerst von den Vornehmen und Reichen usurpirt, welche sich s. g. Himâ's anlegten [3]). Noch bis zum Islam scheint die Privatehe stellenweis als ein ärmeren Leuten unzugänglicher Luxus gegolten zu haben; sie mußten sich auf andere Weise behelfen [4]).

1) Jaq. IV 481 sq. Ibn Batuta II 227 sq. Agh. XIII 51, 29.

2) Geogr. Gr. Min. ed. Müller I 153. Strabo 775. WRSmith p. 140.

3) Vgl. meine Skizzen und Vorarbeiten III 104 sq. IV 95. 108. 176.

4) Leges Homeritarum (Boissonade Anecd. V 63 sqq., Migne LXXXVI 567 sqq.) § 6: ἕκαστος ἀνὴρ τὴν ἑαυτοῦ γυναῖκα ἐχέτω καὶ μὴ ἔστω αὐτοῖς λόγος εἰς ἀπολογίαν, ὅπερ οἱ πολλοὶ λέγουσι· πένης εἰμὶ καὶ οὐ δύναμαι ἔχειν γυναῖκα. Diese griechisch abgefaßte Gesetzgebung ist zwar reine Privatarbeit, aber mit den Verhältnissen vertraut. Sie zeigt, wie viel es auf dem Gebiet der Ehe zu reformiren gab. Sie verfolgt die selbe Tendenz wie die islamische Gesetzgebung, die Privatehe möglichst zu erleichtern und zu verbreiten. Vgl. § 49: Witwen

Auf dem Grundsatz, daß dem Fürsten ein Vorantheil an dem Gemeinbesitz gebühre, beruht das ius primae noctis (افتراع). Davon ist die Geschichte des ʿAmlîq von Tasm und der Schamûs (Agh. X 48 sq.) ein mythisches Beispiel; es findet sich aber auch ein historischeres. Unter den Azd Schanua hatten die Ghatârîf — so hießen die Harith oder ʿAmir b. Bakr b. Jaschkur — die Herrschaft über die Daus und damit das Recht, in das Zelt d. h. zu der Frau eines jeden Dausiten einzutreten; so lange der Pfeil oder der Schuh eines Ghitrîf vor der Thür lag, durfte der Dausit in sein eigenes Haus nicht hinein. Erst Amr b. Humama, der Vater des bekannten Tufail, der die Daus zum Islam überführte, schüttelte das Joch der Ghatârîf ab. So erzählt alKalbi Agh. XII 55, 28 sqq.

4. Weniger primitiv als die Weibergemeinschaft innerhalb eines beschränkten oder eines weiten Kreises, aber im Grunde weit roher ist die Mutʿa. Der Name stammt aus Sur. 4, 28: „nicht verboten sind, euch eure Sklavinnen, und außerdem dürft ihr euch für euer Geld Weiber zu verschaffen suchen, mit denen ihr ehelich und nicht unehelich lebt, und dafür was ihr von ihnen genießt (ما استمتعتم به منهن), gebt ihnen ihren Lohn, den bestimmten Satz, und darüber hinaus nach eurem Belieben was ihr gütlich verabredet.“ Die Schiiten finden hier die Erlaubnis, sich auf einen oder mehrere Tage ein Weib zu miethen [1]), namentlich an einem fremden Orte wo man sich nur zeitweilig aufhält; diese Erlaubnis habe der Chalif Omar ohne jede Befugnis aufzuheben gesucht. Die Sunniten behaupten zwar, daß schon Muhammad selber die Erlaubnis zurückgezogen habe, bestreiten aber großentheils nicht, daß sie in dem angeführten Verse gegeben sei. Das läßt sich auch schwerlich bestreiten, obwohl der Wortlaut mit Absicht entweder von vornherein dunkel gehalten oder hernach verdunkelt ist [2]). Muhammad kann nicht wohl sagen, man dürfe sich Sklavinnen halten und auch Ehefrauen auf legalem Wege erwerben, man solle aber den Ehefrauen bezahlen was man von ihnen genieße [3]). Er gestattet vielmehr in der That sich feile

---

sollen sich schnell wieder verheirathen; § 59: Gebot, Sklaven und Jedermann zu verheirathen.

1) Vgl. die Geschichte des Schiiten alSajjid mit einem charigitischen Weibe Agh. VII 18, 21.

2) Ibn Abbas soll nach منهن gelesen haben الى اجل مسمّى (Lisan X 205 sq.).

3) اجر für مهر ist allerdings unanstößig.

Frauenzimmer auf kurze Zeit zu miethen, sowie er nach der Tradition auch das تزوج بالثوب (Heirathen um ein Stück Zeug) gestattet hat[1]). Wenn er die Hurerei nicht abschaffen kann, so gibt er ihr einen anständigen Namen[2]). Er gibt sich den Anschein, als ob das Miethgeld dem Brautgeld entspreche und eine Art Ehe begründe („ehelich und nicht unehelich"); einen Vali verlangt er nicht, indessen wäre auch der in jedem Kuppler leicht zu beschaffen gewesen.

Die Mutʿa ist also nur ein besonderer und zwar islamischer Name für eine in aller Welt höchst gemeine Einrichtung. Sie ist kein im Islam conservirter Rest einer besonderen altarabischen Sitte, man darf sie nicht in der von Ammianus Marcellinus beschriebenen Form der saracenischen Ehe wiederfinden wollen[3]): uxores mercenariae conductae ad tempus ex pacto atque, ut sit species matrimonii, dotis nomine futura coniunx hastam et tabernaculum offert marito, post statum diem *si id elegerit* discessura. Denn diese Ehe differirt auf das allerstärkste von der Mutʿa dadurch, daß die Frau dem Manne Zelt und Lanze darbringt und daß sie nach einer bestimmten Frist[4]) das Recht hat fortzugehn oder auch da zu bleiben. Der Satz „uxores mercenariae conductae ad tempus ex pacto", wenn er auch etwas grob ausgedrückt ist, paßt doch thatsächlich durchaus auf die arabische Ehe überhaupt. Bei der Mutʿa handelt es sich gar nicht um ein Zusammenleben, sondern nur um den Geschlechtsgenuß[5]) für wenige Nächte. Allerdings kann man wenn man will behaupten, ein principieller Unterschied zwischen der sehr lockeren und leicht auflösbaren arabischen Ehe und der Mutʿa existire nicht; aber allzu scharf macht schartig.

8. Fortsetzung.

1. Es gab im Heidenthum eine Ehe ohne Valî und Mahr, die zwar durchaus eine ehrbare und edle Privatehe war, aber das

1) Boch. III 105 (vgl. 198. IV 166): die Muslime konnten es auf einem Feldzuge nicht mehr aushalten und waren drauf und dran sich zu verschneiden; da gestattete ihnen der Prophet, sich um ein Stück Zeug zu beweiben.

2) المتعة اخيت الزنا Agh. VII 18, 21.

3) Das نكاح der Umm Châriga (Agh. VII 18, 11 XII 78 sq.) sollte man überhaupt aus dem Spiel lassen.

4) Etwa nach der Hochzeitswoche. Wir haben noch die Ueberlieferung, daß es im Heidenthum theilweise den Frauen gestattet war, den Mann nach der Hochzeit zu verlassen, wenn er ihnen nicht anstand.

5) Vgl. Agh. XVI 63, 24 متعوق بها الليلة

Gegentheil der gewöhnlichen patrarchischen. Die Frau stand dabei nicht unter der Gewalt des Mannes, und zwar deshalb, weil sie auch nicht unter der Mund ihrer Verwandten stand, sondern freie Verfügung über sich selbst hatte [1]). Sie verlobte sich selbst, unter Bedingungen, die sie zu stellen hatte, z. B. daß der Mann außer ihr keine andere Frau haben dürfe; sie hatte auch das Recht sich selber zu scheiden. Die vereinzelten Beispiele sind zwar nicht ganz gleichartig und können auch nicht alle auf Geschichtlichkeit Anspruch erheben, aber sie genügen um das Vorkommen der Sitte zu erweisen und einen Begriff davon zu geben. Sie betreffen in erster Linie vornehme Damen, die „dem Landesbrauch" zu folgen nicht nöthig haben [2]).

BHischam 88 (Agh. XIII 124). Die Naggaritin Salma, Frau des Uhaiha, später des Haschim, dem sie den ʿAbdalmuttalib gebar, heirathete die Männer nur, wenn sie ihr zugestanden, daß sie das Verfügungsrecht über sich behalten solle, und verließ sie, wenn sie etwas an ihnen auszusetzen fand.

Agh. XIII 65, 30. 66, 24. Die Frau des ʿAbbas b. Mirdâs brach auf die Nachricht vom Uebertritte ihres Mannes zum Islam ihr Zelt ab und ging zu ihren Eltern zurück.

Agh. XV 96, 18 sq. Umm Habtar, die Frau des Ijâditen Abu Duâd, verließ ihn, weil er zu verschwenderisch war (صرمته).

Agh. XVI 105 sq. Die vielumworbene Mâvija in Hira entschied sich für Hâtim von Tai, verlangte jedoch von ihm, er solle die Frau, die er schon hatte, ihretwegen entlassen. Da er das nicht wollte, so kam die Heirath erst nach dem Tode der ersten Frau zu stande. Später jedoch schied sie sich von ihm; denn das konnten die Weiber, oder wenigstens gewisse Weiber, im Heidenthum thun. Sie drehten dann das Zelt herum, so daß der Eingang an die entgegengesetzte Seite zu liegen kam; wenn das der Mann sah, so wußte er Bescheid und kam nicht mehr zu der Frau ins Zelt. — Nach XVI 103 sq. war diese Mâvija „eine Königin", sie heirathete wen sie wollte; den Hâtim brachten ihr ihre Knechte, die sie ausgeschickt hatte, ihr den schönsten Mann zu holen, den sie in Hira fänden. Sie wird die Tochter des Afzar genannt, welche Dame aber Maralq. 20, 26 in einem etwas zweifelhaften Lichte erscheint. Nach Ham. 729 soll sie die Tochter eines vornehmen Tamimiten gewesen sein.

1) مالكة لأمرها Agh. VII 180, 8. XIII 124, 19. Auch عاتك Boch. III 38, 25.

2) Joseph. Ant. 15, 259 sq.: Salome schickte ihrem Gemahl Kostobarus den Scheidungsbrief, *οὐ τὸν ἐγεννῆ νόμον ἀλλὰ τὸν ἀπ' ἐξουσίας ἑλομένη*, denn nach dem Landesgesetz kann nur der Mann sich scheiden.

Daß Frauen mit eigenem Vermögen ebenfalls in der Lage waren, sich dem Manne gegenüber in eine unabhängigere Position zu setzen, liegt in der Natur der Sache, zumal da es ja in Arabien kein Gesetz gab, sondern Alles durch Privatvertrag geregelt werden konnte. Wir sind über das Besitz- und Erbrecht der Frauen vor dem Islam sehr wenig unterrichtet, aber sicher ist es, daß es Frauen gab, die Vermögen (Kamele) hatten[1]), darüber verfügten und es dem Manne zubrachten. Es wird eine alterthümliche Scheidungsformel überliefert, welche der Mann zu der Frau sprach: geh, ich will nicht ferner deine Heerde hüten[2]). Dazu fügt sich, daß Hâtim, als er von Mâvija zu ihrem Gemahl gepreßt wird, seine Kameraden fragt, ob es besser sei ihr Kamelknecht zu werden oder sich von ihr töten zu lassen (Agh. XVI 103, 26). Voraussetzung ist, daß die Frau in unabhängigem Besitz einer Heerde ist, deren Hut dem Manne obliegt, dem sie sie zubringt. Agh. X 6, 2. 3 sagt Umm Maʿbad zu ihrem Gemahl Duraid b. Çimma: ich habe dich gefüttert mit meinem bestrichenen (Brot) und dir mein Verhülltes preisgegeben, und ich bin zu dir gekommen als eine frei weidende, nicht angebundene (Kamelin) und als Jungfrau — sie ist also als Jungfrau nicht unter der Mund sondern unabhängig gewesen und hat eigenes Vermögen. Ramla hatte, in der heidnischen Zeit, ein Haus in Medina, das von Muhammad später als Herberge und Hospital benutzt wurde; Chadiga hatte ein Handelsgeschäft in Mekka, sie war in der Ehe mit Muhammad offenbar der stärkere Theil. Das Beispiel einer Erbtochter haben wir in der Nauvâr; sie lebte zwar erst im Islam, aber der Islam hat diese Einrichtung jedenfalls nicht geschaffen. Diese Nauvâr stand nicht unter der Mund; nur um sich zu verheirathen, mußte sie nach islamischem Gesetze einen Valî haben und wählte dazu den

---

1) Tarafa (1, 1) schilt wie es scheint, daß seiner Mutter ihr Erbe vorenthalten wird. Agh. XI 155, 27 ist vom Erbe der Frau die Rede, welches sie dem Manne zubringt, aber nach seinem Tode zurück erhält. Sonst vgl. meine Skizzen IV 160 sq., Müller und Nöldeke Del. 85, 4 sq. WRSmith scheint mir in diesem Punkte nicht inductiv genug zu verfahren, so gern ich ihm zugebe, daß Erbe und Beute ursprünglich parallel gingen. Es ist übrigens nicht an dem, daß die Beute stets gleichmäßig an alle Männer des Stamms vertheilt sei. Sie wurde nur an die beim Feldzug oder bei der Razzia Betheiligten vertheilt, und auch das consequent erst seit dem Islam — aus Gründen der Heeresdisciplin. Vorher stürzten sich oft die Einzelnen wie die Geier auf den Raub; jeder, nur für sich bedacht, raffte zusammen was er konnte und machte sich dann wo möglich aus dem Staube.

2) Freytag Einl. p. 207 aus Ar. Prov. I 498.

Farazdaq, der sie dann heimtückischer Weise nicht mit dem Manne ihrer Wahl verlobte, sondern mit sich selber (Agh. VIII 186 sqq. XIX 7 sqq.).

Der Islam nemlich erkennt grundsätzlich eine Ehe ohne Valî nicht an; wenn die Frau keinen Valî hat, so muß sie sich zum Behuf der Verlobung einen nehmen. Thatsächlich finden sich freilich auch im Islam Ausnahmen genug; Sukaina, die Urenkelin des Propheten, suchte sich ihre Männer selbst aus, legte ihnen die Pflicht auf kein anderes Weib und keine Sklavin neben ihr zu haben, und behielt sich das Recht der Scheidung vor. Noch heutzutage sind Ausnahmen häufig [1]. „Reiche Weiber wünschen manchmal eine Ehe einzugehn, um sich dem Einfluß ausbeutender Verwandten zu entziehen; solche sehen von allen gesetzlichen Ansprüchen (auf Unterhalt durch den Mann) ab, unterhalten selbst den Mann der ihre Freiheit schützen will, und können wenn es ihnen beliebt immer leicht die Scheidung veranlassen. Die Verabredung ist mündlich; denn im Ehekontrakt darf nichts stipulirt werden, wodurch eine gesetzliche Bestimmung für eine der Parteien aufgehoben würde."

2. Die Baalsehe erfordert nothwendig, daß die Frau in das Haus und in den Stamm ihres Mannes übersiedelt. Im Widerspruch dazu kommt es aber vor, daß der Mann in die Familie und in den Stamm seiner Frau einheirathet. Das ist eine Art umgekehrte Exogamie, wo nicht sie, sondern er das exotische Element ist. Dann ist sie der stärkere Theil, der Mann genießt um ihretwillen den Schutz ihres Vaters und ihrer männlichen Verwandten. Die älteste Tochter des Aus b. Haritha sagt zu ihrem Vater, indem sie den Antrag des Murriten Harith b. Auf abweist: ich bin nicht aus seinem Geschlecht, so daß er auf die Verwandtschaft mit mir Rücksicht nehmen mußte, und er ist nicht dein Gâr (Client) in deiner Heimath, so daß er vor dir Scheu haben müßte (Agh. IX 150, 1. 2). Hier wird also nicht die Frau die Gâra ihres Mannes, sondern er wird der Gâr ihrer Sippe [2]. Dabei findet sich öfters die eigenthümliche Modifikation, daß der auswärtige Mann nicht dauernd bei seiner Frau in deren Stamme

1) Snouck II 105.

2) Der Fall gehört natürlich nicht hieher, daß der gewaltsame Eindringling der Eidam dessen wird, den er sich unterworfen und vielleicht gar getötet hat. Oft ist der Gâr als Schwiegersohn in Wahrheit der Eroberer, namentlich in der Sprache der ethnischen Genealogie; und die Unterjochung einer älteren Bevölkerung durch eine jüngere wird unter dem Bilde der Heirath dargestellt. Z. B. hat Fihr-Quraisch die Tochter des Gurhumiten Mudâd geheirathet.

bleibt, sondern sie nur von Zeit zu Zeit dort besucht. Ich vermuthe, daß dies Verhältnis ursprünglich عُمرة (Besuch) hieß, welcher Ausdruck dann später auf den ersten Besuch, auf das erste Beilager im Hause des Schwiegervaters, beschränkt wurde. Die wenigen Beispiele, die ich aus alter Zeit zur Hand habe, sind zwar auch hier noch zum Theil unhistorisch, aber sie werden dadurch nicht unbrauchbar.

Arab. Prov. I 461. Agh. XIII 124: Hâschim, der Ahn Muhammads, machte viele Handelsreisen und ging auf diesen Reisen viele Ehen unter den verschiedenen Völkern ein. Beim Abschied gab er den Leuten ein Zeichen oder Pfand, welches ihm das Kind, wenn ein solches geboren würde, überbringen sollte, damit er es daran erkennte. So hatte er in Medina eine Frau, Salma, und von ihr einen Sohn, den sie behielt bis er erwachsen war: da gab sie ihn nach einigem Sträuben den Quraischiten heraus.

Agh. XIII 123: Ka'b b. Amr, von Naggâr, heirathete eine Frau von den Sâlim b. Auf, so daß sie in ihrem Geschlechte wohnen blieb und er sie dort besuchte.

BHischam 770: Haggâg b. 'Ilât, von Sulaim, wohnte unter seinem Volke, hatte aber eine Frau in Mekka, eine Schwester des bekannten Muç'ab b. 'Umair, bei der er viel Gold deponirt hatte, das aus den Bergwerken der Sulaim gewonnen war.

Auch dieser Brauch hat im Islam nicht aufgehört. Im Mittelalter erwähnt ihn Ibn Batuta von Zebîd in Jaman[1]). „Die Frauen dieser Stadt weigern sich nicht, wenn Fremde ihnen einen Heirathsantrag stellen, gehn aber nicht mit, wenn sie wegreisen. Wenn Kinder da sind, so sorgt die Mutter für deren Bedürfnisse, bis der Vater wieder zurückkommt. Während der Abwesenheit der Männer verlangen die Frauen nichts für ihren Unterhalt, und während ihrer Anwesenheit sind sie mit wenigem zufrieden. Aber sie verlassen niemals ihre Stadt, sie wären um keinen Preis dazu zu bewegen.“ Doughty I 289 erzählt: the sheykh was come in to wed a town wife; for as some villager, trafficking to the nomads, will have his Beduwîa always abiding him in the desert, so it is the sick fantasy of many a Beduwy to be a wedded man in the market settlement, that when he is there he may go home to his wife, though he should not meet with her again in a round year. Nach Snouck II 109 gehört es zu den allgemein anerkannten herkömmlichen Rechten der mekkanischen Ehefrau, die dem Gesetze zuwiderlaufen, daß sie in Mekka bleibt, wenngleich ihr

1) II p. 168 bei Wilken p. 43 sq.

Mann auf lange Zeit in andern Ländern reist; besonders die in Mekka geborenen Weiber würden zum Himmel schreien, wenn man sie nöthigen wollte ihrem Gatten zu folgen.

3. Von hier ist es nicht weit zu dem freien Liebesverhältnis. Auch dabei bleibt die Geliebte in ihrem Stamme und empfängt dort den Besuch des Liebhabers, der einem fremden Stamme angehört; das Wort زار *besuchen* wird technisch in diesem Sinne gebraucht. Der Liebhaber heißt *Chalîl*, der Freund; der eigentliche Ausdruck aber, der im geraden Gegensatz zu *Baal*, Besitzer, gebraucht wird, ist *Chadîn* oder *Chidn*, der Buhle[1]). Die Geliebte heißt *Chalîla* und *Chulla* und mit einem spezifischeren Worte *Çadîqa*, die Freundin. Das Verhältnis ist nicht unedel; eine Çadîqa ist durchaus keine Hure[2]). Es beruht auf Liebe und Treue, auf der gegenseitigen Zuneigung[3]). Aber auch lediglich darauf, es dauert nur so lange als die Liebe dauert. Es kann sehr fest und innig sein, es kann sich auch bald lockern. Die Freundin ist durch nichts gebunden ihrem Freunde zu willen zu sein; sie kann auch zwei Liebhaber haben[4]). Es gibt Beispiele von stolzen Weibern aus edelstem Blut, die es für unter ihrer Würde halten, sich unter das Joch eines Baal zu begeben. So will ʿUqaila bint alDahhâk, aus dem Geschlecht der Könige von Hira, ihren fernen Geliebten, nach dem sie sich sehnt, doch auf keinen Fall zum Baal haben, sondern nur zum Chidn[5]). Eine ähnliche Voraussetzung liegt der Geschichte von der hirensischen Königstochter und Muraqqisch dem Jüngeren (Agh. V 139 sq.) zu grunde, wenigstens

1) Sur. 4, 29. 5, 7. Labîd 6, 17. Agh. II 45, 6. VII 57, 1. 8. X 86, 10. 118, 21 XIX 5, 10.

2) Eine بغىّ hält sich nicht im eigenen Stamme auf und treibt ihr Geschäft auf Märkten und Messen und an frequenten Stellen der großen Straßen. Ein berühmtes Wesen dieser Art ist die Charqâ, bei der die Pilger einkehrten und die sich selbst ein منسك من مناسك الحجّ nannte, d. i. eine Observanz von den Observanzen des Festes, oder eine Station von den Stationen des Kalvarienberges. Sie verhüllte ihr Gesicht vor Bekannten und zeigte es nur vor Fremden. XVI 123 sqq. XIX 26. XX 140 sq.

3) Geschenke sind dabei natürlich nicht ausgeschlossen. Eine eigenthümliche Bedeutung scheint das Geschenk eines Misvâk (Analogie der Zahnbürste) an die Geliebte zu haben, Agh. X 129, 2. 3.

4) Das heißt ضمد = צמד. Es gilt aber gewiß nicht für gut, wenn ein Mädchen zwei Knaben lieb hat.

5) Agh. VII 56 sq.: وما لى بالتبعّل مستراح ولو ردّ التبعّل لى اسيرى. Aehnlich X 52, 21: اكره العشير واحبّ الغزل.

der anzunehmenden älteren Version derselben, und ebenso manchen Erzählungen über omaijidische Princessinnen aus späterer Zeit: dabei wird manchmal der Chidn, in den sich die vornehme Dame versehen hat, von ihr gepreßt, so wie Hâtim nach Agh. XVI 103 von der Mâvija. Im Allgemeinen aber ist in der uns bekannten Zeit, die nur wenig über den Islam hinausreicht, die Çadîqa mehr für arme, verwegene Leute, für Landstreicher und Räuber, wie 'Amr dhu 'lKalb und Taabbata Scharran[1]). Aus dem Alten Testament gehört dahin das Verhältnis Simsons zur Delila von Gaza. Er legt den Kopf in ihren Schoß und sie macht sich mit seinem Haar zu thun: im alten Arabien ist es ein gewöhnlicher Freundschaftsdienst der Geliebten, daß sie ihrem Schatz den Kopf in ihrem Schoße kämmt und von Ungeziefer säubert[2]). Und auch in Arabien wird der Mann durch den Besuch der Geliebten in einem fremden Stamme nicht selten seinen Feinden ans Messer geliefert[3]).

Gelegenheit solche Liebschaften anzuknüpfen gab es zwischen benachbarten Stämmen, aber auch zwischen fernen und fremden, wenn z. B. einer beim anderen in dessen Revier zu Gaste war oder wenn die Frühlingsweide Freund und Feind durcheinander warf. Das Hauptvergnügen war das Getändel, تحدّث oder bei den Jamaniern غزل[4]). Gewöhnlich machten die jungen Männer ihre Annäherungsversuche, wenn die Weiber des benachbarten Lagers sich selbst überlassen waren; also verstohlen. Denn bei den meisten Stämmen war dieser Verkehr der Frauen mit fremden Männern verpönt. Aber von einigen wird berichtet, daß sie ihn gestatteten oder wenigstens ziemlich gleichmüthig nahmen. In einer Erzählung über den Liebesdichter Jazîd b. alTathrîja, aus der

1) XVIII 213 sq. XX 22. Hudh. 219.

2) Daher Ham. 146, 6 der hübsche und auch grammatisch interessante Halbvers: يسوء الفاليات اذا فلينى.

3) Ham. 104, 9. 10. Hudh. 219. vgl. Agh. IV 134. 18 sqq.: Zuhair alGu'fi ließ sich von einer gefangenen Sulaimitin lausen; sie band ihm die Locken mit den Fransen einer rothen Decke zusammen, auf die er den Kopf gelegt hatte; in dieser Situation wurde er von seinen Feinden vergewaltigt. Ham. 491: ein Steuereinnehmer in der Zeit des Ibn Zubair läßt einem Sulaimiten sagen: „schick mir deine Tochter.“ Antwort: wenn er sie heirathen wolle, so solle er nur herkommen und sie sich holen, denn er sei ihr ebenbürtig. „Nein sie soll uns nur den Kopf kämmen und mit uns schwatzen (تحدّث).“ Darüber entsteht Mord und Totschlag.

4) Daher heißt auch die jamanische Liebespoesie غزل Agh. I 32, 12. 34, 4. Von da kommt unser Ghasel, jedoch auf dem Umwege über die Perser.

Omaijidenzeit, wird der Gegensatz veranschaulicht, der in dieser Beziehung zwischen den Quschair und den Garm herrschte[1]).

Der Islam nannte Alles was nicht Baalsehe war — deren Grenzen er allerdings möglichst weit ausdehnbar machte — Hurerei. Er verbot die Hurerei und machte dies Verbot in seinem Katechismus zu einem Hauptunterscheidungszeichen gegenüber dem Heidenthum (BHischam 256, 9). In der früheren Zeit wurde das Wort زنى öfters ganz harmlos gebraucht, von sexuellem Genuß überhaupt[2]). Es gab weder auf diesem noch auf anderen Gebieten ein Gesetz, dessen Nachachtung hätte erzwungen werden können. Die Baalsehe war die herrschende Sitte bei den anständigen, wohlhabenderen Leuten, aber geschützt war sie nicht durch das Gesetz, sondern nur von dem Baal selber und von seinem Stamme. Für Stammfremde ist es zwar gefährlich, aber durchaus keine Schande die Weiber anzutasten: im Gegentheil man prahlt damit. Es gibt keine Strafe dafür, sondern nur Rache des Verletzten. Innerhalb des Stammes wird das Eigenthum am Weibe respektirt wie anderes Eigenthum. Aber den Andern gilt auch dieses Eigenthum als Occupation, deren Recht durch Occupation des Stärkern vernichtet wird. Ja der Anspruch des Baals auf sein Weib wird zuweilen sogar als ein Eingriff in die allgemeinen Menschenrechte angesehen, etwa ebenso wie der Anspruch auf privaten Grundbesitz. Der Sulaimit Muâvija, der Bruder der Chansâ, wollte in ʿUkâtz der Murritin Asmâ beiwohnen, wurde aber von ihr abgewiesen, weil sie einen Gemahl habe, den Murriten Ibn Harmala. Darüber gerieth er so in Wuth, daß er schwur den Ibn Harmala zu töten. Bei dem Versuch kam er freilich selber um (Agh. XIII 141).

In der Poesie ist die Liebe bekanntlich ein nothwendiger Topus, womit jedes längere Gedicht beginnen muß. Die Dichter sind nicht alle so frech und unbändig wie Maralqais, sie rühmen sich mitunter ihrer Zucht und Zurückhaltung[3]). Aber nie wird die Ehe besungen, jedenfalls nicht als Ehe[4]). Der Baal erscheint als

---

1) VII 110 sq. Dabei ist von Pfändern die Rede, die nicht die Frauen von den Männern (Gen. 38), sondern die Männer von den Frauen bekommen.

2) Agh. XII 55, 24. In dem bekannten Schlachtliede der Töchter Târiqs kommt نزانى vor als Variante zu نعانق. Vgl. Nöldeke DMZ 1886 p. 155.

3) Maralq. 63, 10: genieße das Leben, d. h. die Weiber, die verheiratheten und die frei buhlenden; der Gegensatz von حصان und زانية ist bemerkenswerth. Dagegen Antara 1, 16: ich habe kein Weib verführt, ohne ihrem Vormund das Brautgeld gezahlt zu haben. Alq. 2, 4: sie ist dem Baal treu.

4) Wenn sie besungen wird, so geschieht es gleichfalls in den Formen des freien Liebesverhältnisses Agh. IX 5, 31 sq.

ein widerwärtiger, lächerlicher Geselle, er wird befehdet und verhöhnt[1]). Poetisch ist allein die freie Liebe, mit dem steten Wechsel ihrer Freuden und Leiden. Die verstohlenen Rendezvous sind selten und gefährlich, sie geizt mit sich, hat ihre Launen und läßt ihn hangen und langen, er muß immer zweifeln, ob das Band noch besteht und fest ist, oder zerschnitten und abgerieben: jedoch gerade darin liegt der Reiz des Verhältnisses. Auf die Jungfräulichkeit der Geliebten wird nie Gewicht gelegt, häufig verräth ihr Name, daß sie ein Kind hat, und mit Vorliebe wird sie als Mutter eines Knäbleins bezeichnet und beschrieben. Aber fast immer liegt das Verhältnis, das er besingt, hinter dem Dichter. Er schaut mit Wehmuth zurück auf frühere Zeiten, deren er sich erinnert, wenn ihn die Reise an verlassenen Stätten vorüberführt, wo er einst der Liebe pflegte. Damals war er noch jung und toll, jetzt hat ihn das Thören verlassen, er ist zu reiferen Jahren gekommen und wahrscheinlich ein guter Ehemann geworden. Das muß man wohl im Auge behalten, wenn es sich darum handelt, dieses poetische Liebesverhältnis in richtige Proportion zu der prosaischen Ehe zu setzen.

4. Um die Typen der Heirath in einem Ueberblick zu ordnen, kann man zwei Haupteintheilungen machen. Die Frau ist entweder die Frau eines Mannes, oder mehrerer Männer, sei es einer Sippe von Brüdern oder des ganzen Lagers. Damit kreuzt sich eine andere Eintheilung. Die Frau bleibt entweder in ihrer Heimath und empfängt dort einen auswärtigen Mann, oder sie zieht zum Manne in einen fremden Stamm. Beides ist Exogamie, richtige freilich nur im zweiten Falle, bei der patrarchischen Raub- und Kaufehe[2]). Als dritter Fall, der den eben gesetzten Unterschied ausgleicht, kommt hinzu die Endogamie (Mann und Frau aus dem selben Lager), die freilich bei der Raubehe überhaupt nicht möglich und bei der Kaufehe gewiß nicht ursprünglich ist. Eine genetische Reihenfolge aufzustellen ist sehr schwierig, der Anfang und der Gang der Entwicklung braucht nicht überall gleich gewesen zu sein, und innerhalb des selben Stammes können verschiedene Formen neben einander bestanden haben.

---

1) Er ist ein wohlsituirter Mann, der sich für sein Geld eine Frau hält und damit geizt wie mit Anderem; öfters ein Graukopf.

2) Es wäre am Ende besser, diejenige Exogamie, bei der die Frau in ihrer Sippe bleibt, als Endogamie zu bezeichnen, und das was man jetzt Endogamie nennt als doppelte Endogamie.

9. Die Metrarchie.

1. Den Namen Metrarchie für den Avunculat wähle ich im Gegensatz zu Patrarchie. Er ist jedenfalls besser als Matriarchat, aber er darf nicht falsch verstanden werden. Denn es kommt nicht darauf an, daß die Mutter herrscht, sondern nur darauf, daß sie die Verwandtschaft bestimmt und damit die Stammzugehörigkeit und das Erbrecht: das geschieht auch wenn sie als Frau unter der Mund ihrer männlichen Verwandten steht, nur nicht unter der Gewalt des Gatten. Der Mutterbruder im Singular oder Plural ist dann das männliche Haupt der Familie und hat die rechtliche Stellung, die in der Patrarchie der Vater hat. Der Bruder hat Gewalt über die Schwester und deren Kinder, der Bruder beerbt den Bruder, an Stelle von Vater und Sohn tritt Mutterbruder und Schwestersohn. Es ist nicht unbedingt nöthig, daß bei diesem System der Vater unbekannt, gleichgiltig und von der Familie ausgeschlossen ist; nur hat die Verwandtschaft mit ihm keine politische und rechtliche Bedeutung.

Manche Spuren führen darauf, daß dies System einst bei sehr verschiedenen Völkern verbreitet gewesen ist, z. B. bei den Lyciern und bei den Babyloniern[1]). Besonders bei den nubischen Stämmen hat es im Alterthum geherrscht und herrscht es stellenweise noch heute; hier sind wir durch Munzinger genau darüber unterrichtet[2]). Ostafrika aber bildet die Brücke nach Arabien. Eine gewisse Präsumtion dafür, daß auch in Arabien einst Metrarchie bestanden hat, entsteht schon aus der allgemeinen Lockerheit des Verhältnisses zwischen Mann und Frau. Denn dadurch wird immer auch das Verhältnis zwischen Vater und Kindern gelockert, während dagegen das der Mutter zu den Kindern von Natur fest und unzweifelhaft ist. Dazu kommen speziellere Beweise.

2. Mehrere alte Worte für Verwandtschaft, auf die beson-

1) Herod. 1, 173. Nöldeke, Monatsschr. 1884 p. 304: »Jeder Mandäer bezeichnet sich in religiösen Texten, in denen er auch oft einen anderen Namen trägt als im gemeinen Leben, als Sohn seiner Mutter, während er sich sonst nach seinem Vater nennt. Die Nachkommen der alten Babylonier haben hier im hieratischen Style eine uralte Ausdrucksweise beibehalten.«

2) Munzinger, Recht der Bogos (Winterthur 1859). Derselbe, Ostafrikanische Studien (Schaffhausen 1864) p. 469 sqq. Johannes Eph. (ed. Cureton) 293, 15: der Vorgänger des Königs der Nabadäer ist sein Mutterbruder. Barhebr. Hist. Dyn. (ed. Bedjan) 147, 5: der junge König der Nubier, der sich im שקא דמלכותא (= قعدد) von Mutterseite ableitete. Barhebräus berichtet nach Dionysius Telmahr., der den Nubierkönig selber gesehen hatte.

ders WRSmith aufmerksam gemacht hat, sind hergenommen von der Mutter und von den mütterlichen Organen. Der Name Mutter selber bedeutet auch Volk, Stamm, Gemeinde[1]). Wichtiger noch und sicherer ist رحم, welches im Arabischen ganz allgemein Verwandtschaftsgefühl und Verwandtschaftskreis, eigentlich aber uterus und also ursprünglich Abkunft von der selben Mutter bedeutet[2]). Aehnlich بطن, eigentlich venter und uterus, dann Geschlecht, Stamm[3]). Auch ثدى, Brust, steht allgemein von der Verwandtschaft; die Milch ist Mutterblut und die Milchverwandtschaft, durch Saugen der selben Brust, steht der vollen, d. h. der uterinen Verwandtschaft gleich[4]). Daher Abschneiden der Brust = Bruch der Verwandtschaft; Hinstrecken der Brust = Erbietung der Verwandtschaft[5]).

Dieser Sprachgebrauch ist nicht rein fossil, es lebt noch das Gefühl bei den Arabern, im Alterthum wie in der Gegenwart, daß die Mutter die Natur und die natürliche Verwandtschaft, die Art des Kindes, bestimmt. Die Mutter ist heiliger als der Vater (Boch. IV 39 u.), die Mutterschwester steht dem Kinde näher als die Vaterschwester (Boch. II 93, 23 III 48, 8), und der Patruelis hat von Natur weniger Verwandtschaftsgefühl als der Matruelis

1) Das Wort אֻמָּה scheint freilich aramäischen Ursprungs zu sein (im Singular mit Femininendung, im Plural zum Theil mit Masculin-, z. Th. mit Femininendung). Im Hebräischen ist es spät (Gen. 25, 26. Num. 25, 15. Ps. 117, 1); im Arabischen bedeutet es die Religionsgemeinde und die Religion selber (schon Nab. 17, 21). Vielleicht gehört auch לאם hieher, wenn man die Annahme wagen darf, daß es gebildet ist wie die Eigennamen *Lischams* und (nach Nöldeke) *Lemoel*.

2) Im Hebräischen aber bedeutet רחמים nur Mitleid, auch Amos 1, 11. Gegen WRSmith p. 28.

3) Es wird noch immer auch für Abkunft von der Mutter gebraucht, z. B. Agh. XI 50, 24 sq., wo Abdalmalik von Ibn Qais alRuqaijât verlangt, er solle den Ausdruck بطن عائشة abändern in نسل عائشة. Sonderbar ist der Gebrauch von كرش Boch. II 253, 12, wo Muhammad die Ançár كرشى وعيبتى nennt (seine Verwandten von Mutterseite und seine Vertrauten).

4) Boch. I 18. II 82 sq. III 148. WRSmith p. 48. 149. Die ὁμογάλακτες sind nach Philochorus (bei Harpokrat. p. 48) die selben, οὓς νῦν γεννήτας καλοῦσι; bei Hesychius wird ἀγαλακτοσύνη (gebildet wie ἀ-δελφός = co-uterinus) durch συγγένεια erklärt (Wilamowitz).

5) Vgl. Alqama 12, 6 und die berühmten Verse alA'schas Agh. VIII 80, 13: manch Auge hat auf den Schein eines auf der Höhe brennenden Feuers geblickt, angezündet für Durchfrorene, die sich daran wärmen sollten; und es hausten an dem Feuer die Milde und Muhallak, zwei Milchgeschwister, die sich geschworen haben in einer dunklen Nacht, sich nie von einander zu trennen.

(Agh. XIV 74, 31 sq.). Immer wieder schlägt bei dem Kinde die Ader der Mutter oder des Mutterbruders durch [1]).

3. Auf dem politischen und rechtlichen Gebiet ist zur Zeit Muhammads die Verwandtschaft durch die Mutter der Verwandtschaft durch den Vater unterlegen: die letztere ist die politische Verwandtschaft. Aber sie ist als solche doch noch nicht überall und nicht vollständig durchgedrungen, und wo sie es ist, da sieht man noch zuweilen die Spuren des unterlegenen Systems durch das oben auf gekommene hindurchschimmern. Der Stamm wird zwar gewöhnlich wie im Hebräischen als Vater bezeichnet, aber gelegentlich auch als Mutter [2]). Die Namen der Völker werden nicht bloß willkürlich bald (als personificirte Väter) maskulinisch bald (als Collectiva) femininisch construirt, obgleich das erlaubt ist. Vielmehr giebt es neben ethnischen Namen, die durchaus als männlich gelten, andere die durchaus als weiblich gelten [3]). Besonders merkwürdig ist die ungemein häufige Erscheinung, daß ein Stamm sowohl einen Vater als eine Mutter hat, d. h., daß neben dem männlichen Namen ein manchmal antiquirter, manchmal viel gebräuchlicherer weiblicher steht, der sich ganz oder ungefähr damit deckt. Da scheint in vielen Fällen eine Umprägung statt gefunden zu haben, bei der die Urschrift noch zu lesen ist; obwohl man nicht gezwungen und befugt ist, alle Fälle auf diese Weise zu erklären. Es kommen endlich auch solche Namen vor, bei denen das Genus schwankt. Zum Theil ist es da klar, daß ein früheres Femininum nachträglich zum Masculinum geworden oder auch gemacht ist, z. B. bei Taghlib.

Indessen nicht bloß in solchen Namen und Vorstellungen zeigt sich der Kampf der Systeme, sondern auch in praktischerer Weise. Der Grundsatz, daß man stets zu den Vatersverwandten und nicht

1) Kamil 79, 9 sq. bekennt der betrübte Vater, daß sein Sohn ʿIçâm innerlich und äußerlich nicht ihm, sondern der Mutter gleiche, und gibt den Grund seiner Niederlage dahin an: »ich schlief (bei der Zeugung), aber die Ader des Mutterbruders schläft nicht.« Ein Anderer bedauert es, daß der Beitrag der Mutter zu dem Kinde nicht entbehrt werden kann (Agh. XI 142, 13). Vgl. Wetzstein in der Ztschr. für Ethnologie 1880 p. 244 sqq.

2) أمى Ham. 124 v. 3. 306 v. 1. 340 v. 1. 348 v. 4; wie Exod. 15, 2. Dagegen 79 v. 4. 92 v. 2. 344 v. 1. Nab. 10, 20.

3) So sind auch bei den Hebräern Isaak und Jakob Männer, aber Lea und Rahel, Schiphra und Phua Weiber. WRSmith meint, Sara sei das Femininum zu Israel; wenn aber Sara von dem Verbum herkommt, das in Israel steckt, so ist der Name nicht femininisch. Man müßte denn eine Urform Sarat annehmen, die fälschlich von den Späteren als Nomen behandelt und in Sara verwandelt wäre; dagegen scheint indes Sarai zu sprechen.

zu den Mutterverwandten — wenn diese von jenen verschieden sind, bei Exogamie — halten müsse, ist keineswegs Allen in Fleisch und Blut übergegangen; er muß immer wieder eingeschärft werden (Ham. 259 v. 4. 5). Die mütterliche Verwandtschaft kann die politische Bedeutung nicht abstreifen; in Conflictsfällen gibt es Zweifel und Seelenkämpfe, auf welche Seite man sich schlagen soll; es versteht sich nicht von selbst, sondern es ist Moral und kostet Ueberwindung, mit dem Vatersstamm (Aʿmâm) zu kämpfen gegen den Muttersstamm (Achvâl). Daher der Fluch gegen die, welche die Pflicht gegen die Achvâl höher stellen als die gegen die Aʿmâm Agh. XI 137, 4 عضّ بظر امّه من راى حقّ اخواله فوق حقّ اعمامه. Daher prahlt der Dichter damit als mit etwas Außerordentlichem, daß es in seinem Stamme Männer gebe, die den Tod ihres Vaters sogar an Verwandten der Mutter gerächt haben XVIII 69, 9: وقاتل خاله بأبيه منّا. Der Sohn einer auswärtigen Frau ist ein Amphibium; als Vaterssohn gehört er dem Stamme an, in dem er geboren ist, als Schwestersohn aber dem Stamme seiner Mutter: ابن اخت القوم منهم (Boch. II 215, 22. IV 139, 4). Bei etwaigen Verwicklungen zwischen den zwei Stämmen ist er wie geschaffen zum Unterhändler, und auch zum Verräther an dem einen oder dem anderen — diese Rolle spielt er denn auch des Oefteren[1]).

4. Bei der Verlobung tritt der Bruder der Braut auffällig neben dem Vater hervor und sticht ihn öfters aus, wie schon Freytag (Einl. p. 202) bemerkt hat. Das hat sich bis in den Islam und in die Gegenwart erhalten. Daß es auch bei den alten Hebräern vorkam, schließt WRSmith aus Gen. 24[2]). Es entspricht, daß die Frau den Bruder dem Manne vorzieht, wie wir gesehen haben; Vaterrecht und Gattenrecht gehen parallel. Im Erbrecht theilen die Brüder des Verstorbenen mit seinen Söhnen (Ham. 746 v. 2. Labid 18, 2. 4). Die Nachfolge in der Herrschaft geht noch im Islam rechtlich nicht vom Vater auf den Sohn über, sondern erbt unter den Brüdern oder Geschlechtsgenossen[3]); es kostet den Chalifen viele Mühe diese Sitte zu brechen. Wie großer Werth

1) WRSmith p. 159. Vgl. Abimelech Jud. 9, 2.

2) Die Erwähnung Bethuels 24, 15 beruht übrigens auf Nachtrag (Mez).

3) Vgl. WRSmith p. 95. Zwei Brüder auf dem Throne, der jüngere offenbar cum iure succedendi, Skizzen IV p. 102. Das Princip ist كابر عن كابر; das entgegengesetzte بالقعدد (nach der Erstgeburt wie Gen. 5). Aber bei Labid 18, 4 geht zwar die Erbschaft im Allgemeinen auf die Brüder etc. über, dagegen die Nachfolge im Fürstenthum auf den jungen Sohn.

auf das Blut der Achvâl gelegt wird, ist bereits früher gezeigt worden (Ham. 690 v. 2). Der Mutterbruder steht ebenbürtig neben dem Vater und dem Großvater (Ham. 351 v. 5). Es finden sich auch bei den Arabern Beispiele des aus der Germania des Tacitus bekannten Verhältnisses des Mutterbruders zum Schwestersohn, bei einzelnen alten Recken (Hudh. 151. Ham. 382 v. 5). Am merkwürdigsten ist, daß der Name *Châl* (avunculus) sogar gradezu für die väterlichen Vorfahren gebraucht wird; das läßt sich kaum anders erklären als dadurch, daß der Châl vor Alters wenigstens an manchen Orten die Stellung einnahm die später der Vater hatte, und daß also sein Name gewissermaßen auf seinen Amtsnachfolger übertragen wurde. Die Beispiele, die ich habe, stammen aus Medina. Agh. IV 43, 30 nennt alAhvaç seinen väterlichen Urgroßvater ʿÂçim b. Thâbit seinen *Châl*. Boch. I 9, 28 wird darüber geschwankt, ob alBarâ in einer von ihm herrührenden Tradition den Ausdruck Agdâd oder *Achvâl* gebraucht habe für seine väterlichen Vorfahren (BHischam 381). Boch II 266, 12. 14 wird *Châlâja* erklärt = mein Vater und mein Mutterbruder; der Châl überschattet in diesem sonderbaren Dual den Vater, vielleicht hat er auch hier die allgemeinere Bedeutung von Ahn[1]).

5. Von diesen Spuren geleitet darf man die in § 8 beschriebene eigenthümliche Form der Exogamie als ursprünglich metrarchisch in Anspruch nehmen. Der Mann ist dabei der Auswärtige, heirathet entweder in den Stamm der Frau ein oder besucht sie dort nur gelegentlich. Die Frau dagegen bleibt in ihrem Stamme und gebiert die Kinder ihrem Stamme. Die Zugehörigkeit der Kinder zu der Gemeinde und zu allen Rechten ist dann vermittelt und bedingt durch das mütterliche Blut. Die Mutter ist im Besitz des Zeltes (§ 3, 2), der Vater ist nur جار oder ضيف, cliens oder hospes. Sie scheint auch dem Sohne den Namen zu geben; diese Sitte ist allerdings im Alten Testament besser bezeugt als bei den Arabern[2]).

1) Vergleichbar ist das Verhältnis von avus und avunculus. Was خال eigentlich bedeutet, läßt sich nicht ausmachen; sicher nicht »die Erscheinung«, wie Wetzstein unglaublicher Weise glaubt (a. O. p. 245). Dann noch eher der Procurator, wie in خائل مال. Zu den ursemitischen Verwandtschaftsworten gehört der Name nicht.

2) Es gehört bekanntlich zu den Unterscheidungszeichen zwischen dem Jahvisten und dem priesterlichen Erzähler, daß bei jenem die Mutter, bei diesem den Vater nennt. Im Uebrigen wird nicht immer Gewicht auf die Namengebung gelegt; sie geschieht oft nach irgend einem zufälligen Gegenstand oder

6. Es ergiebt sich, daß die Patrarchie nicht immer die Herrschaft in Arabien besessen hat; es sind Anzeichen davon vorhanden, daß sie mit dem anderen System eine Weile in Streit gelegen hat, und auch davon, daß sie nicht ohne Compromisse und Abfärbungen zum Siege gelangt ist[1]). Daß sie das jüngere und die Metrarchie das ältere System sei, läßt sich wohl aus allgemeinen Gründen vermuthen, aber nicht mit bestimmten Beweisen darthun. Man wird öfters bald nach dieser bald nach jener Seite gezogen. So z. B. sagt man ثكل und هبل (der Kinder beraubt werden) ursprünglich nur von der Mutter, und man könnte daraus schließen, daß die Kinder eben nur ihr angehört hätten. Aber umgekehrt ist يتيم (Waise) nur das Kind, das den Vater verloren hat, wie es denn ja auch einen sehr alten Namen für die Witwe gibt. Man gebraucht ويلمّ „weh der Mutter" als einfachen Ausdruck des Erstaunens, als ob man ursprünglich immer nur an den Eindruck dächte, den Alles auf die Mutter macht; aber im Schwur heißt es stets „bei deinem Vater", nie „bei deiner Mutter[2])." Athtar ist eine uralte weibliche Gottheit, aber El eine ebenso alte männliche; das Geschlecht schwankt bei Athtar und bei Schams. Den vorhin aufgeführten meist spezifisch arabischen Verwandtschaftwörtern, die von der Mutter hergeleitet sind, lassen sich זרע und auch فخذ מחד als von der männlichen Generation hergeleitete Analoga zur Seite setzen[3]). Und solche Antinomien kann man wahrscheinlich noch in größerer Zahl vorbringen. Festzuhalten ist jedenfalls das, daß auch die Patrarchie bei den Arabern und bei den Semiten überhaupt in die Urzeit zurückgeht. Das folgt, um von اب *Vater* zu schweigen, ganz besonders aus den Urwörtern حم und حماة *Schwiegereltern der Frau*, كنّة *Schwiegertochter;* auch aus بعل *Gatte*, ضرّة *die Mitfrau*, مهر *das Brautgeld;* ferner aus ارملة und يتيم *Witwe und Waise.*

Umstand, der bei der Geburt auffällt. Ueber die Araber s. WRSmith p. 102 108: in the 'Iqd III 272 there is a narrative, where to a suitor proposing for a girl's hand the father says: yes, if I may give names to all her sons and give all her daughters in marriage.

1) Die Endogamie, d. h. die Zugehörigkeit der Frau zum Stamme, ist unnatürlich in der Baalsehe, wo sie den Frauenkauf innerhalb des Stammes und also eine weitgehende Entwicklung des Privateigenthums bedeutet.

2) »Bei deiner Mutter« wäre vielmehr eine starke Beleidigung. Den Vater erwähnt man zum Guten, die Mutter zum Schlechten.

3) Nöldeke, Monatsschr. p. 302. Aber schwerlich שקא דמלכא (WRSmith p. 34), denn das ist einfach ثقلاء, und שקא bedeutet den Stamm im Gegensatz zu den Seitenzweigen.

Und noch einen andern Beweis gibt es dafür, mit dem ich diese Erörterung schließen will, nemlich den merkwürdigen Bedeutungswechsel, den das Wort عمّ durchgemacht hat. Es heißt im Arabischen gewöhnlich *patruus* oder im Plural *patrueles;* und diese Bedeutung findet sich nicht bloß im Arabischen, sondern auch im Syrischen, im Sabäischen und vielleicht im Hebräischen. Im Sabäischen läßt sich in Reihen wie עמכרב חלכרב אחכרב אבכרב עמידע חלידע אבידע das עם neben חל אח אב nur als specifischer Verwandtschaftsname auffassen [1]). Aehnliche Reihen gibt es auch im Hebräischen, z. B. אבינדב עמינדב אחינדב und אביהוד (abgekürzt *Ehud*) עמיהוד אחיהוד; dazu kommt die Etymologie von Ammon Gen 19,38, und im Priestercodex der Ausdruck עמיו, der dort so gebraucht wird wie sonst אבותיו [2]). Allein die ursprüngliche Bedeutung von عمّ ist *Volk* (= Verwandtschaft); diese Bedeutung ist im Hebräischen und Aramäischen die gewöhnliche, und sie hat sich auch im Arabischen erhalten [3]). Nöldeke zweifelt zwar daran, ob عمّ *patruus* und عمّ *populus* gradezu identisch seien. Aber das Abstractum pro concreto (wie bei صهر) macht keine Schwierigkeiten, ein ähnlicher Uebergang findet bei hebr. עמית und עמיו statt. Jeder Zweifel schwindet dadurch, daß auch in ابن عمّ beide Bedeutungen zusammentreffen. Der Plural بنو عمّ entspricht ganz dem hebr. בני עם, عمّ bezeichnet hier *das Volk* und steht immer im Singular; der Scholiast erklärt zu Urva 31, 2 die Lesart عمّ mit بنو عمّ, um zu sagen, daß es *Volk* heißen solle. Im Singular bedeutet ابن عمّ öfter den leiblichen Vetter von Vatersseite, aber durchaus nicht ausschließlich, z. B. nicht bei der Heirath des ابن عمّ mit der بنت عمّ [4]).

1) Prätorius, Neue Beiträge p. 25.

2) Gesenius Thesaurus p. 1042. In Gen. 19, 38 sagt die Tochter Lots, um ihren Sohn Ammon als im Incest mit ihrem Vater erzeugt zu bezeichnen: er ist בן עמי — geradeso wie die Araber عمّ für Vaterblut und خال für Mutterblut gebrauchen. Die Araber würden zu Ammon sagen: عمّك خالك d. h. du bist im Incest geboren, hast nur einen Großvater.

3) Zu den von Nöldeke (DMZ 1886 p. 173) angeführten Beispielen läßt sich noch eins aus dem Lisân hinzufügen (XV 322); auch das Adjectivum عمّى (Ham. 676 v. 4 sq.) geht von der Urbedeutung aus.

4) Auch die Mutter nennt ihren Sohn ابن عمّى, wenn sie aus dem selben

Also vereinigt das Arabische — und nicht nur das Arabische — die Bedeutungen *Volk* und *Verwandte von Vatersseite* in einem Worte [1]). Wann und wo dieser Sprachgebrauch entstanden ist, da muß die *väterliche* Verwandtschaft die politische gewesen sein. Somit ist auch عمّ ein Gegengewicht gegen die von der Mutter hergenommenen Namen für Verwandtschaftsgefühl und Volksverband, die darauf hinführen, daß die maßgebende Verwandtschaft irgendwo und irgendwann nach Mütterseite gerechnet worden ist.

Stamme ist (Tab. III 947, 2. 4). Vgl. den früher einmal citirten Satz Doughtys: all the souls of a tribe are accounted عيال عمّ.

1) Ein ähnlicher Uebergang, aber nur im Arabischen, findet sich bei قتل = Kampfgenossen, dann Schwertmagen; auch bei عصبة = Bande, dann Agnaten.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1893.

(Fortsetzung.)

(Holland).
La Société Hollandaise des Sciences:
Oeuvres complètes de Christiaan Huygenb. Vol. V. Correspondance 1664—1665. La Haye 1893.
Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschoole:
Onderzoekingen. Vierde Reeks. II. 2. Utrecht 1893.
La Société Mathématique d'Amsterdam:
Revue semestrelle des Publications Mathématiques. Tome I. Prem. Partie. Amsterdam 1893.
Koninklijk Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië:
Bigdragen toot de Taal-, Land- en Volkenkunde. 5. Volgh. 8. Deel. 2. Afl. 'S Gravenhage 1893.
(Schweden u. Norwegen).
Fysiografiska Sällskapet i Lund:
Acta Universitatis Lundensis. Handlingar. Tom. XXVIII. 1891—92. Lund 1891—92.
Christiania Videnskabs-Selskab:
a. Forhandlinger for 1891. N. 1—11.
b. Oversigt i 1891. Christiania 1891—92.
(Dänemark).
L'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark:
a. Mémoires. 5me série Classe des Lettres. T. V. No. 4.
b. Mémoires. 6me série Classe des Sciences. T. VI. No. 3. T. VII. No. 6.
c. Oversigt i Aaret 1892. N. 2. Kjobenhavn 1892.

(England).
The Royal Society:
Proceedings. Vol. LII. N. 319, 320. London 1893.
The Royal Astronomical Society:
Monthly Notices. Vol. LIII. N. 4. 5. London 1893.
The Royal Microscopical Society:
Journal. 1893. Part II. (2 Ex.). London 1893.
The London Mathematical Society:
Proceedings. Nos. 450—454. London 1893.
The Zoological Society of London:
a. Transactions. Vol. XIII. Part 5.
b. Proceedings. 1892. Part IV. April 1st 1893. London.
The Royal Irish Academy:
Transactions. Vol. XXX. Part 1. 2. 1892. Dublin 1892.
The Royal Society of New South Wales:
Journal and Proceedings. Vol. XXVI. 1892. Sidney.
The Geological Survey of India:
Records. Vol. XXVI. Part 1. 1893. Calcutta 1893.
The Geological Survey of Canada:
Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. 1. Part IV. Ottawa 1892.
The Manchester Literary and Philosophical Society:
Memoirs and Proceedings. Vol. VI. Fourth Series. Manchester 1892.
Nature. Vol. 47. N. 1218—1226. London 1893.
(Frankreich).
La Société Mathématique de France:
a. Bulletin. Tome XX. N. 8 et dernier et titré. Tome XXI. N. 1—3.
b. Extrait du Bulletin: Application de la Géométrographie a l'examen de diverses solutions d'un même problème par M. Em. Lemoine. Paris 1892—93.
Association française pour l'Avancement des Sciences. Congres de Pean. 1892. (Résultat et théorèmes divers concernant la Géométrie du Triangle etc. La Géométrographie ou l'art des constructions géométriques. Par Emile Lemoire). Paris 1892.
Nouvelles Annales de Mathématiques:
Extrait. (Application d'une méthode d'evaluation de la simplicité des constructions a la comparaison etc. Par E. Lemoire). 3. Série. T. XI. Novembre 1892. Paris 1892.
(Griechenland).
ΑΘΗΝΑ. Band 4. Heft 4. Band 5. Heft 1.
(Belgien).
Academie Royale de Belgique:
Bulletin. 63e année. 3e série. tome 25. N. 2. 3. Bruxelles 1893.
Société Geologique de Belgique:
Annales. Tome XVIII. 3. Livr. Tome XIX. 4. Livr. Liège 1891—92.
(Portugal).
Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. XI. N. 3. Coimbra 1893.
(Russland).
L'Academie Imp. des sciences de St. Petersbourg:
a. Mémoires. VII. Série. Tome XL. N. 2 et dernier. Tome XLI. N. 1. St. Petersbourg.
b. Bulletin. Nouvelle série III (XXXV) feuilles 24—‡ 33.
Materialien zur Mineralogie Russlands. 11. Band, Bogen 7—12 von N. von Kokscharow. St. Petersburg.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 11:

J. Wellhausen, Die Ehe bei den Arabern. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

26. Juli. № 12. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 10. Juni.

Ehlers legt eine Mittheilung vor: „Zur Morphologie der Bryozoen".

Riecke legt eine Arbeit des Herrn Prof. Nernst vor: „Dielectricitätsconstante und chemisches Gleichgewicht".

Meyer legt eine Mittheilung vor: „G. F. Grotefends erste Arbeiten über Entdeckung der Keilschrift".

Der Sekretär legt die an ihn eingesandten Arbeiten vor:

des Herrn Prof. Dr. Holtz in Greifswald (Korresp. der Mathem. Klasse): „Ueber den unmittelbaren Grössenabdruck bei künstlich erzeugten Augentäuschungen".

des Herrn Prof. Dr. Röntgen in Würzburg: „Ueber den Einfluss des Druckes auf das galvanische Leitungsvermögen von Electrolyten".

Zur Morphologie der Bryozoen.

Von

E. Ehlers.

In dem jüngst erschienenen Heft der Archives de Zoologie expérimentale et générale[1]) hat Herr H. Prouho Ergebnisse von Untersuchungen an Bryozoen mitgetheilt, welche unsere Kennt-

1) Henri Prouho, Contribution à l'histoire des Bryozoaires. H. de Lacaze-Duthiers, Archives de Zoologie expérim. et générale. Ser. II, T. 10, pg. 557.

nisse von diesen Thieren in sehr dankenswerter Weise erweitern.

Besonders werthvoll erschienen mir in dem Aufsatze des Herrn Prouho die Angaben, welche er über Vorkehrungen und Einrichtungen macht, durch die das Innere der Leibeshöhle dieser Thiere mit der Außenwelt in Verbindung tritt, Organe die unter den ungleichen Bezeichnungen eines Intertentacularorganes, eines Geschlechtsganges oder einer Geschlechtsöffnung, und eines Nephridiums aufgeführt werden und unter den ungleich gelagerten und gestalteten Einrichtungen einer einfachen Oeffnung oder eines höher entwickelten Ausführungsapparates sich darstellen.

Die hierauf sich beziehenden Mittheilungen des Herrn Prouho veranlassen mich zu einer kurzen Bemerkung, in der ich auf Beziehungen hinweisen möchte, auf welche er nicht eingegangen ist, und die allerdings mit einzelnen Auffassungen dieser Organe, wie sie in dem Aufsatze enthalten sind, nicht in Uebereinstimmung zu bringen sind. Ich halte es für überflüssig, diese Ungleichheiten der Auffassung besonders hervorzuheben, da sie klar zu Tage treten. Aber ich hebe besonders hervor, daß ich zu meinen Aufstellungen komme, indem ich auf den werthvollen Ergebnissen der Untersuchungen des Herrn Prouho fuße, und ich thue das in der Ueberzeugung, daß seine Angaben über den Thatbestand der uns beschäftigenden Bildungen, wie sie in Wort und Bild dargestellt sind, auf richtigen und einwurfsfreien Beobachtungen beruhen, ohne diese selbst wiederholt zu haben.

In diesem Versuche gehe ich von der Voraussetzung aus, daß die Gruppen der Pedicelliniden und der Bryozoen einem Stamme angehören, und an diesem zu sondern sind, wie ich das mit der Bezeichnung der Brachyscolecida cirrata und tentaculata früher ausgedrückt habe [1]). Dabei befinde ich mich, was die Zusammengehörigkeit beider Gruppen betrifft, im Einverständnis mit Prouho, im Gegensatz zu einer anderen von Hatschek [2]) vorgetragenen Auffassung.

Sind danach die Organisationsverhältnisse beider Gruppen bei allen bestehenden Unterschieden soweit übereinstimmend, daß die einzelnen Organsysteme auf einander bezogen werden können, so wird die Annahme auf keinen Widerspruch stoßen, daß der Nervenknoten der Pedicelliniden dem der Bryozoen gleichzustellen sei,

1) E. Ehlers, Zur Kenntnis der Pedicellineen. Göttingen 1890. 4°. pg. 164 (Abhandlg. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Bd. 36. Göttingen 1890).

2) B. Hatschek, Lehrbuch der Zoologie. Jena 1888, pg. 40.

und daß di[illegible] in den einzelnen Unterabtheilungen der Bryozoen als homolog angesehen werden dürfe.

Läßt man das zu, so giebt seine Lage zu den Nachbarorganen ein Hülfsmittel an die Hand, diese in verschiedenen Thieren in nähere Verbindung mit einander zu setzen, und das wird wichtig zunächst für die Oeffnungen, durch welche, abgesehen von der Bildung dazu gehörender Organe, Geschlechtsproducte oder Auswurfstoffe aus dem Körper entleert werden.

Diese Oeffnungen liegen stets in der Medianebene des Körpers, welche der Symmetrieebene entspricht, die man durch Mund und After legen kann, fallen auf eine Linie oder deren Projection, welche Mund und After verbindet. Von der gleichen Ebene wird der zwischen Mund und After liegende Nervenknoten symmetrisch geschnitten. Die in Rede stehenden Oeffnungen liegen nun zwischen Mund und Nervenknoten einerseits, zwischen After und Nervenknoten andererseits; nach dieser Lage können sie als adoral und adanal unterschieden und bezeichnet werden, besser als mit der Bezeichnung vorn und hinten.

Bei den Pedicelliniden finden sich beide Oeffnungen, die adorale, welche einem Excretionsapparat angehört, und die adanale, durch welche die Entleerung der Geschlechtsproducte erfolgt. Keine Bryozoe dagegen, deren Bau bis jetzt genügend bekannt geworden ist, besitzt diese beiden Oeffnungen zugleich. Unter einander aber weichen die Bryozoen in der Hinsicht von einander ab, daß die einzige der von den beiden hier vorhandenen Oeffnungen in der einen Gruppe adoral, in der anderen dagegen adanal liegt. Die Phylactolaemen, Membranipora von den Chilostomen und Alcyonidium von den Ctenostomen haben die adorale Oeffnung, während die Stolonifere Hypophorella die adanale Oeffnung besitzt.

Ungleich verhalten sich die Einrichtungen, die mit diesen Oeffnungen verbunden sind. Bei den Pedicelliniden gehört die adorale Oeffnung einem Excretionsapparate an, der gegen das parenchymatöse Körperinnere blind geschlossen ist, während die adanale Oeffnung die Mündung des Geschlechtapparates ist. Bei den Phylactolaemen ist die adorale Oeffnung die gemeinsame Mündung für zwei Röhren, die mit Wimpertrichtern in die Leibeshöhle sehen und als Ausscheidungsapparate, Nieren oder Nephridien bezeichnet werden; ob sie auch die Entleerung der Geschlechtsproducte zu besorgen haben, ist zur Zeit noch nicht festgestellt. — Bei Membranipora und Alcyonidium steht die adorale Oeffnung auf der Spitze des Intertentacularorganes, innere Wimpertrichter sind von ihm nicht bekannt; das Organ dient zur Entleerung der

Geschlechtsproducte und der in der Leibeshöhle vorkommenden Auswurfstoffe, wie es die Reste der der Histolyse anheimgefallenen Organe sind. — Bei Hypophorella ist die adanale Oeffnung ein einfacher Porus, durch den die Geschlechtsproducte austreten.

Diese Darstellung entnehme ich für Hypophorella, Alcyonidium und Membranipora der verdienstvollen Untersuchung Prouhos, doch nicht ohne ein gewisses Bedenken, soweit es die beiden letzten Gattungen betrifft. Das habe ich besonders auszuführen. Prouho sagt, daß bei den Phylactolaemen nach Cori die Excretionsapparate hinter dem Nervenknoten („en arrière du ganglion nerveux") lägen, und daß der Ausführungsgang für die Geschlechtsproducte bei Gymnolaemen die gleiche Lagerung wie die Nephridien bei Cristatella habe. Vergleiche ich Prouhos Abbildung dieser Verhältnisse mit der von Cori[1]) für Cristatella gegebenen, so stimme ich dem letzten Theil der Prouhoschen Angabe völlig zu, dagegen kann ich mich der topographischen Auffassung, welche Prouho der Lage dieser Organe zu Theil werden läßt, nicht anschließen, falls nicht etwa in den Worten Prouhos „en arrière du ganglion nerveux" ein Schreib- oder Druckfehler vorliegt, oder die Richtung „nach hinten" von Prouho anders als von mir verstanden ist, der ich die Richtung von vorn nach hinten als gleichbedeutend mit der Richtung vom Mund zum After auffasse. Geben wir daher die Bezeichnung: „vorn und hinten" auf, und ersetzen sie durch adoral und adanal mit der durch die Lage des Nervenknotens gegebenen Grenzscheide, so liegen die Nephridien der Cristatella adoral, wie ich es aus Coris Schilderung aufgefaßt, und wie es mir Herr Dr. Cori als eine richtige Auffassung brieflich zu bestätigen die Güte hatte. So deute ich aber auch die Prouhosche Abbildung von der Lage des Intertentacularorgans bei Alcyonidium, und halte mich dazu um so mehr berechtigt, als nach Prouho diese Lage dem der Nephridien bei Cristatella entspricht. Die mir Zweifel erweckenden Worte „en arrière" böten dann wohl nur eine formale Schwierigkeit.

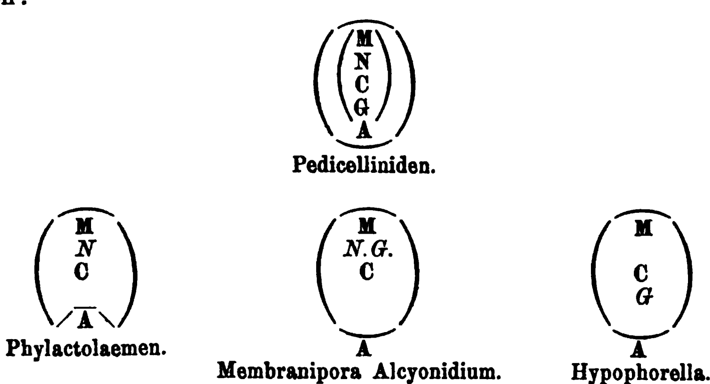
Vergleichen wir danach die Bryozoen mit den Pedicelliniden, so hat Hypophorella mit diesen den Ort für die Entleerung der Geschlechtsproducte gemein, während ihm ein adorales Excretionsorgan abgeht; dagegen besitzen die Phylactolaemen in der adoralen Oeffnung die Mündung eines Excretionsapparates, Alcyonidium und Membranipora die Mündung des Intertracularorganes,

---

1) C. J. Cori, Die Nephridien der Cristatella. Zeitschr. f. wiss. Zoolog. Bd. 55 pg. 627. Taf. XXVII Fig. 12. 13.

welche, wie an typischen Segmentalorganen der Würmer, neben der an dieser Stelle auch den Pedicelliniden, aber hier allein, gegebenen Thätigkeit der Entleerung von Auswurfstoffen den Austritt von Geschlechtsproducten gestattet.

Ein Schema dieser Verhältnisse läßt sich in folgender Weise geben:



Hierbei bedeutet für die Pedicellinen die größere geschlossene Klammer den Kranz der Cirren, die kleinen Spangen die Atrialrinne; bei den Bryozoen ist mit der geschlossenen Klammer der Tentakelkranz angedeutet. **M** bezeichnet die Lage des Mundes, **A** die des Afters, **C** die des Nervenknotens, **N** bei den Pedicelliniden die Mündung des Excretionsapparates, *N* bei den Phylactolaemen die Mündung der Nephridien, *NG* bei Membranipora und Alcyonidium die Mündung des Intertentacularorganes. **G** giebt die Mündung des Geschlechtsapparates bei den Pedicelliniden an, *G* die Geschlechtsöffnung bei Hypophorella.

An einer anderen Stelle[1]) habe ich darauf hingewiesen, daß die adanalen Ausführungsgänge der Pedicellinen und deren adoralen Excretionsapparate homodyname Organe sein möchten, beide zurückführbar auf vordere und hintere, oder adorale und adanale Segmentalorgane, wie sie bei Echiuriden vorkommen. Ferner halte ich auch jetzt noch, gegenüber den Anschauungen Hatscheks und in Uebereinstimmung mit Prouho, der meine darauf bezüglichen Angaben nicht zu kennen scheint, an der Verwandtschaft der Bryozoen und Pedicellinen fest, unter der Annahme, daß mit dem Mangel einer Leibeshöhle bei den letzteren deren eigenartige Gestaltung der Ausscheidung- und Geschlechtswerkzeuge zu verbinden sei.

---

1) Zur Kenntnis der Pedicellineen a. a. O. pg. 180.

Für Organe dieser Categorie kann die Leistung eine allein ausscheidende oder ausführende sein, oder beide Thätigkeiten können in ihnen vereinigt werden; die Apparate können ausschließlich als excretorische Nephridien oder als ausleitende Geschlechtswege auftreten, oder sie leiten zugleich Auswurfstoffe wie Geschlechtsproducte nach außen.

Für die morphologische Beurtheilung darf daher die ungleiche Function dieser Organe zunächst außer Betracht bleiben; in ihrer Bedeutung für systematische Verwandtschaft ist es von geringem Werth, welche dieser Functionen von den Organen geleistet wird. Die Annahme einer functionell einseitigen Entwicklung und Ausbildung dieser Organe wird die Verschiedenheit ihrer Leistung bei sonst verwandten Thieren verstehen lassen, wo nicht zwingende Gründe vorliegen, die ungleiche Ausgestaltung auf einen Functionswechsel zurückzuführen.

Läßt man danach, die Stammverwandtschaft der Bryozoen und Pedicellinen zugegeben, eine allgemeine Homologie zwischen den in Rede stehenden adoralen und adanalen Organen dieser Thiere zu, so ist diese dann als eine incomplete zu bezeichnen, insofern diese Organe als Röhren mit Wimpertrichtern, Ausführungsgängen des Geschlechtapparates auftreten oder auf Ausführöffnungen beschränkt sind; dabei bleibt die Frage, ob dieser letzte Zustand als das Ergebnis einer Rückbildung aufzufassen ist, zunächst unberührt.

Dann aber stellen sich nach den Mittheilungen Prouhos besondere Beziehungen zwischen den Pedicelliniden und den stoloniferen Bryozoen heraus, welche den übrigen Bryozoen abgehen. Denn bei der Hypophorella, die hier als Vertreter der Stoloniferen erscheint, ist die adanale Oeffnung die Pforte zur Entleerung der Geschlechtsproducte, und diese werden damit an derselben Stelle nach außen geschafft, wo das durch die Ausführungsgänge des Geschlechtapparates der Pedicelliniden erfolgt, während die übrigen Bryozoen, so weit sie bis jetzt in dieser Hinsicht bekannt sind, den Entleerungsort für Eier und Samen in adoraler Lagerung besitzen. Es ist somit ein bis jetzt unbekanntes Verhältnis der Stoloniferen zu den Pedicellinen durch die Untersuchungen des Herrn Prouho aufgedeckt, wenn das bei Hypophorella von ihm Beobachtete auf die übrigen Stoloniferen übertragen werden darf. Damit erhält aber jene Beziehung der Stoloniferen zu den Pedicellinen, auf welche ich früher hingewiesen habe[1]), eine größere

1) E. Ehlers, *Hypophorella expansa*, Göttingen 1876, pg. 134 (Abhandl. d. kgl. Ges. zu Göttingen, Bd. 21, 1876, 4°).

Bedeutung als ihr bislang zuzuschreiben war; ich meine das beiden Gruppen Gemeinsame der Stolonenbildung, in welcher darmlose Glieder als Schaltstücke regelmäßig zwischen den vollausgebildeten Personen des Stockes eingeschoben sind. So lange dies Verhältnis allein bekannt war, konnte es als eine Parallelentwicklung in neben einander verlaufenden Entwicklungsreihen aufgefaßt werden, tritt nun aber zu diesem gemeinsamen Kennzeichen die Uebereinstimmung in der Lage der Mündung des Geschlechtapparates, so liefert das einen wesentlichen Beitrag für die Wahrscheinlichkeit der Ansicht, daß die Stoloniferen mit den Pedicellinen näher verwandt sind als die übrigen Bryozoen.

Die Gruppe der stoloniferen Bryozoen enthält einen großen Theil jener Bryozoen, die als Ctenostomata gekennzeichnet und vereinigt wurden; und auch jetzt noch wird diese Gruppe als eine einheitliche von einigen Systematikern festgehalten. Auch für die Beantwortung der sich in dieser Hinsicht erhebenden Fragen bietet die Prouhosche Untersuchung interessante, aber nach dieser Richtung nicht verwerthete Mittheilungen. Die Gattung Alcyonidium gehört zu den Ctenostomen; in der eigenthümlichen compacten Stockbildung, die bei den meisten Arten in der Regel auftritt und die auf der Histolysirung und Knospenbildung der altwerdenden Personen des Stockes beruht, ist aber nichts vorhanden, was dem Auftreten von Schaltgliedern, die von vornherein darmlos sind und die Stolonen bilden, entspricht. Nun beschreibt Prouho die Stockbildung des Alcyonidium albidum (Alder) in der Weise, daß in dem flächenhaft auf Muschelschalen sich ausbreitenden Stocke complete und incomplete Bryozoiten nach seiner Ausdrucksweise vorhanden sind. Die incompleten Bryozoiten sind darmlose Stockglieder, und sie erinnern damit sehr an die Schaltglieder im Stocke der Stoloniferen und Pedicelliniden. Danach wäre an eine nähere Verwandtschaft zwischen dem ctenostomen Alcyonidium und den ctenostomen Stoloniferen zu denken. Es kommt aber dagegen ein bedeutungsvoller Unterschied in Betracht. Alcyonidium albidum besitzt ein Intertentacularorgan, durch welches die Geschlechtsproducte entleert werden, und dessen Mündung liegt wie bei Membranipora und den Phylactolaemen adoral; somit weicht diese ctenostome Form von den Stoloniferen mit der adanalen Geschlechtsöffnung ab. Werden nicht Thatsachen beigebracht, die einer Verallgemeinerung dieses Verhältnisses auf verwandte Gruppen widersprechen, so wird dieser Unterschied in dem Bau des Alcyonidium und der Hypophorella gegen eine nähere Verwandtschaft beider, und gegen ihre unmittelbare Vereinigung

im Kreise der Ctenostomen sprechen. Die Stoloniferen werden nach ihrer Stockbildung und der adanalen Geschlechtsöffnung an die Pedicelliniden anzuschließen sein. Wenn nun auch Alcyonidium mit der allerdings nicht regelmäßigen Ausbildung von darmlosen Gliedern im Stock an Stolonenbildung wie bei den Pedicellinen und Stoloniferen erinnert, so weicht diese Form von den Stoloniferen durch das adoral stehende Intertentacularorgan, das als Ausführapparat für die Geschlechtsproducte functionirt, in so erheblicher Weise ab, daß beide nicht wohl als nächst verwandte Formen systematisch zu vereinigen sind. Sieht man aber, wie ich es gethan habe, in dem Kragen der Ctenostomen eine Bildung, welche mit dem Cirrenkranz der Pedicellinen in Zusammenhang zu bringen oder von ihm abzuleiten ist, so wäre damit auf eine Verbindung von Alcyonidium mit Pedicellinen hingewiesen; man würde dann auf die Vorstellung kommen, daß diese Form von pedicellinenartigen Vorläufern ausgegangen sei, die mit der Ausbildung des adoralen Excretionsapparates schon eine andere Entwicklung als die zu den Stoloniferen, insbesondere zu Hypophorella führende eingeschlagen hätten.

Ich brauche hier nicht auszuführen, wie solche Speculationen zu einer Ableitung der phylactolaemen und gymnolaemen Bryozoen für jede Gruppe in besonderer Weise, ausgesponnen werden können, um so mehr als in den Stöcken von Chilostomen und Cyclostomen sich die als Internodien bezeichneten Strecken finden, welche an Stolonenglieder erinnern. Früher schon [1]) habe ich die naheliegenden Betrachtungen über solche Verwandtschaftsverhältnisse vorgebracht; jetzt müssen neue Thatsachen zur Stütze oder Widerlegung solcher Anschauungen beigebracht werden; meines Erachtens wird dabei zunächst die vorschreitende Kenntnis von dem anatomischen Bau dieser Thiere von größerer Bedeutung als die der Entwicklungsgeschichte sein, bei welcher augenscheinlich histolytische und andere Vorgänge die Leichtigkeit eines Verständnisses beeinträchtigen.

---

1) Zur Kenntnis der Pedicellinen a. a. O. pg. 155.

Göttingen, 2. Juni 1893.

Dielektricitätskonstante und chemisches Gleichgewicht.

Von

W. Nernst.

Die elektrische Energie eines Systems geladener Konduktoren beträgt bekanntlich

$$\frac{1}{2}\Sigma e V,$$

wenn e und V Elektricitätsmengen und Potential der einzelnen Konduktoren bedeuten; wird das System in ein dielektrisches Medium eingetaucht, so sinkt die Energie auf

$$\frac{1}{2D}\Sigma e V,$$

worin D die Dielektricitätskonstante ($D.E.$) des Mediums bedeutet. Wird das System ohne sonstige Veränderung an der gegenseitigen Entfernung und elektrischen Ladung der einzelnen Konduktoren aus einem Medium mit der $D.E. D_1$ in ein solches mit der $D.E. D_2$ übergeführt, so ist damit ein Verlust an Arbeitsfähigkeit (freier Energie) von

$$\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)\frac{1}{2}\Sigma e V$$

verbunden. Ein an der Grenze zweier dielektrischen Medien befindlicher elektrisch geladener Punkt erfährt also eine Kraftwirkung, die ihn in dasjenige mit der größeren $D.E.$ hineinzuziehn trachtet.

Diese Sätze erscheinen anwendbar auf die Vertheilung eines Elektrolyten zwischen zwei Lösungsmitteln oder zwischen Lösungsmittel und Dampfraum; die Ionen als elektrisch geladene Punkte erfahren hiernach eine Anziehung seitens des Mediums, das die größere $D.E.$ besitzt, und in dieser Anziehung haben wir ein Moment zu erblicken, das stets dahin wirkt, die Verteilung der Ionen zu Gunsten des Mediums mit der größeren $D.E.$ zu verschieben.

Von allen Medien, die wir kennen, hat Wasser nach den Untersuchungen von Cohn und Arons die größte $D.E$ (80); thatsächlich konnte ich zeigen[1]), daß der Verteilungskoefficient der

1) Gött. Nachr. vom 15. Oct. 1890; Zeitschr. physik. Chem. 8 110 (1891).

Ionen zwischen Wasser und jedem beliebigen andern Medium eine exceptionelle Größe nach der Richtung hin besitzt, daß die freien Ionen fast vollständig in das Wasser hineingehen. Auf Grund der Gesetze, die ich über das Phänomen der auswählenden Löslichkeit entwickelte, wies ich darauf hin, daß die hervorragende Fähigkeit des Wassers, gelöste Stoffe elektrolytisch zu spalten, sich darauf zurückführen läßt, daß die Löslichkeit der Ionen in Wasser sehr groß ist im Vergleich zu der in andern Lösungsmitteln. Es scheint also, als ob hierbei die große *D.E.* des Wassers eine wesentliche Rolle spielt.

Die Gleichungen, zu denen obige Anschauungen hinführen, sind leicht zu entwickeln. Wir betrachten einen binären Elektrolyt, der sich zwischen zwei Lösungsmitteln verteilt; wenn die Lösungsmittel mischbar sind, so denken wir uns eine Wand eingeschaltet, die nur den Molekülen des Elektrolyten, nicht aber denen der beiden Lösungsmittel den Durchgang gestattet. Im Gleichgewicht betrage im Lösungsmittel I die Konzentration der elektrisch neutralen Moleküle C_0, die der Jonen C; im Lösungsmittel II seien die entsprechenden Größen bez. c_0 und c. Natürlich kann die Rolle eines Lösungsmittels auch vom Dampfraum gespielt werden.

Die Gleichung der Dissociationsisotherme liefert

$$(1) \qquad K_1 C_0 = C^2 \text{ und } K_2 c_0 = c^2$$

wenn K_1 und K_2 die Dissociationskonstanten in beiden Medien bedeuten. Der Verteilungssatz liefert

$$(2) \qquad C_0 = k_0 c_0,$$

wenn k_0 den Verteilungskoefficienten der elektrisch neutralen Moleküle bedeutet. Schließlich muß die äußere Arbeit, die geleistet wird, wenn wir aus I nach II eine Quantität elektrisch neutraler Moleküle hinein- und die äquivalente Quantität freier Jonen von II nach I zurückbefördern, gleich null sein und da der erste Teil dieser Arbeit, Gleichgewicht vorausgesetzt, verschwindet, so muß auch der zweite gleich null sein.

Die Teilungskoefficienten der beiden Ionen seien k_1 und k_2; dieselben sind vollkommen analog der Größe k_0 und kommen jedem Ion wie jeder elektrisch neutralen Molekülgattung zu; sie bedingen bei dem erwähnten Transport den Arbeitsbetrag

$$R\,T \ln \frac{C}{k_1 c} \text{ bez. } R\,T \ln \frac{C}{k_2 c}.$$

Es superponieren sich darüber elektrische Kräfte und zwar

einerseits diejenigen, die durch eine Verschiedenheit der dielektrischen Wirkung beider Medien bedingt werden, und zweitens solche, die einer Potentialdifferenz E zwischen beiden Medien ihre Entstehung verdanken; erstere liefern den Arbeitsbetrag, wie oben erörtert,

$$\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) \tfrac{1}{2} \Sigma e V = \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) \frac{V_1}{2} \text{ bez. } \frac{V_2}{2}$$

indem wir mit V_1 bez. V_2 das Potential der elektrochemisch gemessenen Elektricitätsmenge 1 auf den positiven bez. negativen Ionen bezeichnen; letzteren entspricht die Arbeit $+E$ bez. $-E$, wenn E die Potentialdifferenz zwischen den beiden Phasen des betrachteten Systems bedeutet. In Summe wird also der Arbeitsbetrag

$$R\,T ln \frac{C}{k_1 c} + \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) \frac{V_1}{2} + E$$

für die positiven und

$$R\,T ln \frac{C}{k_2 c} + \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) \frac{V_2}{2} - E$$

für die negativen Ionen. Da die Summe verschwinden muß, so wird

$$R\,T\left(2 ln \frac{C}{c} - ln\, k_1 k_2\right) + \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) \frac{V_1 + V_2}{2} = 0.$$

Numerische Prüfungen dieser Gleichung sind zunächst nicht möglich, weil k_1, k_2, V_1 und V_2 uns unbekannt sind; wohl aber läßt sich das qualitative Resultat entnehmen, daß unter sonst gleichen Verhältnissen C im Vergleich zu c wachsen wird, je größer D_1 im Vergleich zu D_2 wird. Je größer die Dielektricitätskonstante eines Mediums ist, um so größer wird unter sonst gleichen Umständen die elektrische Dissociation gelöster Stoffe.

Zu diesem Resultat gelangt man auch durch folgende Betrachtung, die in mancher Hinsicht vielleicht anschaulicher ist. Außer den gegenseitigen elektrostatischen Anziehungen zwischen positiven und negativen Ionen, die allein für sich wirkend den Zusammentritt zum elektrisch neutralen Molekül bewirken würden, müssen Kräfte auftreten, welche auf Trennung hinarbeiten; über die Natur der letzteren wissen wir noch nichts Sicheres, möglicherweise aber sind sie wenigstens zum Teil elektrodynamischen Ursprungs und

erzeugt durch die Bewegungen, welche die Ionen im Sinne der kinetischen Theorie vollführen[1]). Die Konkurrenz zwischen diesen beiden Arten von Kräften bedingt das Dissociationsgleichgewicht; erstere sind mit der Temperatur wohl sicher unveränderlich, letztere hingegen nicht. Vergrößerung der *D.E.* des Mediums schwächt nur die elektrostatischen Kräfte und bedingt demgemäß eine Zunahme des Dissociationsgrades.

Ueber die elektrolytische Dissociation in verschiedenen Lösungsmitteln liegt bisher leider nur wenig Material vor; doch deutet folgende Reihe wohl auf eine Beziehung zwischen *D.E.* und Dissociation hin.

Medium.	*D.E.*	Elektrolytische Dissociation.
Gasraum	1,0	Nicht nachweisbar bei gewöhnlichen Temperaturen.
Benzol	2,3	Aeußerst geringes, aber sicher vorhandenes Leitungsvermögen gelöster Stoffe weist auf spurenweise Dissociation hin.
Aethylalkohol	25	Deutlich vorhanden.
Wasser	80	Sehr stark.

Von Kablukoff[2]) wurde gefunden, daß Chlorwasserstoff in Benzol, Xylol und Hexan (*D.E.* = 2,2—2,4) sehr schwach, in Aether (*D.E.* = 4,4) merklich stärker, und sehr viel besser der Reihe nach in Isobutylalkohol (*D.E.* = 19) Aethylalkohol (*D.E.* = 27) und Methylalkohol (*D.E.* = 35) leitet[3]); es findet also ein sehr auffälliger Parallelismus zwischen Leitungsvermögen und *D.E.* statt und zwar in dem erwarteten Sinne.

Wie ferner Wakemann[4]) konstatierte, geht durch Zusatz von Alkohol zu Wasser die Dissociation gelöster Säuren stets zurück; derselbe Umstand verkleinert natürlich die *D.E.* Mit der Temperatur nimmt die *D.E.* des Wassers ab und zwar beträgt

1) Im Sinne dieser Anschauung würde Diamagnetismus des Mediums schwächend auf diese Kräfte einwirken; doch dürfte der Diamagnetismus der gewöhnlichen Lösungsmittel zu wenig von einander verschieden sein, als daß er bestimmenden Einfluß gewinnen könnte.

2) Zeitschr. physik. Chemie. 4 429 (1889).

3) Die Zahlen für die Dielektricitätskonstanten sind großentheils den neueren Messungen von Landolt und Jahn (Zeitschr. physik. Chem. 10 289 1892) entnommen.

4) Zeitschr. physik. Chem. 11 49 (1893).

sie[1]) bei 4° 82, bei 10° 80, bei 31° 74; hierin liegt also ein Moment, das zurückdrängend auf die Dissociation einwirkt; thatsächlich ist ein Zurückgehen der elektrischen Dissociation mit wachsender Temperatur häufig zu konstatieren[2]).

Bekanntlich zeigen einzelne Stoffe, wie z. B. organische Säuren, eine stufenweise Dissociation, indem sie zunächst aus Doppelmolekülen in die einzelnen Moleküle und hierauf in die Jonen sich spalten. Wir können wohl mit einiger Sicherheit annehmen, daß letztere Dissociation um so leichter vor sich geht, je weiter die erstere fortgeschritten ist, und wir werden daher umgekehrt erwarten können, daß Lösungsmittel um so stärker Doppelmoleküle zu spalten vermögen, d. h. eine um so größere dissociirende Kraft besitzen, je größer ihre *D. E.* ist. Dies bestätigt sich vollkommen; geringe dissociirende Kraft besitzen nach den Messungen von Eykman und besonders Beckmann die Kohlenwasserstoffe (*D. E.* = 2,2—2,4), Schwefelkohlenstoff (*D. E.* = 2,6) und Chloroform (*D.E.*?); eine größere Aether (*D. E.* = 4,4), die Ester (*D. E.* = 6—9) und vor allem die Alkohole (*D. E.* = 16—33) und Säuren (*D. E.*?); obenan steht auch hier das Wasser (*D. E.* = 80). Aus eigenen Erfahrungen (l. c.) kann ich hinzufügen, daß Essigsäure bei 80° in Benzol gelöst merklich stärker dissociirt ist als in Dampfform unter gleichen Bedingungen der Konzentration, entsprechend dem Umstande, daß sie im ersteren Falle in einem Medium erheblich größerer *D. E.* (2,3) sich befindet wie im letzteren (*D. E.* = 1,0).

Da die Kenntnis der Dielektricitätskonstanten in mancher Hinsicht von Wert zu werden verspricht, so habe ich mich bemüht, eine Methode auszuarbeiten, die ihre einfache und dabei hinreichend genaue Bestimmung ermöglicht. Durch einige Abänderungen der von Palaz[3]) ausgearbeiteten Methode hoffe ich dies Ziel erreicht zu haben; in der Brückenkombination ersetzte ich zwei Zweige durch zwei Kondensatoren großer Kapacität, den dritten durch einen Trog zur Aufnahme des Dielektrikums und den vierten durch einen Meßkondensator von variabler Kapacität; je zwei gegenüberliegende Punkte der Brücke wurden mit einem Induktorium und einem Telephon verbunden. Bei sehr guter Isolierung sämtlicher Kondensatoren ist das Minimum ziemlich scharf; man kann es völlig scharf erhalten, wenn man im Nebenschluß zu den

---

1) Lebedew Wied. Ann. 44 307 (1891).

2) Nernst, Zeitschr. physik. Chem. 2 623 (1888); vgl. auch Arrhenius ib. 9 339 (1892).

3) Beibl. 11 259 (1887).

beiden letztgenannten Kondensatoren große kapacitätsfreie Widerstände legt, die man passend abgleicht, indem man zunächst ungefähr auf das „Kapacitätsminimum", hierauf auf das „Widerstandsminimum" und schließlich genau auf das erstere einstellt. Beide Minima haben merklich verschiedene Klangfarbe; bei einer Veränderung der kompensirenden Widerstände hört man ein Summen, bei einer Verschiebung des Meßkondensators ein Knistern im Telephon. Es bietet keine besondere Schwierigkeiten, nach dieser Methode, deren Beschreibung alsbald an einem andern Orte erfolgen soll, auch die *D. E.* leitender Flüssigkeiten, wie Alkohol und selbst Wasser, zu bestimmen.

Wir haben also, um kurz unser Ergebnis zusammenzufassen, durch theoretische Betrachtung es wahrscheinlich gemacht, daß sowohl der Dissociation in Ionen wie auch der komplexen Moleküle in einfachere ein starkes dielektrisches Vermögen des Mediums günstig ist, und diesen Satz durch eine Reihe verschiedenartiger Erfahrungsthatsachen bestätigt gefunden. Wenn aber auch die Dielektricitätskonstanten deutlich mitbestimmend für das chemische Gleichgewicht sein dürften, so sind zweifellos doch noch andere maßgebende Faktoren vorhanden; letzteren konnten wir durch Einführung von Teilungskoefficienten gerecht werden, wobei die Ionen genau wie elektrisch neutrale Moleküle zu behandeln waren. Die Gleichungen, die man auf Grund dieser spezielleren Anschauung erhielt, sind mit den von Riecke[1]) und mir (l. c.) früher auf thermodynamischem Wege erhaltenen im Einklang.

1) Riecke, Gött. Nachr. 1890 No. 14; Zeitschr. physik. Chem. 7 97 (1891).

Ueber den unmittelbaren Größeneindruck bei künstlich erzeugten Augentäuschungen.

Von

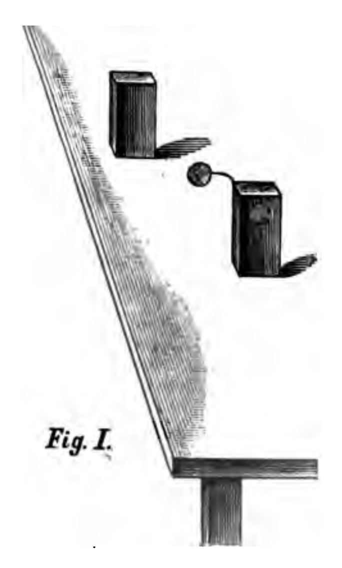
W. Holtz.

Aus früheren Versuchen hatte sich ergeben, daß, wenn wir Körper von gleichem Sehwinkel in ungleicher Entfernung erblicken, der fernere nicht proportional der Entfernung, sondern in geringerem Verhältnisse größer erscheint[1]). Genauer hatte sich hierbei herausgestellt, daß die scheinbare Vergrößerung noch von andern

1) Diese Nachrichten, 1893 S. 159.

Factoren abhängig ist, der absoluten Entfernung, der seitlichen Lage der Körper, dem binocularen oder monocularen Sehn. Für kleinere Entfernungen waren größere Werthe gefunden, größere auch bei binocularem als monocularem Sehn, größere sonst, wenn man sie weiter von einander und nicht in derselben Horizontalen oder Vertikalen sah. Um solche zu gewinnen war daher eine Lage gewählt, wo die Verbindungslinie der Mittelpunkte unter 45° Neigung erschien [1]).

Es lag nun nahe, dies Resultat noch auf andrem Wege, nämlich auf Grund künstlicher Augentäuschungen einer Probe zu unterwerfen d. h. zu versuchen, ob die scheinbare Vergrößerung dieselbe sei, wenn die ungleiche Entfernung den Augen nur vorgespiegelt wird. Ich hielt dies für leichter, als es ist, und habe mich lange mit fruchtlosen Versuchen abgemüht, weil sich diese auch auf binoculares Sehn erstrecken sollten, und weil ich andrerseits nur kleine Entfernungen benutzen wollte. Größere suchte ich nämlich um deswillen zu vermeiden, damit Jeder die Versuche um so leichter wiederholen könne; innerhalb kleiner Entfernungen sind aber Unterschiede derselben binocular so gut wahrnehmbar, daß keine Täuschung möglich ist. Ich mußte mich also auf monoculares Sehn beschränken. Hier ergab sich bald, daß eine Täuschung bei Anwendung gewisser Kunstgriffe gelingt und eine scheinbare Vergrößerung zur Folge hat, welche constant und somit bestimmbar ist. Wie weit diese mit den früher ermittelten Werthen congruirt, soll nach Beschreibung der Methode näher erörtert werden. Ich benutzte deren mehrere und beschreibe sie alle, weil jede nach gewisser Richtung anders beschaffen ist.


Fig. I.

1. Ein kleines Brett, oben mit einer Cartonscheibe beklebt, stehe aufrecht, 30 cm von der vorderen Tischkante entfernt (Fig. 1). Es mag 18 cm hoch und 8 cm breit sein, und der Durchmesser der Scheibe mag 3,5 cm betragen. Von der linken obern Ecke laufe ein feiner Draht aus mit einer gleich großen durch Wachs befestigten Scheibe an seinem Ende. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte sei 8 cm

1) In gedachter Mittheilung, S. 162, ist diese Winkelangabe weniger correct ausgedrückt.

lang und stehe schräge unter einem Winkel von etwa 45°. Links vom ersten Brett, aber 30 cm ferner sei ein zweites von gleicher Größe und Farbe aufgestellt. Man sitze so, daß die Augen oberhalb der Tischkante liegen, und das offene von beiden Scheiben ziemlich denselben Abstand hat, zugleich aber so, daß man die Scheiben an möglichst gleicher Stelle der Bretter sieht. Es scheint dann, als ob die zweite wirklich in der doppelten Entfernung säße, womit man sie größer sieht. Ist der Draht recht fein und so gefärbt, daß er ganz verschwindet, so wird die Täuschung um so besser gelingen.

2. Die Anordnung ist im Uebrigen dieselbe, nur daß die zweite Scheibe anders befestigt ist. An der Stelle, wo sie am zweiten Brett erscheinen soll, stecke ein 30 cm langes Stäbchen, das schräg aufwärts nach vorne verläuft, wo die Scheibe sitzt, so daß beide nun wieder in derselben vertikalen Ebene liegen. Solche Stäbchen findet man im Handel als hölzerne Stricknadeln; sie haben einen Kopf, der angefeilt die Scheibe leicht befestigen läßt. Man muß beide wieder an gleicher Stelle der Bretter sehn, das Stäbchen aber garnicht, wenn die Täuschung gelingen soll.

3. Statt des ersten Brettes stehe ein kleines Stativ, ein Holzfüßchen mit dünner Stange, an der oben eine Cartonscheibe sitzt, statt des zweiten ein gleiches, das aber in eine Kugel endigt, an welcher das schräge Stäbchen steckt, das vorne die zweite Scheibe trägt (Fig. 2). Die Stative mögen 14—15 cm hoch sein, damit die Scheiben ihre früheren Abstände vom Tische behalten. Man sitze so, daß man Kugel und Stäbchen garnicht sieht, die zweite Scheibe also am Ende der hinteren Stange erscheint, und so, daß die Scheibe nicht schief aufsitzt, sondern mit ihrer Mitte genau über der Stange liegt. Macht man den Versuch so, daß man über die ganze Länge des Tisches sieht, so haben beide Scheiben bei dieser Anordnung denselben Hintergrund, während bei den früheren der Hintergrund für die zweite Scheibe soviel kleiner ist, als das fernere Brett kleiner erscheint. Bei der neuen Anordnung wirkt also der Contrast nicht mit, was zur Folge hat, daß die Vergrößerung etwas schwächer ist. Auch bei den früheren fällt die Vergrößerung

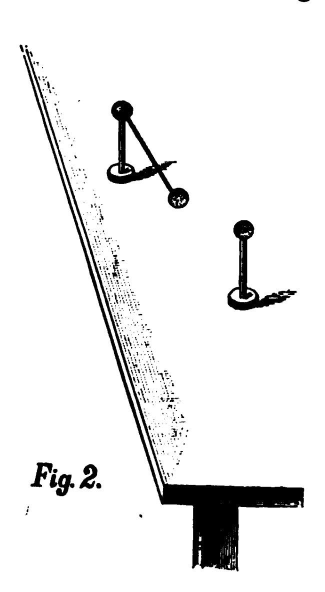


Fig. 2.

etwas schwächer aus, wenn man das hintere Brett entsprechend größer wählt.

4. Das erste Stativ mit seiner Cartonscheibe sei 60 cm von der vorderen Tischkante entfernt, rechts davon gleich weit von der letztern stehe eine Stange von halber Höhe, mit gleich großer Scheibe besetzt. Da die zweite Stange ohne Fuß ist, so muß sie, was auch leicht geht, mit Hülfe von Wachs befestigt werden. Vor dieser, aber 30 cm näher stehe ein Stativ gleich dem ersten, nur daß es keine Scheibe hat. Man sitze so, daß die Stange des letztern die mit Wachs befestigte völlig verdeckt und die rechte Scheibe genau centrisch am Ende des vordern Statives erscheint. Man wähnt sie dann doppelt so nahe, wie sie ist, und statt der Vergrößerung muß diesmal eine Verkleinerung resultiren.

5. Man stelle zwei dünne Spiegel neben einander, 30 cm von der vorderen Tischkante entfernt, den linken senkrecht, den rechten mit dem oberen Ende etwas nach hinten geneigt (Fig. 3). Sie mögen 20 cm hoch und 8 cm breit sein und in kleinen Holzklötzen stecken, welche als Füße dienen; durch ein untergeschobenes Keilchen wird sich der eine dann leicht in die geneigte Lage bringen lassen. Vor den Spiegeln, aber unmittelbar an der Tischkante, seien zwei gleich große Scheiben mittelst Wachs auf die Tischfläche gestellt, die linke senkrecht, die rechte nach Art des Spiegels ein wenig nach hinten geneigt. Man sitze wie früher, aber so, daß das Auge beide Bilder in der Mittellinie der Spiegel sieht, wobei das rechte nach gewohnter Weise ein gut Theil tiefer erscheinen muß. Legt man auf den rechten Spiegel dann noch ein Papierstück so, daß das Bild gerade oberhalb dieses Stückes erscheint, so meint man, daß es im Spiegel selbst läge, und sieht es demgemäß kleiner, weil man es für näher hält. Eine dunkle Kleidung begünstigt die Täuschung, sofern eine helle mit den Scheiben zugleich im Spiegel erscheint.


Fig. 3.

6. Man ändre letztere Anordnung nur soweit, daß man statt gewöhnlicher Spiegel unbelegte Gläser gebraucht und dicht hinter dem rechten und 30 cm hinter dem linken geschwärzte Bretter stellt. Hier sieht man auch ohne Papierstück das rechte Bild

kleiner, weil es in der schwarzen Holzfläche erscheint, wie man ja immer geneigt ist, die Bilder solcher Spiegel in die Entfernung der dahinter befindlichen Körper zu verlegen. Deshalb läßt sich auch neben einer Verkleinerung des rechten noch leicht eine Vergrößerung des linken bewirken; man braucht nur das linke Holzstück auf der Tischfläche weiter nach hinten zu schieben. Uebrigens wird bei gleicher Größe der Hölzer das linke Bild schon der Contrastwirkung halber etwas größer gesehn. Natürlich braucht man nicht nothwendig zwei Scheiben, wenn man die Spiegel nur so einstellt, daß eine in beiden erscheint.

Stets muß man seinen Körper erst feststellen, am besten durch Anlehnung an die Stuhllene, wenn die Täuschung gelingen soll, denn die geringste Verschiebung verräth, daß der Abstand der Scheiben vom Auge der gleiche ist. Liegt der Kopf fest, so fixire man jene abwechselnd, nicht bloß die eine, weil sich so nicht gut vergleichen läßt; oft erscheint dann die eine sofort größer respective kleiner, zuweilen auch erst nach längerer Zeit. Dieser Eindruck bleibt nun, und es ist hierbei characteristisch, daß das unveränderte stets schärfer begrenzt ist, als das veränderte Bild. Oeffnet man das andre Auge, so hört sofort die Täuschung auf; man sieht beide Scheiben wieder gleich groß, weil man die Gleichheit der Entfernung erkennt. Bei Wiederholungen bleibt die Größenänderung der Hauptsache nach dieselbe. Auch verschiedene Personen scheinen hierin ähnlich zu sehn.

Um die Größenänderung numerisch zu bestimmen, wandte ich eine der ersten Methoden und zwar in folgender Weise an. Ich ersetzte die rechte Scheibe successive durch eine größere solange, bis beide gleich groß erschienen. Das geschah, als die rechte 4 cm groß war, wonach die Vergrößerung $\frac{4}{2,8} = 1,4$ betrug; und dieser Werth blieb auch näherungsweise derselbe, als ich statt der Entfernungen 30 und 60 solche von 25 und 50 cm nahm. Für solche aber hatte sich nach den früheren Versuchen unter sonst gleichen Bedingungen die Zahl 1,54 ergeben, und so schien es, als ob die Vergrößerung stärker sei, wenn die ungleiche Entfernung wirklich besteht, als wenn sie nur vorgespiegelt wird. Das mochte sich nun so erklären, daß diese Vorspiegelung nur unvollkommen gelungen war, was bei kleinen Entfernungen wohl begreiflich, da wir solche auch monocular noch ziemlich gut beurtheilen können. War diese Erklärung richtig, so mußte der Unterschied mehr verschwinden, wenn man größere Entfernungen nahm.

Um hierin klar zu sehn, stellte ich eine Versuchsreihe für größere Entfernungen nach der ersten Methode an, welche hierfür

die geeignetste schien, auch mit Rücksicht darauf, daß die Winkelabstände möglichst dieselben bleiben sollten. Für Entfernungen von 1 und 2 m ergab sich nun die Zahl 1,15 statt der früheren 1,38[1]), für Entfernungen von 2 und 4 m die Zahl 1,17 statt der früheren 1,31, für Entfernungen von 4 und 8 m die Zahl 1,20 statt der früheren 1,24. Die neuen Zahlen näherten sich also wirklich mehr und mehr den früher ermittelten Werthen an. Ein ähnliches Resultat ergab sich bei Versuchen, wo dem Auge die dreifache Entfernung vorgespiegelt war.

Hieraus schließe ich nun allgemein, daß, wenn wir Körper gleichen Sehwinkels in ungleicher Entfernung wähnen, wir den ferner gedachten größer sehn, aber nicht so viel, als wenn sie wirklich in gedachter Entfernung stehn, und daß die Vergrößerung mehr und mehr gleich wird, je größer überhaupt die Entfernungen sind. Ich sage allgemein, weil ich glaube, daß dies auch für das binoculare Sehn als richtig gelten kann, soweit hier wie z. B. im Halbdunkel oder bei sehr großen Entfernungen eine ähnliche Täuschung möglich ist. Die Versuche lehren im Uebrigen, daß wir bei unvollkommner Täuschung nicht abwechselnd von der falschen zur rechten Vorstellung übergehn, sondern so sehn, als wenn die Täuschung vollkommen, der vorgespiegelte Abstandsunterschied aber kleiner sei. Sonst müßten beide Scheiben bald gleich groß, bald die eine in stärkerem Grade größer erscheinen, während in Wahrheit eine schwächere Vergrößerung resultirt und dauernd dieselbe bleibt.

Ich variirte die Versuche auch so, daß ich die Scheiben seitlich näher und mehr in gleicher Höhe erscheinen ließ. Dann sah ich sie mehr und mehr gleich groß, wie es nach den älteren Versuchen zu erwarten war. Aber auch hier blieb stets die Vergrößerung hinter dem für eine gleiche Stellung früher ermitteltem Werthe zurück und zwar mehr noch, als es oben für die relativ günstigere Stellung beschrieben ist. Das deutet darauf hin, daß bei solcher Lage die Vorspiegelung einer ungleichen Entfernung viel schwieriger ist.

Ich möchte hier noch einmal die Frage berühren, weshalb die seitliche Lage so eigenartig die Erscheinung beherrscht, weshalb also, wenn man Körper beisammen und gleich hoch sieht, der Sehwinkel fast einzig die Größe bestimmt. Ich sagte früher, daß wir bei solcher Lage Entfernungsunterschiede am wenigsten beurtheilen könnten und daß wir sie dann nach alter Gewohnheit leicht ganz

1) Siehe am angegebenen Orte die Tabelle, 2. Columne.

ignorirten und nur den Sehwinkel empfänden. Man könnte freilich auch meinen, wir hätten erfahren, daß Körper beisammen und gleich hoch gesehn sehr häufig gleiche Entfernungen hätten, jedenfalls häufiger als bei andrer Erscheinung, und daß wir hiernach jene Lage leicht mit der Vorstellung gleichen Abstandes verbänden. Ich halte jedoch die erste Erklärung für richtiger und führe hierfür einige Versuche an, zu denen mit Leuchtfarbe bestrichene Scheiben dienten, die ich im Dunkeln so stellte, daß ich je zwei ungleich großen bei gleichem Sehwinkel bald diese bald jene seitliche Lage gab. Hier variirte mit dieser viel weniger der Eindruck, augenscheinlich, weil wir im Dunkeln Entfernungen überhaupt schwer beurtheilen können, und wenn noch ein Einfluß blieb, so mag dies zum Theil daher rühren, daß die Empfindung für Entfernungen selbst im Dunkeln nie völlig erlischt. Was sich so nicht erklärt, mag wohl dafür sprechen, daß auch die zweite Erklärung nicht ganz zu verwerfen ist.

Zur Beförderung der Täuschung lagen noch zwei Hilfsmittel nahe, welche ich versucht aber nicht als wirksam befunden habe. Wenn ich sie doch erwähne, so geschieht es, weil sie sich an Erscheinungen knüpfen, deren gebräuchliche Erklärung mir nicht richtig scheint.

Zunächst glaubte ich, daß die Versuche besser im Halbdunkel gelingen müßten, weil man sich bei diesem auch sonst leichter in der Entfernung täuscht. Ich sah auch die linke Scheibe eher an der hintern Wand kleben, fand aber trotzdem keine stärkere Vergrößerung heraus. Ich erkläre das so, daß der größere Abstand dieser Wand durch das Halbdunkel gleichzeitig in den Schatten gestellt wird, sodaß die Täuschung wohl nach einer Richtung begünstigt, nach andrer aber beeinträchtigt wird. Ich meine auch, daß wir allgemein Entfernungen, zumal große, im Dunkeln für kleiner als bei Tage halten, da am Boden die Einzelheiten der Strecke zumal die ferneren eher verloren gehn. Nun weiß man, daß Abends und im Nebel Gebirge und Häuser oft ungewöhnlich groß erscheinen. Das darf man dann nicht so erklären, daß es geschehe, weil man jene Objecte für ferner hält. Ich glaube, daß es namentlich geschieht, weil sie isolirt und unerwartet in der Dunkelheit erscheinen, andre nahe Objecte von großem Sehwinkel, die man bei Tage mit sieht, also nicht wahrgenommen werden. Vielleicht wirkt noch daneben, daß man nur die Umrisse sieht, welche scheinbar senkrecht ansteigen und so einen größern Eindruck machen, wie auch sonst ein Berg, wenn er steil ist, uns um deswillen häufig schon höher dünkt.

Dann dachte ich, daß die Täuschung vielleicht besser gelingen würde, wenn die linke Scheibe der Farbe nach dunkler gehalten sei. Man meint ja wegen der Lichtschwächung mit der Entfernung, daß weniger scharf begrenzte und dunklere Körper ferner und somit größer erscheinen müssen. Daß sie ferner erscheinen, mag bedingungsweise wohl richtig sein. Die Maler wenden dies Princip ja in der sogenannten Luftperspective an. Daß sie auch größer erscheinen, braucht hieraus noch nicht zu folgen, da die Irradiation gleichzeitig eine Verkleinerung bewirken muß. Bei meinen Versuchen aber ergab sich keinerlei Effect. Durch bloße Verdunklung ließ sich nie erreichen, daß mir eine der Scheiben ferner erschien, und that sie es wegen anderweitig getroffener Anordnungen, so habe ich durch nachträgliche Verdunklung nie eine stärkere Vergrößerung erzwingen können. Ich glaube somit, daß wir auch in der Natur Objecte, welche lichtschwach und verschwommen erscheinen, deswegen noch nicht größer sehn.

Ich möchte nun noch kurz von einigen Täuschungen reden, wo der Contrast mit der Wirkung größerer Entfernung verbunden ist, wo man gewissermaßen aus doppeltem Grunde größer sieht, des Contrastes halber und weil man die Entfernung für größer hält. Etwas Aehnliches lag schon bei den Anordnungen 1 und 2 vor, wo ich auch bemerkte, daß die Vergrößerung deshalb etwas stärker sei. Hier aber möchte ich noch zwei besondere Fälle ins Auge fassen, deren einer freilich schon bekannt, aber nur einseitig gedeutet ist.

Wenn man nach R. Smith eine Oblate durch eine Linse betrachtet und jene genau in der Brennweite der letztern steht, so sieht man zurücktretend die Oblate mächtig anschwellen, obwohl ihr Sehwinkel hierbei keine Aenderung erfährt [1]). Es heißt nun, die Vergrößerung rühre daher, daß man bei constantem Sehwinkel eine Zunahme der Entfernung bemerkt, was natürlich richtig ist, aber die sehr beträchtliche Vergrößerung meiner Meinung nach nur theilweise erklärt. Man bemerkt nämlich die Zunahme der Entfernung vornehmlich in dem Umstande, daß die Linse kleiner wird, welche eine Art von Hintergrund ist, so daß des Contrastes halber sich die Oblate schon hierdurch vergrößern muß. In der That ist die Anschwellung nicht so groß, wenn Linse und Oblate auf ein Brett gestellt und so auf dem Tische verschoben werden, während man durch eine Röhre sieht, die den Linsenrand verdeckt, und ein der Linse angeheftetes Scheibchen die Entfernung markirt.

Nahe das Gleiche nun zeigt ganz ohne Linse ein Apparat von

---

1) R. Smith, Opticks remarks p. 48.

folgender Beschaffenheit (Fig. 4). An einer 60 cm langen Leiste sitzt vorne aufrecht ein dünnes Brettstück mit einem kleinen Loche am oberen Ende, in ¼ der Länge steht ein weißes Scheibchen, dahinter eine große dunkle Scheibe, welche sich verschieben läßt. Die Scheiben stehn genau über der Mittellinie, und ihre Mittelpunkte genau in der Höhe des Lochs, so daß man durch letzteres hindurchsehend die kleine immer in der Mitte der großen sieht. Man sieht sie dann sehr beträchtlich anschwellen, wenn man den Schieber mit der großen nach hinten bewegt, weil sie an dieser zu kleben scheint, und sich die Wirkung der Entfernung auch hier mit jener des Contrastes vermischt. Tritt erstere mehr zurück, so schwillt die Scheibe weniger an, z. B. dann, wenn man die Mittelpunkte nicht auf gleiche Höhe bringt, weil die Täuschung, als ob beide Scheiben aneinander klebten, dann nur unvollkommen ist. Statt der kleinen kann man natürlich auch das Spiegelbild eines dicht hinter dem aufrechten Brett liegenden Scheibchens benutzen, wenn man an das obere Ende ein unbelegtes unter 45° geneigtes Spiegelchen setzt. Letzteren Falls müssen die Holzflächen geschwärzt sein, damit diese nicht gleichfalls im Spiegel erscheinen.

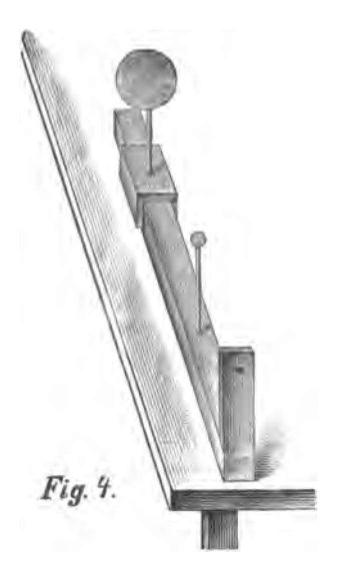


Fig. 4.

Man kommt bei solchen Versuchen leicht auf den Gedanken, daß zwischen Constrast und Entfernung engere Beziehungen bestehn, daß vielleicht die Empfindung des Contrastes überhaupt erst durch Erfahrungen an Entfernungen ausgebildet ist. Wir erfahren viel häufiger, daß Körper auf kleinem Hintergrunde größere Entfernungen haben als kleinere, weil der Hintergrund meist mit dem Körper zugleich in die Ferne rückt. So schmilzt die Vorstellung einer großen Entfernung mit der Vorstellung eines kleinen Hintergrunds zusammen, und so sehn wir, die Entfernung ganz ungeachtet, die Körper schon größer, wenn der Hintergrund kleiner ist.

Daß überhaupt aber derartige Täuschungen, d. h. willkürliche Selbsttäuschungen im Bereiche der Möglichkeit liegen, zeigt wieder recht deutlich, wie wenig das Bewußtsein beim Vorgange des Sehens betheiligt ist. Es zeigt, daß der Beschauer nicht reflectirt, sondern mechanisch einem inneren Zwange gehorcht, der durch jahrelange Erfahrungen so gefestigt ist, daß ein Vernunftschluß ihn nicht beseitigen kann.

Ueber den Einfluß des Druckes auf das galvanische Leitungsvermögen von Electrolyten.

Von

W. C. Röntgen.

Es schien mir von Interesse zu sein, die von Herrn Fink im Jahre 1885 angefangene Untersuchung[1]) über den Einfluß des Druckes auf das galvanische Leitungsvermögen von Elektrolyten fortzusetzen und dieselbe namentlich auf verdünntere wässerige Lösungen auszudehnen. In Gemeinschaft mit Herrn O. Stern habe ich diese Arbeit unternommen und ich erlaube mir der Kön. Gesellschaft von den wichtigeren bisher erhaltenen Resultaten eine kurze Mittheilung zu machen. Eine ausführliche Beschreibung der Versuche, die aus manchen Gründen erforderlich ist, soll an anderer Stelle gegeben werden.

Da die getroffene Versuchsanordnung abgesehen von verschiedenen Verbesserungen im Wesentlichen dieselbe ist, welche ich seiner Zeit Herrn Fink vorschlug, und welche von ihm beschrieben wurde, kann ich deren Besprechung hier übergehen und ohne Weiteres die Resultate, auf welche es hauptsächlich ankommt mittheilen. —

In den folgenden Tabellen steht unter N die Nummer des benutzten Widerstandsgefäßes, unter p der Procentgehalt und unter m der Moleculargehalt der Lösungen (Grammaequivalent auf 1 l Lösung). Die mit t überschriebene Columne enthält die mittleren, bei den Widerstandsmessungen möglichst constant gehaltenen Temperaturen der Lösungen, die mit w überschriebene die gefundenen galvanischen Widerstände in S. E. bei einer Atmosphäre und endlich die mit Δ überschriebene die durch eine Drucksteigerung von 1 auf 500 Atm. (nominell) bewirkten Zunahmen des Leitungsvermögens der Lösungen in Procenten des L. V. bei einer Atm.: die Druckcoefficienten.

I. Versuche in der Nähe von 15°.

NaCl-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
I	26.40	5.419	15.00	8.920	− 1.03
III	26.40	5.419	15.00	9.697	− 1.01
I	5.615	0.9984	14.35	26.134	+ 3.54
I	2.808	0.4992	14.10	48.404	4.02

1) Fink, Wied. Ann. 26 p. 481.

N	p	m	t	w	Δ
I	0.579	0.09907	14.95	210.67	4.71
I	0.0569	0.009724	14.95	1927.5	4.81
I	0.00581	0.0009931	14.95	17475	4.83
II	0.00557	0.0009519	14.60	22198.0	4.87
III	0.00557	0.0009519	14.95	19833.7	4.80

KCl-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
II	7.113	0.9965	14.40	23.893	3.90
II	0.7106	0.09574	14.55	217.626	5.08
II	0.07106	0.009527	14.50	1989.53	5.23
II	0.007108	0.0009528	14.55	18615.9	5.03

HCl-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
IV	38.00	12.416	15.04	3.640	0.94
IV	18.21	5.450	14.90	2.648	4.21
III	3.578	0.9975	15.05	6.877	6.01
III	0.3577	0.09833	15.00	59.596	6.30
III	0.03577	0.009813	14.80	569.75	6.37
III	0.003577	0.0009813	14.75	5638.28	6.14

$ZnSO_4$-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
IV	31.04	5.416	14.85	49.557	2.31
IV	9.730	1.333	14.90	64.706	10.58
I	3.784	0.4863	15.45	120.700	11.98
I	0.7773	0.09706	15.50	419.529	11.45
I	0.07822	0.009692	15.05	2623.70	8.51
IV	0,007347	0.0009105	15.00	21361.2	6.27

H_2SO_4-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
I	97.407	36.507	15.10	24.407	— 1.83
I	94.739	35.478	14.85	18.849	— 2.95
I	88.144	32.457	15.60	18.773	— 6.59
IV	84.603	30.742	15.20	21.732	— 7.35
I	81.286	28.901	15.00	19.105	— 6.73
I	69.386	22.751	15.20	8.532	— 2.91
I	49.768	14.188	15.10	3.478	— 0.09
IV	30.050	7.485	14.90	2.747	+ 2.72
I	29.913	7,452	14.85	2.553	2.73
I	15.005	3.379	14.85	3.458	6.72
I	4.880	1.027	14.70	9.326	10.37
IV	2.390	0.4947	14.90	19.666	11.90
I	0.4738	0.09686	15.40	80.786	12.83
I	0.05012	0.01022	15.15	588.73	10.17
IV	0.004859	0.0009904	15.05	5711.1	7.01

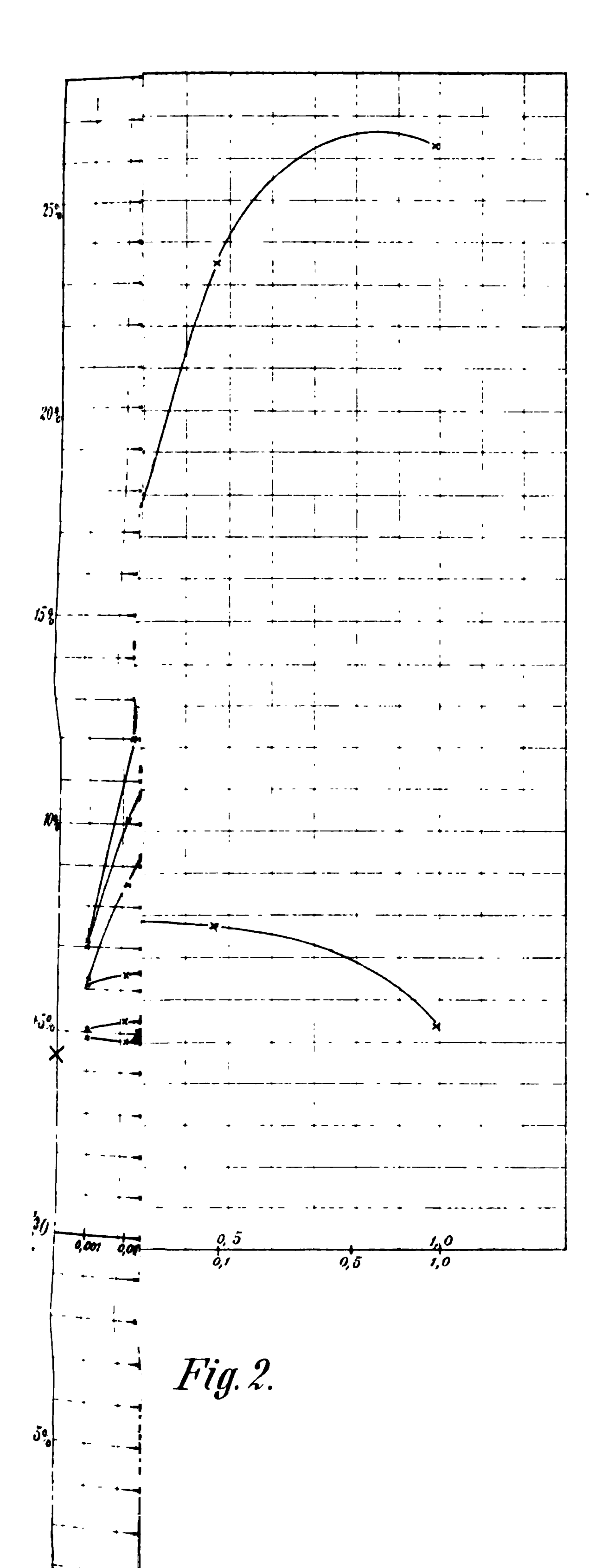
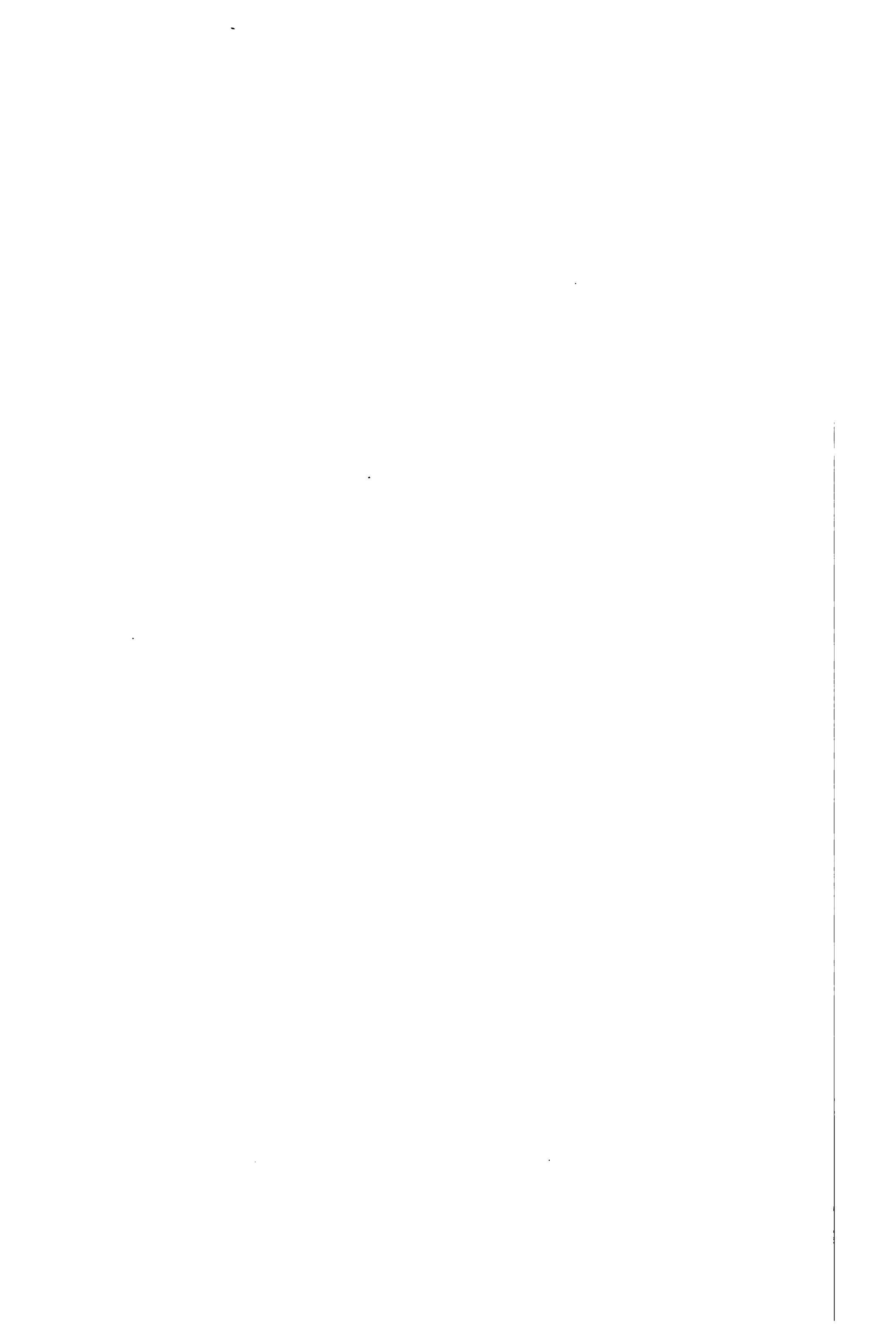


Fig. 2.



H_3PO_4-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
I	46.15	18.385	15.40	8.989	7.47
I	16.33	5.459	15.30	20.025	16.81
I	3.071	0.9552	14.50	87.541	21.36
I	0.3709	0.1135	15.00	378.650	18.74
I	0.03958	0.01212	15.15	1930.71	12.03
IV	0.003276	0.001003	15.00	21345.3	7.12

II. Versuche bei 0°.

NaCl-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
III	5.602	0.9951	0	41.173	5.28
III	0.5585	0.09583	0	351.961	7.68
II	0.05585	0.009545	0	3549.91	7.87
III	0.05585	0.009545	0	3196.65	7.94
III	0.005569	0,0009518	0	30266.9	7.94
III	0.005585	0.0009545	0	30529.0	8.04

H_2SO_4-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
IV	0.0500	0.01019	0	1040.58	12.22
IV	0.00500	0.001019	0	9418.76	9.06

H_3PO_4-Lösungen.

N	p	m	t	w	Δ
III	3.071	0.9552	0	120.463	26.31
III	0.3323	0.1017	0	551.966	23.43
III	0.03320	0.01017	0	3069.42	14.70
III	0,003308	0.001013	0	26725.3	9.70
III	0.003304	0.001012	0	26985.9	9.71

Die Capacitäten der 4 Widerstandsgefäße betragen: von I: 1680.10^{-7}; von II: 2040.10^{-7}; von III: 1825.10^{-7}; von IV: 1800.10^{-7}.

Bei 0° sind relativ wenig Versuche angestellt, da diese Temperatur nicht ohne größere Schneemengen genügend constant erhalten werden konnte, und solche nur während einer beschränkten Zeit zur Verfügung standen. Auch ist zu erwähnen, daß die eine bei 0° untersuchte H_2SO_4-Lösung (m = 0,01019) nicht frisch bereitet war, und daß deshalb diese und die daraus angefertigte Lösung m = 0,001019 einen zu hohen Widerstand und etwas zu kleine Werthe von Δ für H_2SO_4 ergeben, was zwar nicht erwünscht, aber für den bei der vorliegenden Arbeit verfolgten Zweck ohne wesentliche Bedeutung ist.

In den nebenstehenden Figuren sind die gefundenen Werthe in ein Coordinatensystem eingetragen, und zwar die Δ als Ordi-

naten und nach dem Vorgang von F. Kohlrausch die dritten Wurzeln aus den m als Abscissen[1]). Die Gestalt der Curven zwischen den eingezeichneten Punkten ist selbstverständlich nicht frei von Willkür.

Man ersieht aus diesen Figuren Folgendes.

Das Leitungsvermögen von allen untersuchten, hoch verdünnten Lösungen ($m = 0{,}001$) wird durch Zunahme des Druckes vermehrt. Mit wachsender Concentration nimmt der Einfluß des Druckes auf das L. V. zunächst zu; bei den verschiedenen Lösungen jedoch in sehr verschiedenem Maaße: die Zunahme ist z. B. am beträchtlichsten bei H_3PO_4 und nicht merklich bei NaCl. Bei einer gewissen für die verschiedenen Electrolyte verschiedenen Concentration erreicht dieser Einfluß ein Maximum.

Das L. V. stark concentrirter Lösungen kann, wie es namentlich für die NaCl und die H_2SO_4-Lösungen nachgewiesen wurde, durch Druckzunahme vermindert werden; folglich existirt von jedem dieser Electrolyte eine Lösung deren L. V. durch einen bestimmten Druck nicht geändert wird.

Vergleicht man die Werthe der Δ, welche verschiedenen Lösungen von gleichem Moleculargehalt zukommen, mit einander, so findet man im Allgemeinen beträchtliche Verschiedenheiten; so liegen z. B. für $m = 1$ die Werthe von Δ bei ca. 15° zwischen 3,5 (NaCl) und 21,4 (H_3PO_4). Dieser Unterschied wird aber mit abnehmender Concentration immer geringer; das Intervall beträgt bei $m = 0{,}1$: 4,7—18,9, bei $m = 0{,}01$: 4,8—12,0, bei $m = 0{,}001$: 4,8—7,1. In Folge dessen kommt man zu der Vermuthung, daß dieser Unterschied für unendlich verdünnte Lösungen überhaupt verschwindet, daß m. a. W. das Leitungsvermögen aller von uns untersuchten Lösungen in äußerster Verdünnung bei gleicher Temperatur in gleichem relativem Maaße durch den Druck beeinflußt wird. Die Gestalt und die gegenseitige Lage der Curven zwischen den Abscissen $m = 1$ und $m = 0{,}001$ sind im Allgemeinen wohl geeignet um uns in dieser Vermuthung zu bestärken.

Legt man sich die Frage vor, welche sind die Eigenschaften einer äußerst verdünnten Lösung, deren durch einen äußeren Druck erzeugte Aenderungen eine Vergrößerung des L. V. bedingen können, so wird man wohl zunächst an die Concentration und an die Reibung denken. Es soll nun untersucht werden, im welchem

---

[1]) Eine Reductien der Beobachtungen in der Nähe von 15° auf eine und dieselbe Temperatur hätte nur für einzelne durchgeführt werden können und ist deshalb bei allen unterblieben.

Maaße die Veränderungen dieser Größen das L. V. zu beeinflussen im Stande sind.

Um den Antheil der Concentrationsvermehrung an der Aenderung des L. V. zu erfahren, wurde die Volumenverminderung bestimmt, welche die Volumeneinheit reinen Wassers durch eine Drucksteigerung von einer auf 500 Atm. (nominell) bei 15°,0 erfährt. Wir erhielten dafür den Werth 2.15 in Procenten des Anfangsvolumens. Setzt man die Aenderung des L. V. der Aenderung der Concentration proportional, was bei äußerst verdünnten Lösungen unbedenklich geschehen darf, so ergibt sich für den gesuchten Antheil 2.20 in Procenten des L. V. bei einer Atmosphäre und 15°,0.

Ueber den Einfluß des Druckes auf die Reibung von Flüssigkeiten liegt eine im hiesigen Institut ausgeführte Arbeit von R. Cohen[1]) vor, deren Resultate ohne Weiteres benutzt werden können, da Hr. Cohen dasselbe Manometer benutzte wie wir. Derselben entnehme ich als Mittel aus allen Versuchen in der Nähe von 15° den Werth 2,32 für die procentische Zunahme, welche der reciproke Werth der Reibung des Wassers bei einer Atm. durch eine Drucksteigerung auf 500 Atm. erleidet. Es ist zu erwähnen, daß dieser Werth in Folge unvermeidlicher Versuchsfehler weniger zuverlässig ist, als die übrigen in der vorliegenden Arbeit mitgetheilten; schon von der ersten Decimalstelle ist die Richtigkeit nicht mehr zu garantieren.

Versuchsweise nehme ich nun an, daß die Verminderung der Reibung eine Verminderung des galvanischen Widerstandes einer unendlich verdünnten Lösung bedingt, deren procentischer Betrag gleich dem ist, in welchem auch die Reibung verändert wird. Dann muß das L. V. einer solchen Lösung durch eine Zunahme des Druckes von einer auf 500 Atm. um $2.20 + 2.32 = 4.52$ Procente des L. V. bei einer Atm. vergrößert werden. In der Figur 1 ist die diesem Werth entsprechende Stelle auf der Ordinantenaxe angegeben.

Betrachtet man die Figur, so wird man zugeben müssen, daß eine passendere Stelle für den Ausgangspunkt der Curven kaum hätte erhalten werden können; folglich scheinen die bei der Bestimmung dieser Stelle gemachten Voraussetzungen zutreffend zu sein. Diese Voraussetzungen waren aber folgende: 1°. Die einer gleichen Temperatur entsprechenden Druckcoefficienten des Leitungsvermögens der untersuchten Electrolyten nähern sich mit ab-

1) R. Cohen, Wied. Ann. 45 p. 666. 1892.

nehmender Verdünnung einem gemeinsamen Grenzwerth. 2°. Dieser Werth ist numerisch gleich der Summe der durch den Druck bewirkten procentischen Aenderungen der Concentration resp. der Fluidität.

Eine weitere Stütze erhält dieses Resultat durch unsere Versuche bei 0°. Hr. Cohen hat gefunden, daß der Druck die Reibung des Wassers bei 0° beträchtlich stärker beeinflußt als bei 15°; ich berechne aus seinen Versuchen, daß die Reibung des Wassers bei 0° durch eine Drucksteigerung von einer auf 500 Atm. um 5,84 Procente des Anfangswerthes vermindert wird und erhalte aus den von uns angestellten Compressionsversuchen für die entsprechende procentische Volumenverminderung den Werth 2,35. Daraus berechnete sich die soeben erwähnte Summe zu 8.25, welcher Werth auf die Ordinatenaxen der Curven in Fig. 2 aufgetragen ist.

Aus dieser Figur ist ersichtlich, daß die gegen die Ordinatenaxe hin gezogene Verlängerung der NaCl-Curve diese in einer der berechneten sehr nahe gelegenen Stelle trifft, und daß auch die beiden andern Curven ohne Zwang mit dieser Stelle verbunden werden können, zeigt am besten eine Zeichnung, in welcher die Werthe von w und von m (nicht mehr von $m^{1/3}$) als Coordinaten eingetragen sind. Folglich stehen auch die Ergebnisse dieser Versuche in Einklang mit den gemachten Voraussetzungen.

Nachdem ich gezeigt habe, daß alle Versuche mit verdünnten Lösungen zu der oben ausgesprochenen Regel führen, ist noch Folgendes zu erwähnen. Wenn man sich eine Zeichnung anfertigt, in welcher die Werthe von w als Ordinaten und die von m als Abscissen aufgetragen sind, so fällt es auf, namentlich bei der HCl-Curve, daß fast alle Curvenstücke, welche die auf der der Abscisse $m = 0,001$ entsprechenden Ordinate liegenden Stellen mit dem berechneten gemeinsamen Anfangspunkt verbinden, eine relativ starke Krümmung haben. Das verhältnißmäßig rasche Ansteigen der Curven gerade am Anfang ihres Verlaufes, entsprechend den Concentrationen von $m = 0$ bis $m = 0,001$, hat man nun vielleicht nicht erwartet. Dasselbe bedeutet nämlich, daß das Verhältniß der Zunahme der Druckcoefficienten zu der entsprechenden Zunahme der Concentration desto größer ist, je verdünnter die Lösung. Ich kann aber in diesem Umstand vorläufig keinen genügenden Grund für einen Einwand gegen die aufgestellte Regel erkennen; gebe aber die Möglichkeit zu, daß weitere Versuche mit noch verdünnteren Lösungen mich eines Besseren belehren werden.

Von den übrigen Ergebnissen unserer Untersuchung möchte ich noch das folgende besonders hervorheben.

Vergleicht man das Verhalten der gleich concentrirten verdünnteren Lösungen verschiedener Substanzen mit einander, so zeigt sich im Allgemeinen, daß das Leitungsvermögen derjenigen Lösung am meisten durch Zunahme des Druckes relativ vergrößert wird, in welcher sich der am wenigsten dissociirte Körper befindet. Daraus und aus der Thatsache, daß die Curven anfänglich mit wachsendem *m* ansteigen, scheint hervorzugehen, daß der Dissociationsgrad verdünnter Lösungen durch Zunahme des auf der Flüssigkeit lastenden Druckes erhöht werden kann. Von diesem Resultat läßt sich wohl eine, wie ich glaube, annehmbare Erklärung geben, die von der bekannten Erscheinung ausgeht, daß beim Lösen der von uns untersuchten Substanzen in Wasser eine Volumenverminderung eintritt. Indessen möchte ich an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen und nur noch erwähnen, daß ich früher auf Grund eines Versuches über den Einfluß des Druckes auf die Reactionsgeschwindigkeit[1]) zu einer anderen Ansicht gekommen war.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Temperaturcoefficienten des Leitungsvermögens sich als vom Druck abhängig ergeben haben.

Würzburg, Anfang Mai 1893.

1) Wied. Ann. 45 p. 98. 1892.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1893.

(Fortsetzung.)

Ueber die Bestimmung der geographischen Länge und Breite und der drei Elemente des Erdmagnetismus etc. v. Dr. J. Fritsche. St. Petersburg 1893.

La Société Imp. des Naturalistes de Moscou:
Bulletin. Année 1892. N. 3. 4. Moscou 1893.

Mathematische Zeitschrift etc. aus Moskau. XVI : 3. Moskau 1892.

Université de Kharkow:
Annales. 1893. Band 1. Kharkow 1893.

Naturwissenschaftl. Verein von Südrussland:
Band XVII. Abliefer. II. III. Odessa 1892—93.
La Société de Geographie de Finlande:
Fennia. 6. 7. Bulletin. Helsingfors 1892.
(Italien.)
La Reale Accademia dei Lincei:
a. Rendiconti. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Serie Quinta. Vol. I. Fasc. 12. Vol. II. Fasc. 1°. 2°.
b. Atti. Serie quarta. 1892. Classe di scienze morali storiche e filologiche. Vol. X. Parte 2. Notizie degli Scavi. Settembre, Ottobre, Novembre 1892.
c. Atti. Serie quinta. 1893. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. II. Fasc. 3—6. 1° Semestre. Roma 1893.
Sui Minerali del Granito di Alzo. Nota di G. Struever. (Estratto dal vol. 1°, 2° Semestre, fasc. 11.) Roma 1892.
La Società Reale di Napoli:
a. Rendiconto dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 28, 1889. 29, 1890. 30, 1891. 31, 1892. (Gennaio al Giugno.)
b. Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche matematiche.
Serie II^a. Vol. VI. (Anno XXXII.) fasc. 2°. Febbr. 1893.
Vol. VII. (Anno XXXII.) fasc. 3°. Marzo 1893.
c. Atti dell' Accademia di science morali e politiche. Vol. 24. 25. Napoli 1891 —92.
Rassegna delle scienze geologiche in Italia:
Anno II. 3° Trimestre 1892. Fasc. 3°. Roma 1892
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
Bollettino delle pubblicazioni Italiane. 1893. N. 173. 174. 175. 176. Firenze 1893.
Reale Accademia delle scienze di Torino:
Atti. Vol. XXVIII. Disp. 4—8. 1892—93. Torino 1893.
(Amerika U. St.)
The New York mathematical Society:
Bulletin. Vol. I 1—10. Vol. II 6—7. New York, 1892—93.
Boston Society of natural History:
a. Proceedings. Vol. XXV. Parts III. IV. Nov. 1891. Mai 1892.
b. Memoirs. Vol. IV. N. X. Boston 1892.
Johns Hopkins University:
a. Historical and Political Scienze. Tenth Series. IV. V—VI. VII. VIII—IX.
b. Johns Hopkins University Circulars. Vol. XII. N. 103. 104.
c. American Journal of Mathematics. Vol. XIV. N. 2. 3. Baltimore 1892—93.
Museum of Comparative Zoology at Harvard college:
Bulletin. Vol. XXIII. N. 6. Vol. XXIV. N. 1. 2. Vol. XVI. N. 11. Cambridge. U. S. A.
Geographical Society of California:
Bulletin. Vol. 1. Part 1. San Francisco. 1893.
Connecticut Academy of Arts and Sciences:
Transactions. Vol. VIII Part 2. Vol. IX Part 1. New Haven 1892—93.
The Scientific Laboratories of Denison University:
Bulletin. Vol. VII. Granville, Ohio 1892.
American Philosophical Society:
Proceedings. Vol. XXX. Dec. 1892. N. 139.
University of Nebraska. Agricultural Experiment Station. Vol. V. VI.
a. Sugar Beet Series. Bulletin. N. 25—27. (2 Ex.)
b. Sixth annual report. (2 Ex.) Lincoln, Nebrasca, U. S. A.
American Pharmaceutical Association:
Proceedings. 1892. Vol. 46. Philadelphia 1892.
From the Lick Observatory:
Contributions. N. 3. Photographic Absorption. Sacramento 1893.
Geological Survey of the State of New York:
Palaeontology. Vol. VIII. Part. 1. Albany N. Y. 1892.
New York State Museum:
44. annual Report for 1890. Albany 1892.

a. The Imaginary of Algebra by A. Macfarlane. Salem Mass. 1892.
b. The fundamental Theorems of Analysis generalized for Seace, by A. Macfarlane. Boston U. S. A.

(Argentinien).
Sociedad cientifica Argentina:
Annales. Nov. Dic. de 1892. Entrega V. VI. Tomo XXXIV. Buenos Aires 1892.

(Japan).
College of Science Imp. University Japan:
Journal. Vol. V. Part III. Tokyò 1893.

Nachträge.

Maatschappiy der Nederlandsche Letterkunde te Leiden:
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. 12. Deel. N. Reeks Deel. Aflevering. Leiden 1893.
Note sur la biologie et l'anatomie de la feuille des Vellosiacées par Eug. Warming.
(Extrait du Bulletin de l'Académie R. d. Sc. et de L. de Danemark. 1893.)
Académie R. de Belgique:
Classe des Beaux-Arts. Programme de Concours pour l'Année 1894.

Mai 1893.

(Deutschland).
Königl. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin:
Sitzungsberichte. XXI, XXII, XXIII. Berlin 1893.
Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig:
a. Berichte. 1. Philologisch-historische Classe. 1892. III.
2. Mathematisch-physische Classe. 1893. I.
b. Abhandlungen. 1. Philologisch-historische Classe. XIII. Band. N. VI.
2. Mathematisch-physische Classe. XIX. Band. Leipzig.
Königl. Bairische Akademie der Wissenschaften zu München:
a. Sitzungsberichte. Philosophisch-philologisch-historische Classe. 1893. Heft 1.
b. Abhandlungen. Historische Classe. 20. Bd. 2. Abtheilung. (Ganze Reihe Band LXV). München 1893.
Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde:
Bericht über den Zeitraum vom 1. April 1889—30. Nov. 1892. Hanau 1893.
Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. IX. Bd. N. 4. Leipzig 1893.
Verein für Geschichte der Landeskunde von Osnabrück:
Mittheilungen. 17. Band. 1892. Osnabrück.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. 65. Band. (Fünfte Folge dritter Band). 6. Heft. Leipzig 1892.
Handbuch der organischen Chemie von F. Beilstein. 19. 20. Lfg. (Bd. 1). Hamburg. Leipzig 1893.

(Oesterreich).
K. K. geologische Reichsanstalt:
Verhandlungen. N. 2—5. 1893. Wien 1893.
Oesterreichische Gesellschaft für Meteorologie u. deutsche meteorologische Gesellschaft:
Meteorologische Zeitschrift. 1893. Heft 5. Mai. Wien.
Naturforschender Verein in Brünn:
a. Verhandlungen. XXX. Band. 1891.
b. X. Bericht der meteorologischen Commission. Brünn 1892.
Ungarische Gesellschaft der Wissenschaften:
Ungarische Revue. III.—IV. Heft. 1893. Dreizehnter Jahrg. Budapest 1893.

(Schweiz).
Naturforschende Gesellschaft in Zürich:
Vierteljahrsschrift. 37. Jahrgang. 3. u. 4. Heft. Zürich 1892.

(Holland).

Musée Teyler:

a. Archives. Série II, Vol. IV. Prem. Partie.

b. Verhandelingen. Nieuwe Serie. 13. Deel. Harlem 1893.

Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia:

a. Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Dertiende Jaarg. 1891.

b. Observations. Vol. XIV. 1891. Batavia 1892.

(Schweden).

Observatoire météorologique de l'université d'Upsal:

Bulletin mensuel. Vol. XXIV. Année 1892. Upsal 1892—93.

(Russland).

La Société physico-mathématique de Kasan:

Bulletin. Deuxième série, Tome II N. 3. Kasan 1893.

(Frankreich).

Commission permanente du Répertoire:

Index du repertoire bibliographique des sciences mathématiques. Paris 1893.

(England).

Nature. Vol. 48. N. 1227—1231. London 1893.

The Royal Astronomical Society:

Monthly Notices. Vol. LIII. N. 6. Apr. 1893. London 1893.

The Royal Society:

Proceedings. Vol. LIII. N. 321. London 1893.

The London Mathematical Society:

Proceedings. N. 455—459. London 1893.

The Manchester Literary and Philosophical Society:

Memoirs and Proceedings. 1892—93. Fourth Series. Vol. 7. N. 1. Manchester.

The Cambridge Philosophical Society:

Proceedings. Vol. VIII. Part 1. Michelmas Term. 1892. Cambridge 1893.

(Italien).

La Reale Accademia dei Lincei:

Atti. Serie quinta. 1893. Rendiconti. Classe di sc. fis. mat. è naturali. Vol. II fasc. 7°. 1. semestre. Roma 1893.

Circolo Matematico di Palermo:

Rendiconti. Tomo VII. Anno 1893. Fasc. I e II. Palermo 1893.

l'Accademia delle scienze fisiche et matematiche di Napoli:

Rendiconto. Serie 2a. Vol. VII. Fasc. 4°. Aprile 1893. Napoli 1893.

Uomini e Cose. Vol. I. II da Monsignor La China. Vittoria (Sicilia) 1893.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:

Bollettino delle pubblicazioni Italiane 1893. N. 177, 178. Firenze 1893.

(Amerika. U. S.)

Museum of Comparative Zoology at Harvard College:

Bulletin. Vol. XVI N. 12. Vol. XXIV N. 3. Cambridge U. S. A. 1893.

American Geographical Society:

Bulletin. Vol. XXIV N. 4. Part 2. 1892. Vol. XXV N. 1. March 31. 1893. New York.

New York Mathematical Society:

Bulletin. Vol. II. N. 8. Mai 1893. New York 1893.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.

Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

2. August. № 13. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. Juli.

Nachricht über die Verleihung von Statuten an die kgl. Gesellschaft der Wissenschaften.

O. Wallach: Ueber Verbindungen der Campherreihe.

W. Voigt: 1) Beobachtungen über die Festigkeit bei homogener Deformation.
2) Ueber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Elasticitätstheorie.

F. Kielhorn: Bruchstücke des Lalita-Vigraharâja-Nâṭaka.

Seine Majestät der Kaiser und König haben mit allerhöchstem Erlaß vom 21. Juni d. J. aus Kiel der kgl. Gesellschaft der Wissenschaft in Göttingen Statuten zu verleihen geruht.

Danach hat die Gesellschaft fortan nicht mehr drei, sondern nur zwei gleichgestellte Classen, eine mathematisch-physicalische, die die vorher gesonderte physicalische und mathematische Classe vereinigt, und eine philologisch-historische Classe.

Jede Classe hat 15 Stellen für ordentliche Mitglieder, die das Alter von 75 Jahren nicht überschritten haben; 25 Stellen für auswärtige, und 75 Stellen für korrespondirende Mitglieder. Die Gesellschaft wählt Ehrenmitglieder, deren Zahl nicht beschränkt ist. Die Wahl der ordentlichen und auswärtigen, sowie der Ehrenmitglieder unterliegt der königlichen Bestätigung.

An der Spitze jeder Classe steht ein auf die Dauer von sechs Jahren durch Seine Majestät den König ernannter Sekretär; die Geschäfte der gesammten Gesellschaft leitet, von Jahr zu Jahr im Vorsitz wechselnd, einer der Sekretäre.

Zum Sekretär der philologisch-historischen Classe ist der Geheime Regierungsrath Prof. Dr. Sauppe ernannt, zu seinem Adlatus Professor Dr. von Wilamowitz-Möllendorf bestellt; zum Sekretär der mathematisch-physicalischen Classe ist der Geheime Regierungsrath Prof. Dr. Ehlers ernannt, dem die Geschäftleitung der Gesellschaft im Etatsjahr $189^{3}/_{4}$ übertragen ist.

Ueber Verbindungen der Campherreihe.

Von

O. Wallach.

Durch Oxydation des Terpineols läßt sich, wie neulich mitgetheilt wurde, eine Verbindung der Zusammensetzung $C_{10}H_{20}O_3$ erhalten. Behandelt man diese Substanz mit verdünnten Säuren, so verliert sie 3 Moleküle Wasser und es entsteht Cymol. Man kann die Reaction aber auch so leiten, daß nur 2 Molecüle Wasser abgespalten werden. Es resultirt dann eine Verbindung von der Zusammensetzung des Camphers. Dieser Körper ist ein ungesättigter Alkohol, $C_{10}H_{15}.OH$, und der erste Repräsentant der „Carveole“, die man bisher vergebens zu erhalten suchte.

Der Alkohol siedet bei 231—233°, das specif. Gewicht ist bei 20° = 0,929, n_D = 1.48197 [M = 46.64]. Durch Oxydationsmittel wird der Alkohol in ein Carvon, $C_{10}H_{14}O$ übergeführt.

Bei der Behandlung mit nascirendem Wasserstoff nimmt er 4 Atome Wasserstoff auf und es entsteht ein mit dem Menthol isomerer Körper $C_{10}H_{19}OH$. Diese Verbindung muß als Tetrahydrocarveol aufgefaßt werden und sollte identisch sein mit einer jüngst von Baeyer aus dem Hydrocarveol dargestellten Substanz. Die beobachteten Eigenschaften weichen aber in einem sehr wesentlichen Punkt von denen ab, welche Baeyer für das von ihm gewonnene Tetrahydrocarveol angiebt. Dieses zersetzt sich bei der Destillation unter Bildung ungesättigter Producte. Der neue Alkohol $C_{10}H_{19}OH$ siedet völlig unzersetzt bei 218°—220°, das specif. Gewicht ist bei 23° = 0,90, n_D = 1.46246 [M = 47.55]. Mit Carbanil vereinigt es sich zu einem bei 74—75° schmelzenden Urethan.

Oxydationsmittel führen den Alkohol $C_{10}H_{19}.OH$ in ein isomeres Menthon $C_{10}H_{18}O$ über. Das daraus bereitete Oxim schmilzt bei 105°. Das Keton siedet bei 220—221°, hat ein specif. Gew. = 0.904 bei 20°, n_D = 1.45539 [M = 46.21]. Es verbindet sich mit Natriumbisulfit zu einer leicht wieder zerlegbaren krystallinischen Masse.

Bei der Reduction giebt das bei 105° schmelzende Oxim $C_{10}H_{18}NOH$ eine mit dem Menthylamin isomere, diesem sehr ähnliche, bei 211—212° siedende Base, $C_{10}H_{19}NH_2$, deren Acetylderivat bei 124—125° schmilzt. Das Chlorhydrat ist unlös-

lich in Aether und destillirt ohne Zersetzung. Der Harnstoff $CO\begin{matrix}NHC_{10}H_{19}\\NH_2\end{matrix}$ schmilzt bei 193°, das Phenylsulfocarbamid $CO\begin{matrix}NHC_6H_5\\NHC_{10}H_{19}\end{matrix}$ bei 117°.

Es wurde erwartet, daß das Ausgangsmaterial für die eben beschriebenen Versuche, die Verbindung $C_{10}H_{20}O_3$, sich auch aus dem Terpineolbibromid, $C_{10}H_{17}.OH.Br_2$ würde gewinnen lassen, welches leicht durch Addition von Brom zu Terpineol als eine schwere Flüssigkeit herstellbar ist. Ganz unerwarteter Weise verläuft die Reaction aber anders. Man erhält bei allen Reactionen, bei denen ein Austausch des Broms im Terpineolbromid gegen Hydroxyl sich vollziehen sollte, Pinolhydrat, beziehungsweise Pinol, $C_{10}H_{16}O$, so daß für diese mit Campher isomere Verbindung nunmehr eine bequeme Darstellungsmethode geschaffen ist.

Eine neue mit Campher isomere und dem Pinol chemisch augenscheinlich nahe stehende Substanz wurde von Hn. Schrader gewonnen, der auf meine Veranlassung das Oxydationsproduct des Dihydrocarveols näher untersuchte. Bei der Behandlung dieser Verbindung, für welche man auch die Formel $C_{10}H_{20}O_3$ annehmen muß, mit verdünnter Schwefelsäure spaltet sich Wasser ab und es entsteht ein angenehm riechendes Oel, das ein ungesättigtes Oxyd, $C_{10}H_{16}O$, vorstellt. Dies Oxyd siedet bei 196—199°, hat das spezif, Gewicht = 0.962 bei 20°, n_D = 1.484 [M = 45,2].

Terpineol verbindet sich sehr leicht mit Nitrosylchlorid zu einem auffallend beständigen Additionsproduct, $C_{10}H_{17}.OH.NOCl$, das sich sogar aus warmem Alkohol ohne jede Zersetzung umkrystallisiren läßt. Aus dem Nitrosochlorid lassen sich Nitrolamine gewinnen. Das Terpineol-Nitrol-Piperidid schmilzt bei 160° das entsprechende Anilid bei 155—156°. Auch ein krystallisirtes Nitrosat ist aus Terpineol erhalten worden.

Die bei der Oxydation des Terpineols entstehende, bei 121° schmelzende Verbindung $C_{10}H_{20}O_3$ geht bei weiterer Oxydation zunächst glatt in die bei 61—62° schmelzende Verbindung $C_{10}H_{16}O_3$ über und diese läßt sich weiter in Terpenylsäure, $C_8H_{12}O_4$, überführen. Bei diesem Oxydationsvorgang entsteht außerdem Essigsäure. Eine mit der Terpenylsäure isomere, zweibasische Säure, welche aus Wasser sehr gut krystallisirt und bei 94—95° schmilzt, ist bei der Oxydation des Carvols erhalten worden.

Terpenylsäure spaltet, in alkalischer Lösung mit Brom behandelt, sehr leicht Tetrabromkohlenstoff ab, Terebinsäure liefert

diese Verbindung bei entsprechender Behandlung sehr viel langsamer.

Sehr interressante Resultate haben Versuche ergeben, welche ich z. Th. in Gemeinschaft von Hn. Tuttle, über das Verhalten der Oxime cyclischer Ketone angestellt habe. Diese Oxime scheinen sich durchweg in isomere Formen umwandeln zu lassen, wenn man sie zunächst mit Phosphorpentachlorid und dann mit Wasser behandelt.

Das bei 59° schmelzende Menthonoxim, $C_{10}H_{18}NOH$, wurde auf diese Weise in eine isomere, bei 121° schmelzende und bei 295° siedende Substanz übergeführt. Das erst beschriebene, bei 105° schmelzende Oxim $C_{10}H_{18}NOH$ geht in eine niedriger — bei 51—52° — schmelzende Verbindung über, die sich ihrerseits wieder in eine dritte isomere Substanz vom Smp. 102° verwandeln läßt. Ob diese neuen isomeren Oxime im Verhältniß stereoisomerer Substanzen zu den Ausgangsverbindungen stehen, oder ob eine tiefer greifende Atomverschiebung eintritt, ist noch nicht entschieden. In Säuren lösen sich die neuen Oxime leicht auf, regeneriren dabei aber nicht die Ketone.

Für die Entscheidung von Constitutionsfragen innerhalb der Gruppe der cyclischen Verbindungen ist ferner die Beobachtung von besonderer Wichtigkeit, daß sich die cyclischen Oxime unter Aufspaltung des Kohlenstoffringes in ungesättigte Nitrile verwandeln lassen, wenn man sie mit energisch Wasser entziehenden Mitteln behandelt. Eine solche Reaction ist bisher nur beim Fenchonoxim und Campheroxim beobachtet worden. Jetzt ist sie verallgemeinert.

Aus Menthonoxim z. B. entsteht leicht ein Nitril $C_9H_{17}.CN$, das bei 222—224° siedet und sich durch einen intensiven Citronengeruch auszeichnet. Die Verbindung ist ungesättigt, addirt Brom, Hologenwasserstoff u. s. w. Durch Zufuhr von Wasserstoff geht sie in ein aliphatisches Menthylamin, $C_{10}H_{19}NH_2$ über vom Siedepunkt 210—215°. Diese Base unterscheidet sich wesentlich von dem bekannten Menthylamin. Ihre Acetyl-Verbindung ist flüssig. Es fehlt ihr die Neigung durch Kohlensäure-Anziehung zu erstarren. Mit Salpetriger Säure giebt sie einen Alkohol, dessen Eigenschaften sehr an das Linalool erinnern.

Beim Kochen des Nitrils $C_9H_{17}.CN$ mit alkoholischer Kalilauge entweicht Ammoniak und es entsteht eine Säure, welche ein in Wasser sehr schwer lösliches Silbersalz liefert.

Die verschiedenen von mir in letzter Zeit erhaltenen, mit Campher isomeren Verbindungen lassen sich jetzt in vier große Gruppen eintheilen. Die erste Gruppe umfaßt den Campher und

das Fenchon. Beides sind gesättigte Ketone von eigenartigem Character und durchaus ähnlichen Eigenschaften. Für die bestehende Analogie ist letzthin durch eine Arbeit, welche Hr. Holste auf meine Veranlassung ausführt, noch ein weiterer Beleg beigebracht worden. Fenchon läßt sich bei der Behandlung mit Natrium und Kohlensäure nämlich in eine bei 142° schmelzende „Fenchocarbonsäure“ überführen und reagirt auch, wie Campher, mit Alkylnitriten und Estern der Ameisensäure.

In ihrem Verhalten stehen dem Campher die beiden auch natürlich vorkommenden Ketone, das Thujon und Pulegon ferner. Zur zweiten Gruppe der mit dem Campher isomeren Verbindungen kann man die ungesättigten Ketone rechnen, als deren Repräsentanten ich neulich das „Bihydrocarvon“ kennen gelehrt habe.

Eine dritte Gruppe bilden die ungesättigten Alkohole, $C_{10}H_{15}OH$. Eine Verbindung von diesem Typus ist vorstehend beschrieben worden.

Zu einer vierten Gruppe gehören Oxyde der Formel $C_{10}H_{16}O$. Unter diese hat man bis jetzt das Pinol und das gleichfalls vorstehend neu beschriebene isomere, aus Hydrocarveol gewonnene, Oxyd einzureihen.

Die Methoden, nach denen die neuen Sauerstoff- und Stickstoffhaltigen Verbindungen der Campherreihe gewonnen wurden, lassen sich verallgemeinern und sie werden für Constitutionsbestimmungen gute Dienste leisten können. Auf die theoretische Bedeutung der mitgetheilten Versuche wird in einer Fachzeitschrift näher eingegangen werden.

Beobachtungen über die Festigkeit bei homogener Deformation.

Von

W. Voigt.

Nachdem verschiedene Beobachtungen [1]) sehr wahrscheinlich gemacht haben, daß sich die Bedingungen der Festigkeit für ungleichförmig deformirte Körper nicht ohne Weiteres aus denen für gleichförmig deformirte ableiten lassen, erscheint es doppelt nothwendig, um die Verhältnisse einfach und übersichtlich zu machen, die Beobachtungen zunächst auf gleichförmig deformirte Körper zu beschränken. Erst wenn hier die Verhältnisse vollkommen aufgeklärt sind, kann die Untersuchung der complicirteren Fälle mit Aussicht auf Erfolg in Angriff genommen werden. Einen Beitrag zur Kenntniß der Gesetze der Festigkeit in dem fundamentalen Fall gleichförmiger Deformation sucht die folgende Mittheilung zu liefern.

Die allgemeinste gleichförmige Dilatation können wir einem rechteckigen isotropen Prisma ertheilen, wenn wir auf seine Flächenpaare f_x, f_y, f_z beliebige constante normale Drucke X_x, Y_y, Z_z ausüben. Die entstehenden Deformationsgrößen sind dann

$$\begin{aligned} -x_x &= s\,X_x + s_1 Y_y + s_1 Z_z, \\ -y_y &= s_1 X_x + s\,Y_y + s_1 Z_z, \\ -z_z &= s_1 X_x + s_1 Y_y + s\,Z_z, \\ -y_z &= -z_x = -x_y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

worin s und s_1 die beiden Elasticitätsmoduln der Längs- und Querdilatation bei einseitigem Druck darstellen.

Das Maximum der linearen Dilatation oder der Spannung findet dabei stets der einen Prismenkante parallel statt.

Die bisherigen Beobachtungen über die Festigkeit gleichförmig dilatirter Körper beziehen sich meines Wissens ausschließlich auf die beiden Fälle, daß auf ein Flächenpaar (f_x z. B.) entweder ein Zug oder ein Druck ausgeübt wird, die andern Flächenpaare aber

1) S. z. B. A. Sella und W. Voigt, Gött. Nachr. No. 14, 1892 die Vergleichung der Zug- und Biegungsfestigkeit für Steinsalz.

frei sind. Im ersten Falle zerfällt dann das Prisma durch die Wirkung der Längsdilatation nach einer Ebene normal zur Zugrichtung, im zweiten entweder durch die Wirkung der Querdilatation nach einer Ebene durch die Druckrichtung, oder durch die Wirkung der Abschiebung eines Theils des Prismas längs einer um 45° gegen die Druckrichtung geneigten Ebene. Der letzte Fall, der sich äußerlich schon von den beiden früheren sondert, und bei welchem allem Anschein nach ganz andere Umstände wirken, mag hier außer Betracht bleiben. Wir erhalten dann für die beiden ersten, wenn P resp. D die parallel X wirkende einseitige Zug- resp. Druckkraft bezeichnet, die maßgebenden Formeln

$$2)\qquad \begin{aligned} x_x &= sP, \quad -y_y = -z_z = s_1 P \\ y_y &= z_z = s_1 D, \quad -x_x = sD. \end{aligned}$$

Als Bedingung für die Trennung des Zusammenhanges hat nach der Anregung von Michon, wie es scheint, zuerst Saint-Venant[1]) das Vorhandensein eines bestimmten Grenzwerthes der lineären Dilatation consequent verwendet; die Ansicht, daß für jede Substanz eine solche characteristische Grenzdilatation existire, findet sich indeß schon viel früher, so bei W. Weber, bei F. Neumann und Anderen.

Dieser Anschauung steht gegenüber eine von Clebsch[2]) vertretene, daß der Eintritt einer gewissen der Substanz individuellen Grenzspannung die Bedingung für die Trennung ausmache; und zwar soll nach Clebsch diese Grenzspannung ebensowohl ein Zug, als ein Druck sein und beliebig gegen die Trennungsfläche liegen können.

Man wird sich mit der Clebsch'schen Annahme schwer befreunden können; auch wenn man von den Beobachtungsresultaten, welche die Druckfestigkeit viel größer, als die Zugfestigkeit ergeben haben, ganz absieht, wird man kaum zugeben, daß durch einen allseitig gleichen Druck die Zertrümmerung eines Körpers herbeigeführt werden kann, wie jene Hypothese verlangt.

Aber auch die andere Anschauung bietet principielle Schwierigkeiten; denn wenn man wirklich nur die Dilatationen ohne Rücksicht auf die sie begleitenden Kräfte maßgebend sein läßt, so ist nicht einzusehen, warum ein Körper nicht auch durch gleichförmige Erwärmung bis zur Erreichung jener Grenzdilatation

1) Navier, Résistance des corps solides, herausgegeben von Saint-Venant, Paris 1864, T. I, p. 6; Saint-Venant, Sav. étr. B. XIV, p. 233, 1856 u. a. a. O.
2) A. Clebsch, Elasticität, Leipzig 1862, p. 138.

— was eine Temperatur erfordert, die oft erheblich unter dem Schmelzpunkt der Substanz liegt — zertrümmert werden soll.

Diese Ueberlegung macht wahrscheinlich, daß, wenn auch nicht die Maximalspannung, so doch irgend eine Function sämmtlicher Hauptspannungen durch Erreichung eines Grenzwerthes die Bedingung für den eintretenden Zerfall liefert, und da die Hauptspannung senkrecht zur Trennungsfläche offenbar eine ausgezeichnete Stellung einnimmt, die beiden ihr parallelen aber bei einem isotropen Körper gleichwerthig sind, so stellt für eine Zerreissungsebene senkrecht zur X-Axe die Formel

$$-K = \overline{X}_x - \alpha(\overline{Y}_y + \overline{Z}_z), \tag{3)}$$

die denkbar einfachste Verallgemeinerung des Clebsch'schen Ansatzes dar.

Wird das Prisma nur durch Längsdilatation zerrissen, so ist $\overline{X}_x = -\overline{P}_0$, $Y_y = Z_z = 0$ also

$$K = \overline{P}_0; \tag{3')}$$

wird es nur durch seitlichen Druck zerpreßt, so ist $\overline{Y}_y = +\overline{D}_0$, $X_x = Z_z = 0$, also

$$K = \alpha\overline{D}_0; \tag{3'')}$$

die Beobachtung von $\overline{P}_0$ und $\overline{D}_0$ würde also zur Berechnung von K und α, nicht aber zur Prüfung des Ansatzes ausreichen.

Bei allseitig gleichem Druck ist

$$X_x = Y_y = Z_z = p$$

also

$$K = (2\alpha - 1)\overline{p}$$

und es genügt, um die Zertrümmerung durch diese Einwirkung unmöglich zu machen, daß

$$(2\alpha - 1) < 0$$

wird.

Die vorliegenden Beobachtungen für Zug- und Druckfestigkeit scheinen für α einen ächten Bruch $< \frac{1}{2}$ zu ergeben und würden so noch mit dem gemachten Ansatz vereinbar sein.

Das allgemeinste Verfahren, um ein Prisma in verschiedener Weise gleichförmig zu deformiren, welches mir practisch ausführbar scheint, ist seine einseitige Dehnung oder Compression innerhalb

eines Piezometers d. h. eines mit hochgespanntem Gase erfüllten Raumes. Allerdings sind hier zwei Hauptdrucke stets gleich groß und stets negativ, aber dennoch bietet eine solche Anordnung hinreichende Mannigfaltigkeit, um neue Aufschlüsse zu gewähren.

Für gleichzeitigen Längszug P und seitlichen Druck D würde z. B.

$$x_s = sP - 2s_1 D, \qquad X_s = -P,$$
$$K = P + 2\alpha D$$

werden, und durch Veränderung von D würde sich prüfen lassen, ob im Moment des Zerreißens die Längsdilatation x_s, die Längsspannung X_s oder aber die Function $P + 2\alpha D$ mit constantem α einen bestimmten, der Substanz individuellen Werth annimmt. Damit das mit 2α multiplicirte Glied neben P, dessen Werth für $D = 0$ mit P_0 bezeichnet ist, einen bei der immerhin großen Unsicherheit der Beobachtungen deutlich merklichen Einfluß gewinnt, muß D möglichst groß, P_0 möglichst klein gemacht, also eine Substanz von möglichst geringer Zugfestigkeit in einem Raum von möglichst hohem Gasdruck beobachtet werden.

Zu den am wenigsten dem einseitigen Zug gegenüber festen Körpern gehört Steinsalz, und zwar besonders in Stäben, deren sämmtliche Flächen Würfelebenen parallel liegen; für solche ist $P_0 = 570$ Gramm pro Quadratmillimeter, und es bietet weder die krystallographische Symmetrie, noch die Spaltbarkeit ein Hinderniß für die Anwendung der obigen, zunächst für isotrope Körper gegebenen Entwickelungen.

Da eine Atmosphäre Druck nach neuerem Gebrauch gerade 10 Gramm pro Quadratmillimeter liefert, so wäre es schon bei dieser sehr geringen Zugfestigkeit erwünscht, um dem Glied $2\alpha D$ neben P beträchtlichen Einfluß zu geben, D bis auf 50 bis 60 Atmosphären steigern zu können.

Um die bei so hohen Drucken nothwendig auftretenden technischen Schwierigkeiten zu beseitigen, war die Anwendung besonderer Kunstgriffe erforderlich. Der wichtigste war der, daß ich, um die bei 50—60 Atm. äußerst schwierige vollständige Dichtung des Apparates überflüssig zu machen, den Druck durch die Entwickelung von Kohlensäure aus einer mit dem Piezometer verbundenen sogenannten „Bombe“ mit flüssiger Kohlensäure bewirkte. Hierdurch war nebenbei der Vortheil erreicht, daß die Drucksteigerung von 1 bis 60 Atm. überaus schnell stattfinden konnte, und das war aus mehreren Gründen ein großer Vortheil.

Die übrigen Vorsichtsmaßregeln kommen am besten bei der

systematischen Beschreibung der angewandten Apparate zur Sprache, zu welcher ich mich jetzt wende.

Der Apparat zur Hervorbringung und Messung der Grenzspannung, welchen Herr Bartels in Göttingen nach meiner Angabe ausgeführt hat, ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

Das zu zerreißende Stäbchen *s*, welches die früher beschriebene, in der Mitte ein wenig hohl geschliffene Form besitzt, ist mit seinen prismatischen Endstücken in die Fassungen f_1 und f_2 eingekittet. f_1 liegt mit der in die Axe des Stäbchens fallenden Spitze t_1 auf einem stählernen Bügel *b* auf, der sich beiderseits auf die beiden starken Träger *TT* stützt. Auf der Spitze t_2 ruht ein stählerner Haken *h*, an dem die spannende Kraft angreift; das Stäbchen ist in diesem Zustande einer möglichst gleichförmig über den Querschnitt vertheilten Spannung ausgesetzt.

Die Zugkraft liefert die Feder *F*, die mit dem obern Ende an dem Haken *h*, mit dem unteren an dem Stahlcylinder *C* befestigt ist und durch Herunterziehen des letzteren gespannt werden kann. Um die Feder durch die Erschütterung, welche beim Zerreißen des Stäbchens *s* und beim Zurückschnellen des Hakens *h* eintritt, möglichst wenig zu schwächen, ist eine Vorrichtung angebracht, um sie sogleich im Beginn der Bewegung aufzufangen. Der untere Theil des Hakens *h* (s. Fig. 2) ist durchbohrt und durch die Oeffnung *o* der Stahldraht *gg* hindurchgeführt, sodaß der Haken *h* nach dem Zerreißen des Stäbchens einen Weg von nur wenigen Millimetern frei zurücklegen kann. Die Einrichtung hat sich sehr bewährt, denn die Feder erwies sich am Ende der bisher angestellten ausgedehnten Versuchsreihe merklich ebenso stark, wie am Anfang.

Um die im Moment des Zerreißens vorhandene größte Spannung der Feder ablesen zu können, ist an dem Haken *h* außer der Feder *F* noch das Messingrohr *RR* angebracht, welches mit seinem unteren aufgeschnittenen Theile den Cylinder *C*, der mit dem untern Ende der Feder verbunden ist, umschließt. Sein Ende ist durch die aufgeschraubte Hülse *H*, welche eine Oeffnung, nur wenig größer, als der Querschnitt des Cylinders *C*, besitzt, geschlossen. Auf dem Cylinder, der eine Millimetertheilung trägt, gleitet mit sehr geringer Reibung der aufgeschnittene Messingring *r*.

Wird die Feder durch Herabziehen von *C* gespannt, so verschiebt die Hülse *H* den Ring *r*, und die Stellung seines oberen Randes gestattet, in jedem Moment den Grad der Federspannung zu bestimmen, wenn die Theilung ein für alle Mal graduirt ist.

Reißt das Stäbchen, so schnellt der Haken *h*, und damit das

Rohr *R* und die Hülse *H*, einige Millimeter zurück; der Ring *r* aber, der auf dem stillstehenden Cylinder *C* sitzt, wird von der Bewegung nicht erfaßt und giebt durch seine Stellung ganz zuverlässig die Federspannung im Moment des Zerreißens an.

Der ganze, in Figur 1 dargestellte Apparat soll nun in einem mit hochgespanntem Gas erfüllten Raum zur Wirkung gelangen. Diesen bietet der in Figur 3 in kleinerem Maaßstabe gleichfalls schematisch [1]) dargestellte Recipient dar.

Eine sehr starkwandige hohe Glocke *GG* von Rothguß, deren lichte Weite am unteren Ende etwa 50 mm beträgt, nach oben aber abnimmt, ruht mit dem am obern Ende angegossenen Ringe *DD* auf einem an der Wand des Beobachtungsraumes angebrachten Stativ und hängt mit dem unteren Ende frei herab. Mit ihrem Inneren communicirt ein Hahn *O*, welcher die Verbindung nach oben (*M*) mit dem bis auf 100 Atmosphären graduirten Federmanometer, nach links (*L*) mit der freien Luft, nach rechts (*N*) mit der Kohlensäureflasche ermöglicht.

In das Innere der Glocke *GG* läßt sich von unten her in aufrechter Stellung der Zerreißungsapparat (Fig. 1) einschieben; seine stählerne Bodenplatte *BB* verschließt dann die Oeffnung von *GG* und läßt sich durch sechs sehr starke stählerne Schrauben, von denen, um die Figur nicht zu überladen, nur eine (*SS*) gezeichnet ist, gegen den Rand der Glocke pressen. Die auf den Schrauben sitzenden Muttern wirken gegen den an die Glocke angegossenen zweiten Ring *AA*; die Dichtung wird durch eine eingelegte Scheibe von rothem Hartgummi bewirkt. Damit die Bodenplatte bei dem über 5000 kg betragenden Druck nicht nachgiebt, müssen die Schrauben *SS* mittelst eines Schlüssels ziemlich fest angezogen werden. Diese Theile sind von Herrn E. Th. Foerster in Berlin sehr zweckentsprechend angefertigt.

Um nun, während der Zerreißungsapparat sich in der Glocke befindet, die Feder *F* von außen spannen zu können, tritt der Cylinder *C* durch die Bodenplatte *BB* heraus und ist hier mit einer starken doppelgängigen Schraube *EE* verbunden. Ein auf ihr befestigter Schlitten *K*, welcher auf den Säulen *JJ* gleitet, verhindert, daß Schraube und Cylinder sich drehen lassen; in Folge dessen kann man durch Drehen einer auf der Schraube *EE* gehenden Mutter Schraube und Cylinder verschieben und so die Spannung der Feder verändern.

---

1) Bei der Construction der Figuren ist mehr Werth darauf gelegt, daß jeder Theil deutlich zu erkennen ist, als daß er in richtiger Gestalt und Größe erscheint.

Zum Drehen dieser Mutter ist wegen des starken Druckes in der Glocke und der großen Reibung in der Stopfbüchse, durch welche C geht, eine beträchtliche Kraft nöthig, und dieser Umstand verlangte eine besondere Construction der Mutter.

Der das Gewinde enthaltende Theil ist PP_1; derselbe befindet sich innerhalb des Ringes UU, weil, je nachdem eine Herein- oder Herausbewegung bezweckt wird, die Mutter nach der einen oder andern Seite einen Widerhalt finden muß. Die Scheibe P_1 enthält sechs Löcher, und in sie greifen sechs Stahlstifte, welche auf der untern Seite der P_1 gleichen Scheibe Q_1 angebracht sind; einer Drehung von Q_1 mit Hülfe der Griffe QQ folgt somit auch die Mutter. Der Ring UU verbietet, diese Bewegung weiter als über 120° auszuführen, hier wird sie durch einen Anschlag begrenzt; indem aber mittelst der Handgriffe QQ die Zapfen aus der Scheibe P_1 herausgehoben und nach einer Rückwärtsdrehung von Q um 120° wieder eingesetzt werden, kann man die Drehung, wenngleich mit kurzen Unterbrechungen, stetig weiterführen. Durch etwa 10 Drittel-Drehungen kann man allmählich und ohne Erschütterungen die Federspannung um etwa 2,5 kg steigern oder vermindern.

Der Gang der Beobachtung ist durch die beschriebene Einrichtung des Apparates vorgezeichnet.

Das in die Fassungen eingekittete Stäbchen (s. Fig. 1) wird auf dem Bügel b aufgehängt und der Bügel auf die Träger TT gelegt, während zugleich der Haken h in die untere Fassung greift. Nun wird die Feder leicht gespannt, sodaß alle Theile fest zusammenhängen und bei der Bewegung kein Abgleiten stattfinden kann. Sodann wird der Zerreißungsapparat in den Recipienten eingeführt, dieser geschlossen und der Druck gesteigert, darauf die Feder durch Drehung der Mutter P (s. Fig. 3) immer stärker gespannt, bis das Stäbchen reißt, was von außen durch den schwirrenden Ton der zurückschnellenden Feder gut wahrzunehmen ist. Hierauf wird sogleich die Feder durch Rückwärtsdrehen der Mutter P wieder entspannt, um sie nicht unnöthig anzustrengen, sodann die Verbindung mit der Bombe unterbrochen und die mit der Luft hergestellt, der Zerreißungsapparat aus dem Recipienten genommen und die Ablesung gemacht. Vom Abspannen der Feder bis zum Zerreißen des Stäbchens verfließt nur der Bruchtheil einer Minute und die ganze Beobachtung ist so bequem und sicher, daß anscheinend nichts zu wünschen bleibt.

Die zuerst beobachtete Substanz war Steinsalz, und zwar in Stäben, deren Flächen sämmtlich Würfelflächen parallel lagen. Nach der trefflichen Uebereinstimmung, welche diese Präparate

bei den früheren Zerreißungsversuchen geliefert hatten[1]), glaubte ich auf sehr sichere Resultate rechnen zu können.

Die Präparate, wie früher von Herrn Dr. W. Steeg und Reuter in Homburg gearbeitet, waren der bequemeren Herstellung wegen kürzer und weniger hohlgeschliffen, als bei den früheren Versuchen, rissen aber trotzdem fast immer sehr nahe an der dünnsten Stelle. Um sie vor der Wirkung des anscheinend mit der Kohlensäure aus der Bombe in den Recipienten einströmenden Wasserdampfes zu schützen, wurde die freie Partie mit einem Staniolstreifen dicht umwickelt. Aber trotz aller Vorsicht ließ sich die frühere Uebereinstimmung der Resultate, sowohl, wenn der Zerreißungsapparat in Luft bei Atmosphärendruck, als im Recipienten benutzt wurde, längst nicht erreichen. Eine zweite Serie von Stäben gab noch mehr wechselnde Resultate, aber zugleich auch Aufschluß wenigstens über eine der Ursachen der Abweichungen.

Die Präparate zeigten zum Theil im polarisirten Lichte deutliche Doppelbrechung, theils in Schichten, welche sie parallel mit Granatoërderflächen ganz durchsetzten, theils in unbestimmten Bereichen, welche sich längs der hohlgeschliffenen Flächen erstreckten. Erstere mochten von dem etwas gestörten Material, letztere, die anscheinend beim Zerreißen verschwanden, von Druck und Erwärmung bei der Bearbeitung herrühren. Alle Präparate aber, bei denen diese, namentlich aber die letztere Art von Störungen in erheblicher Stärke sichtbar waren, gaben eine ganz auffallend große Tragfähigkeit und zeigten fast ausnahmslos völlig oder theilweis matte Spaltungsflächen. Daß die Tragfähigkeit durch diese Störungen vergrößert wird, ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, daß die benutzte Orientirung der Präparate der geringsten Zugfestigkeit entspricht.

Herr Reuter hat auf meine Bitte eine dritte Serie dieser Präparate aus bestem Material und mit größter Vorsicht angefertigt, welche im Polarisationsapparat nur geringe Störungen zeigten. Dieselben haben erheblich bessere Resultate, nämlich nach der Seite zu großer, wie zu kleiner Zugfestigkeiten geringere Abweichungen ergeben, aber immer noch nicht die frühere Uebereinstimmung geliefert. Es bleibt die Möglichkeit, daß die geringe Länge der Präparate hier von Einfluß gewesen ist, in Folge deren sich vielleicht von den befestigten Enden her bis zur Zerreißungsstelle die Ausgleichung der Spannungen über den Querschnitt nicht genügend vollzogen hatte. Daß die von der früheren ab-

1) A. Sella und W. Voigt, Gött. Nachr. No. 14, p. 501, 1892.

weichende Methode, die Zugkraft hervorzubringen, einen Einfluß geübt hätte, ist nicht wohl denkbar, da die Spannung der Feder durchaus ruhig und gleichmäßig geschah.

Immerhin ist durch die große Anzahl der angestellten Beobachtungen trotz ihrer Abweichungen ein Resultat vollständig sicher gestellt, welches von fundamentaler Bedeutung ist:

Bei dem gleichförmig dilatirten Prisma ist weder der Betrag der Dilatation, noch der Spannung normal zur Trennungsfläche für das Zerreißen maßgebend.

Zur Begründung dieser Behauptung verweise ich auf die folgenden Beobachtungsresultate. Die Zusammenstellung enthält für jedes Stäbchen den Querschnitt Q, die Spannung S der Feder in Grammen, bei welcher das Zerreißen eintrat, den hiervon auf den Quadratmillimeter des Querschnitts kommenden Betrag S/Q, endlich den am Manometer abgelesenen Gas-Ueberdruck D ebenfalls in Grammen pro Quadratmillimeter.

I. Beobachtungen in Luft.

No.	Q	S	S/Q	D
1)	7,81	5740	740	0
2)	7,67	3450	450	0
3)	7,53	4930	660	0
4)	8,21	3600	440	0
5)	8,00	3370	420	0
6)	7,74	3470	450	0
7)	7,39	4120	560	0
8)	7,32	3590	490	0
9)	7,30	3800	520	0
10)	7,40	4830	650	0
11)	7,45	4680	630	0
12)	7,07	5490	770	0
13)	7,09	5190	730	0

Mittelwerth S/Q = 578 ± 36 bei D = 0.

Der Zahlwerth stimmt befriedigend mit dem von A. Sella und mir vor einem Jahre mitgetheilten[1]).

1) l. c. p. 501.

II. Beobachtungen im Recipienten.

No.	Q	S	S/Q	D
1)	8,23	5540	670	316
2)	7,55	3120	420	486
3)	7,85	5640	720	532
4)	8,26	3340	410	548
5)	8,11	3670	450	539
6)	8,27	3400	410	530
7)	7,66	5970	780	539
8)	7,70	5570	720	530
9)	7,81	5170	660	549
10)	7,06	3420	480	502
11)	7,16	4310	600	514
12)	7,66	4320	560	492
13)	7,56	3750	500	520
14)	7,48	4340	580	508
15)	7,45	4150	560	569
16)	6,88	3550	520	530
17)	7,00	3670	530	560
18)	7,25	3450	480	543
19)	7,07	4300	610	539
20)	7,33	3250	440	521
21)	7,27	3570	490	511
22)	7,20	5650	780	550

Mittelwerth $S/Q = \mathbf{562} \pm 18$ bei $D = \mathbf{519}$.

Ausgeschlossen sind von der Zusammenstellung der Resultate nur 2 (auf die 13 der I. Reihe) resp. 3 (auf die 22 der II. Reihe), welche mit Stäbchen erhalten waren, die jene oben erwähnten Störungen am grellsten zeigten, während angenommen wurde, daß die minder gestörten in ihrer Einwirkung auf das Endresultat durch die hier und da vorhandenen kleinen Scharten und Einschlüsse, die eine Schwächung der Präparate veranlassen mußten, compensirt würden. Sie ergaben S/Q resp. gleich 890, 850, 910, 890, 890, hätten also die absoluten Werthe obiger Mittel nur sehr wenig, die relativen gar nicht geändert.

Aus den obigen Zahlen folgt, da bei den Beobachtungen im Recipienten der Zug der Feder, vermindert um den Druck des Gases, die Spannung im Innern des Stäbchens bestimmt, als Werth der Grenzspannung

$$\text{in Luft } \bar{p} = 580$$
$$\text{im Recipienten } \bar{p} = 40.$$

Was die Längsdilatation betrifft, so giebt hier Formel (1)

$$x_s = s\left(\frac{S}{Q} - D\right) - 2 s_1 D,$$

also, da bei Steinsalz sehr nahe $s_1 = -\frac{1}{4} s$ ist,

$$x_s = s\left(\frac{S}{Q} - \frac{D}{2}\right).$$

Setzt man $\bar{x}_s/s = \bar{l}$, so wird

in Luft $\bar{l} = 580$,
im Recipienten $\bar{l} = 300$.

Es ist also bei den beiden Beobachtungen sowohl die Grenzspannung, als die Grenzdilatation so stark verschieden, daß weder die eine noch die andere für den Moment des Zerreißens characteristisch sein kann.

Die enormen Differenzen durch Fehlerquellen zu erklären, kann als ganz unmöglich bezeichnet werden.

Die Stahlfeder F, durch welche die Spannung hervorgebracht und gemessen wird, erleidet durch den allseitigen Druck eine minimale Verkleinerung; fast die gleiche aber auch der Maßstab, und sonach bleibt dieser Umstand unwirksam.

Die Elasticität der Feder ändert sich durch den Druck nicht, da bei Stahl bis zu viel höheren Inanspruchnahmen hin die Deformationen lineäre Functionen der Kräfte sind, verschiedene Systeme von Kräften sich also einfach superponiren.

An eine directe Einwirkung der Kohlensäure auf die Festigkeit des Steinsalzes darf wohl nicht gedacht werden; die ganze Beobachtung dauerte wenige Minuten, und schließlich war die Politur der Steinsalzpräparate so vollkommen, als zuvor.

Das obige negative Resultat scheint mir sonach durch die Beobachtungen unwiderleglich festgestellt zu sein; ein positives zu erschließen, reichen die Zahlen noch nicht aus, einmal ihrer kleinen Anzahl, und sodann ihrer geringen Genauigkeit wegen.

Ich will aber doch hervorheben, daß die merkwürdige Thatsache, daß im Recipienten, wie in der Luft, die gleiche Federspannung S/Q pro Quadratmillimeter Querschnitt ausreichte, um das Zerreißen zu bewirken, auch wenn sie sich bei andern Substanzen bestätigen sollte, doch kein allgemeines Kriterium für den Eintritt des Zerreißens an die Hand giebt. Es

würde daraus zwar für alle Fälle, wo die Querdrucke Y_y und Z_z unter einander gleich sind, gefolgert werden dürfen, daß

$$C = -\overline{X}_x + \overline{Y}_y$$

die Bedingung für die Trennung darstellt, aber für den Fall, daß Y_y und Z_z verschieden sind, würde man nichts daraus schließen können.

Die Einführung der Zerreißungsbedingung (3)

$$K = -\overline{X}_x + \alpha(\overline{Y}_y + \overline{Z}_z)$$

würde mit den obigen Werthen nahezu

$$K = 580, \qquad \alpha = 0{,}5$$

ergeben, woraus nach dem S. 523 Gesagten zu schließen wäre, daß durch allseitig gleichen Zug Steinsalz nur sehr schwer zu zerreißen ist.

Die Richtigkeit jenes, nach Widerlegung der gebräuchlichen, denkbar einfachsten allgemeineren Kriteriums würde sich prüfen lassen, wenn es gelänge, ein Steinsalzprisma von der benutzten Orientirung durch einseitigen gleichförmigen Druck $D_0 \parallel Y$ so zu zertrümmern, daß die Bruchfläche normal zur X-Axe liegt. Dann nimmt jenes Kriterium die Form (3″)

$$K = \alpha D_0$$

an. Die von mir in dieser Richtung angestellten Versuche haben nicht zum Ziele geführt, weil das Steinsalz, welches, wie directe Messungen der Querschnitte der zerrissenen Stäbchen gezeigt haben, einer reinen Zugkraft gegenüber nicht merklich plastisch ist, diese Eigenschaft einem Druck gegenüber in sehr hohem Maaße besitzt[1]).

Bei diesen Beobachtungen war die Hauptschwierigkeit, den ausgeübten rein normalen Druck gleichförmig über den Querschnitt zu vertheilen. Die Armirung der Endflächen eines gepreßten, kurzen Prismas mit Bleiplatten erwies sich als gänzlich unbrauchbar; die ersten Sprünge traten bei sehr kleinen Drucken auf, und die schließliche Gestalt des Präparates zeigte deutlich, daß die Bleiarmirung die Querdilatation der letzten Querschnitte sehr beinträchtigt hatte.

Ich habe deshalb versucht, bei dem Zerdrücken das analoge Princip anzuwenden, wie beim Zerreißen, nämlich durch Benutzung längerer, in der Mitte hohl geschliffener Stäbe zu bewirken, daß

1) F. Auerbach, Wied. Ann. Bd. 45, p. 289, 1892.

an der schwächsten Stelle, wo das Zerreißen beginnt, die Drucke in Folge der beträchtlichen Entfernung von den Befestigungsstellen sich gleichmäßig über den Querschnitt vertheilen. Hierbei waren eigene Kunstgriffe anzuwenden, um ein Zerknicken der Stäbe durch eintretende Biegungen zu vermeiden, die aber, wie es scheint, ihren Zweck erfüllt haben. Ich werde über dieselben später berichten, wenn Beobachtungen mit günstigerem Materiale vorliegen. Hier sei nur bemerkt, daß die Steinsalzstäbe auf der von den Fassungen freien Partie bei einseitigem Druck sich ganz außerordentlich — wohl bis auf $^5/_4$ der ursprünglichen Querdimensionen — dauernd verdickten, bevor der erste Längssprung auftrat. Die Beobachtung im polarisirten Lichte zeigte das ursprünglich ganz homogene Präparat schließlich von unzähligen stark doppelbrechenden feinen Schichten parallel Granatoëderflächen durchsetzt, welche offenbar durch Schiebungen längs dieser Flächen entstanden waren. Die Substanz war sonach ganz verändert, und die Belastung, bei welcher der erste feine Längssprung — überdies noch nahe an der einen Fassung — auftrat, konnte daher nicht mit den obigen Beobachtungen zu theoretischen Schlüssen combinirt werden.

Diese störende Eigenschaft des Steinsalzes macht das Material zu weiteren entscheidenden Beobachtungen unbrauchbar, und ich bin mit Vorarbeiten beschäftigt, ein besseres zu gewinnen. Nach dem S. 524 Gesagten ist es keineswegs leicht, ein völlig brauchbares zu gewinnen, da seine Zerreißungsfestigkeit eine ziemlich kleine Größe nicht überschreiten darf; eben deshalb ist es nicht abzusehen, bis zu welchem Termin Beobachtungen vorliegen können, welche die obigen entscheidenden negativen Resultate nach der positiven Seite hin ergänzen. So sehe ich mich veranlaßt, Vorstehendes als einen ersten Beitrag zur Lösung der fundamentalen Frage nach den Bedingungen der Festigkeit einer homogen deformirten Substanz schon jetzt zu veröffentlichen.

Göttingen, Juni 1893.

Ueber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität.

Von

W. Voigt.

Die Grundformeln der Elasticität sind bekanntlich unter der Voraussetzung unendlich kleiner Deformationen abgeleitet, und es bleibt in jedem einzelnen Falle ihrer Anwendung die Beobachtung darüber zu befragen, bis zu welchem endlichen Betrag man ihre Größe steigern darf, ohne mit den Resultaten jener Annahme in merklichen Widerspruch zu gerathen. Dementsprechend habe ich bei verschiedenen meiner Bestimmungen der Elasticitätsconstanten von Krystallen geprüft, ob innerhalb der benutzten Grenzen die Proportionalität zwischen den ausgeübten Kräften und den hervorgerufenen Deformationen, welche die alte Theorie fordert, auch wirklich stattfindet. Bei Steinsalz sind diese Untersuchungen bis zu der Festigkeitsgrenze ausgedehnt worden und haben ein positives Resultat ergeben; bei andern innerhalb geringerer Grenzen aber mit demselben Erfolg. Auch bei der Bestimmung der Elasticitätsconstanten, von Metallen durch Schwingungsbeobachtungen sind die Amplituden variirt worden, ohne daß sich die Resultate dadurch änderten. Nachdem aber durch neuere Beobachtungen[1]) gezeigt ist, daß man unter Umständen, wo man früher die Gültigkeit der alten Formeln für selbstverständlich hielt, bereits erhebliche Abweichungen von der Proportionalität zwischen den ausgeübten Kräften und den hervorgerufenen Deformationen findet, scheint es angemessen, die Erweiterungen zu untersuchen, welche die ältere Theorie erfahren muß, um mit jenen Resultaten in Einklang zu kommen. Ich will mich im Folgenden stets auf das niedrigste der hinzuzufügenden Correctionsglieder beschränken, werde aber darauf hinweisen, in welcher einfachen Weise man die Genauigkeit noch weiter treiben kann.

Die Grundlagen der älteren Theorie sind die beiden Annahmen, daß die elastischen Drucke an einer Stelle x, y, z nur von dem Zustande in unmittelbarer Umgebung des Punktes und zweitens, daß sie von den dort stattfindenden Verrückungen u, v, w resp.

---

1) O. Thompson, Wied. Ann. **44**, p. 555, 1891.

ihren Differentialquotienten linear abhängen. Mit diesen Annahmen sind allgemein für nichtstarre Körper geltende Relationen über die Druckcomponenten $X_x \ldots X_y$ verbunden.

Bezüglich der ersten Annahme wird man sich schwer zu einer Erweiterung entschließen; denn wenn die elastischen Kräfte auf Molekularwirkungen mit unmerklicher Wirkungssphäre beruhen, bietet sich die Vorstellung von selbst, daß nur die unendlich benachbarten Theile auf die Größe der Drucke $X_x \ldots X_y$ einen Einfluß haben. Ein Verlassen dieser Annahme würde zur Folge haben, daß diese Kräfte nicht nur von den sogenannten Deformationsgrößen

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad x_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad 1)$$

abhängen, sondern auch von deren Aenderungen mit dem Ort, und eine solche Erweiterung würde erst dann geboten erscheinen, wenn durch die Beobachtung constatirt wäre, daß zwar homogen deformirte Körper der älteren Theorie folgen, nicht aber inhomogen deformirte. Für eine solche Ansicht liegen aber meines Wissens zwingende Beobachtungen noch nicht vor, und es erscheint daher rationell, die erste Annahme beizubehalten, d. h., die Drucke als Functionen der Deformationsgrößen allein anzusetzen, umsomehr, als eine Erweiterung nach der bezeichneten Richtung die Resultate der Theorie bezüglich der Proportionalität zwischen Drucken und Deformationen nicht ändern würde.

Dann bleiben auch die Formeln bestehen, welche die Druckcomponenten mit dem elastischen Potential F verbinden, nämlich

$$X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \ldots\ldots, \quad X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}. \qquad 2)$$

Die Erweiterung der Theorie kann sonach nur darin bestehen, daß man das Potential nicht als Function zweiten, sondern zweiten und höheren Grades von den Deformationsgrößen ansetzt.

Bezeichnet man abgekürzt

$$x_x + y_y + z_z = \delta, \quad x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) = \vartheta \qquad 3)$$

so ist der Werth des elastischen Potentiales F für einen isotropen Körper nach der älteren Theorie gegeben durch

$$2F = c_1 \delta^2 + c_2 \vartheta, \qquad 4)$$

was darin begründet ist, daß δ und ϑ bei Coordinatentransformationen ihre Gestalt nicht ändern.

Die analoge Eigenschaft müssen nun auch die zur Correction noch hinzugefügten Glieder besitzen. Dasjenige dritter Ordnung läßt sich für isotrope Körper noch sehr leicht durch Rechnung bestimmen, indem man nur solche Ausdrücke dritten Grades auswählt, welche die *YZ*-, die *ZX*- und die *XY*-Ebene als gleichwerthige Symmetriebene haben, und diese nachher zu δ^3 und $\delta . \vartheta$ zusammenfaßt; von den übrig bleibenden Gliedern erkennt man sogleich ohne alle Rechnung, daß sie bei Coordinatentransformationen sich ändern, also verschwindende Factoren haben müssen.

Indessen würde dieses Verfahren bei den Gliedern höherer Ordnung mühselig werden, und es ist daher von großem Nutzen ein Satz, dessen einfachen Beweis ich Herrn Schönflies verdanke, des Inhalts, daß alle Ausdrücke dritten und höheren Grades, welche sich bei Coordinatentransformationen nicht ändern, aus den Aggregaten δ und ϑ gebildet sein müssen. Hierbei ist wesentlich die Bemerkung, daß die sechs Größen

$$x_x, \quad y_y, \quad z_z, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} y_z, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} z_x, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} x_y$$

ein orthogonales System bilden.

Der Beweis läßt sich geometrisch folgendermaßen führen. Seien sechs Variable $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_6$ gegeben, und festgesetzt, daß

$$\delta = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots \alpha_6 \xi_6,$$

worin die α_h Constanten bezeichnen, und

$$\vartheta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots \xi_6^2$$

sich bei orthogonalen Transformationen nicht ändern. Es ist die Frage, welche anderen Functionen der ξ_h sich bei denselben Substitutionen gleichfalls nicht ändern.

Hierzu fassen wir $\xi_1 \ldots \xi_6$ als Coordinaten in einem sechsdimensionalen Raume auf; dann haben die fraglichen Substitutionen die Eigenschaft, eine gewisse lineare Mannigfaltigkeit, die man als Ebene bezeichnen darf, und eine gewisse quadratische Mannigfaltigkeit, die man als Kugel bezeichnen darf, in sich selbst überzuführen. Diese Substitution kann daher nur eine Drehung um eine zu jener Ebene normale Axe darstellen, und die allgemeinsten Gebilde, welche bei dieser Drehung gleichfalls in sich übergehen, sind Rotationskörper um eben dieselbe Axe.

Denken wir ein Coordinatensystem $H_1, H_2 \dots H_6$ eingeführt, dessen Axe H_6 jene Rotationsaxe, so ist

$$\eta_6 = \alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_6 \xi_6,$$

und die allgemeinste Gleichung eines Rotationskörpers um diese Axe lautet:

$$\Phi(\eta_6, (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 + \eta_5^2)) = 0$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\Psi(\eta_6, (\eta_1^2 + \cdots + \eta_6^2)) = 0.$$

Nach Einführung der ursprünglichen Variabeln giebt dies

$$\Psi(\delta, \vartheta) = 0,$$

als die allgemeinste bei der gemachten Substitution unveränderliche Beziehung zwischen den ξ_h, womit die Behauptung bewiesen ist. —

Beschränken wir uns nun weiterhin auf die Glieder dritten Grades, so werden wir setzen können:

$$2F = c_1 \delta^2 + c_2 \vartheta + \frac{2c_1'}{3} \delta^3 + c_2' \delta \vartheta; \tag{5}$$

hieraus folgt aber

$$\begin{aligned}
-X_x &= c_1 \delta + c_2 x_x + c_1' \delta^2 + \frac{c_2'}{2}(\vartheta + 2 x_x \delta) \\
-Y_y &= c_1 \delta + c_2 y_y + c_1' \delta^2 + \frac{c_2'}{2}(\vartheta + 2 y_y \delta) \\
-Z_z &= c_1 \delta + c_2 z_z + c_1' \delta^2 + \frac{c_2'}{2}(\vartheta + 2 z_z \delta) \\
-Y_z &= \frac{c_2}{2} y_z + \frac{c_2'}{2} y_z \delta, \\
-Z_x &= \frac{c_1}{2} z_x + \frac{c_2'}{2} z_x \delta, \\
-X_y &= \frac{c_2}{2} x_y + \frac{c_2'}{2} x_y \delta.
\end{aligned} \tag{6}$$

Dies sind die Grundformeln der erweiterten Theorie; es ist überraschend und wichtig, daß sie nur zwei neue Constanten enthalten. Man kann sie auch schreiben

$$
7)\quad
\begin{aligned}
-X &= (c_1 + c_1'\delta)\delta + (c_2 + c_2'\delta)x_x + \frac{c_2'}{2}\vartheta, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-Y_z &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c_2'\delta)y_z, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Für die Verwerthung dieser Resultate für Probleme des Gleichgewichts sind noch die ganz unabhängig von der Gestalt und Natur der Molekularkräfte gültigen Formeln heranzuziehen:

$$
8)\quad
\begin{aligned}
\varepsilon X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overline{X} + \overline{X}_x \cos(n,x) &+ \overline{X}_y \cos(n,y) + \overline{X}_z \cos(n,z) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Die Form (7) ist ganz besonders zur angenährten Auflösung dieser Formeln nach $x_x \ldots x_y$ geeignet, welche dadurch geschieht, daß man in die mit c_1' und c_2' multiplicirten Glieder diejenigen Werthe der Deformationsgrößen hineinsetzt, welche aus den obigen Formeln folgen, wenn man c_1' und c_2' gleich Null setzt, nämlich

$$
9)\quad
\begin{aligned}
-x_x = s_1\varDelta + s_2 X, \quad -y_z &= 2 s_2 Y_z \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&;
\end{aligned}
$$

hierin bezeichnen s_1 und s_2 die Elasticitätsmoduln, und es ist kurz

$$
10)\quad X_x + Y_y + Z_z = \varDelta
$$

gesetzt. Führt man noch die Abkürzung

$$
10')\quad X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 + 2(Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2) = \Theta
$$

ein, so ist gleichfalls in erster Annährung — was durch den Index $_0$ bezeichnet werden mag —

$$
11)\quad
\begin{aligned}
\delta_0 &= -(3 s_1 + s_2)\varDelta, \\
\vartheta_0 &= s_1(3 s_1 + 2 s_2)\varDelta^2 + s_2^2 \Theta.
\end{aligned}
$$

Nun setze man

$$
12)\quad c_1 + c_1'\delta_0 = \gamma_1, \qquad c_2 + c_2'\delta_0 = \gamma_2
$$

und bezeichne mit σ_1 und σ_2 das, was aus s_1 und s_2 wird, wenn man c_1 und c_2 mit γ_1 und γ_2 vertauscht, so erhält man sogleich:

Fig. 3.

M
O
L
N
D
D
G
G
S
A
A
B
B
S
J
C
J
K
E
U
Q_1
P
Q
Q
P_1
U
E_1

Fig. 2.

f_2
t_2
h
o

Fig. 1.

b
t_1
f_1
s
f_2
h
t_2
g
g
R
T
T
F
r
R
H
C
B
B
C

$$-x_x = \sigma_1 \varDelta + \sigma_2 X_x + (3\sigma_1 + \sigma_2)\frac{c_2'}{2}\vartheta_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad 13)$$
$$-y_z = 2\sigma_2 Y_z,$$
$$\cdots\cdots$$

Darauf entwickele man σ_1 und σ_2 nach Potenzen von δ_0, schreibe

$$\sigma_1 = s_1 - s_1'\delta_0, \qquad \sigma_2 = s_2 - s_2'\delta_0,$$

und vertausche in dem letzten kleinen Glied von x_x die σ_h mit dem s_h, dann wird

$$-x_x = (s_1 - s_1'\delta_0)\varDelta + (s_2 - s_2'\delta_0)X_x + (3s_1 + s_2)\frac{c_2'}{2}\vartheta_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-y_z = 2(s_2 - s_2'\delta_0)Y_z,$$
$$\cdots\cdots$$

Es ist aber

$$\sigma_2 = s_2 - s_2'\delta_0 = \frac{1}{c_2 + c_2'\delta_0} = \frac{1}{c_2}\left(1 - \frac{c_2'}{c_2}\delta_0\right).$$

$$\text{daher} \quad s_2 = \frac{1}{c_2}, \quad s_2' = \frac{c_1'}{c_2^2} = s_2^2 c_2',$$

und man erhält

$$-x_x = (s_1 - s_1'\delta_0)\varDelta + (s_2 - s_2'\delta_0)X_x + \frac{(3s_1 + s_2)}{s_2^2}s_2'\vartheta_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad 14)$$
$$-y_z = 2(s_2 - s_1'\delta_0)Y_z,$$
$$\cdots\cdots$$

Hier hat man nur noch die Werthe (11) für δ_0 und ϑ_0 einzusetzen, um die Deformationsgrößen als Functionen der Molekulardrucke zu erhalten; sie finden sich durch erste und zweite Potenzen derselben gegeben.

Diese Beziehungen können dann direct zur Lösung specieller Aufgaben führen, wenn das mit Haupt- und Oberflächengleichungen vereinbare System von Drucken $X_x \ldots X_y$ in die Formeln (14) eingesetzt, Werthe der Deformationsgrößen $x_x \ldots x_y$ ergiebt, die mit den bekannten aus ihrer Definition folgenden sechs Bedingungen

$$\frac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 y_z}{\partial y\,\partial z}, \quad 2\frac{\partial^2 x_x}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_x}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y\,\partial x} \text{ u. s. f.}$$

verträglich sind. Dies findet z. B. bei der homogenen Deformation, wo alle Drucke Constanten sind, statt, im Allgemeinen aber nicht, und dann sind die Formeln (14) zum Ausgangspunkt überhaupt nicht geeignet.

Man wird in den meisten Fällen so verfahren, daß man die Verrückungen u, v, w zerlegt in

$$u = u^0 + u', \quad v = v^0 + v', \quad w = w^0 + w' \tag{15}$$

wo nun u^0, v^0, w^0, die Lösungen des gestellten Problemes in der ersten Annäherung, d. h. nach der älteren Theorie, bezeichnen, u', v', w' aber die durch die obigen Ergänzungen bedingten Correctionen. Dem entsprechend wird

$$x_x = x_x^0 + x_x', \dots x_y = x_y^0 + x_y', \text{ und } X_x = X_x^0 + X_x', \dots, X_y = X_y^0 + X_y' \tag{16}$$

zu setzen sein, und dies giebt:

$$\begin{aligned} -X_x' &= c_1 \delta' + c_2 x_x' + c_1' \delta^{0\,2} + \frac{c_2'}{2}(\vartheta^0 + 2 x_x^0 \delta^0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -Y_z' &= \frac{c_2}{2} y_z' + \frac{c_2'}{2} y_z^0 \delta^0, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{17}$$

wobei für diese Zusatzkräfte die Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial X_z'}{\partial z}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{X}_x' \cos(n, x) + \overline{X}_y' \cos(n, y) + \overline{X}_z' \cos(n, z), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{18'}$$

Der einfachste Fall ist der der homogenen Deformation. Setzt man

$$u^0 = ax, \quad v^0 = by, \quad w^0 = cz, \tag{19}$$

so wird

$$\begin{gathered} x_x^0 = a, \quad y_y^0 = b, \quad z_z^0 = c, \quad \delta^0 = a + b + c, \\ y_z = z_x = x_y = 0, \end{gathered}$$

und die Gleichungen (17) nehmen die Form an

$$
\begin{aligned}
-X'_x &= c_1\delta'+c_2x'_x+A, \quad A = c'_1(a+b+c)^2+\frac{c'_2}{2}((a^2+b^2+c^2)+2a(a+b+c)),\\
-Y'_y &= c_1\delta'+c_2y'_y+B, \quad B = c'_1(a+b+c)^2+\frac{c'_2}{2}((a^2+b^2+c^2)+2b\,(a+b+c)), \qquad 20)\\
-Z'_z &= c_1\delta'+c_2z'_z+C, \quad C = c'_1(a+b+c)^2+\frac{c'_2}{2}((a^2+b^2+c^2)+2c\,(a+b+c)).
\end{aligned}
$$

$$
-Y'_z = \frac{c_2}{2}\,y'_z, \qquad -Z'_x = \frac{c_2}{2}\,z'_x, \qquad -X'_y = \frac{c_2}{2}\,x'_y.
$$

Man kann den Hauptgleichungen und Oberflächenbedingungen (18) genügen, indem man $u' = lx$, $v' = my$, $w' = nz$ setzt d. h.

$$
x'_x = l, \quad y'_y = m, \quad z'_z = n, \quad y'_z = z'_x = x'_y = 0 \qquad 21)
$$

und zugleich

$$
X'_x = Y'_y = Z'_z = Y'_z = Z'_x = X'_y = 0.
$$

Dann resultirt

$$
\begin{aligned}
l &= -\frac{A}{c_2}+\frac{(A+B+C)\,c_1}{(3c_1+c_2)\,c_2},\\
m &= -\frac{B}{c_2}+\frac{(A+B+C)\,c_1}{(3c_1+c_2)\,c_2}, \qquad 21')\\
n &= -\frac{C}{c_2}+\frac{(A+B+C)\,c_1}{(3c_1+c_2)\,c_2}.
\end{aligned}
$$

Bei allseitig gleichem Druck p ist

$$
\begin{aligned}
a &= b = c = \frac{-p}{3c_1+c_2},\\
A &= B = C = 9a^2c'_1+\tfrac{1}{2}c'_1 = \frac{9p^2\,c'_1+\frac{1}{2}c'_2}{(3c_1+c_2)^2}. \qquad 22)\\
l &= m = n = -\frac{A}{3c_1+c_2} = -\frac{9p^2(c_1+\frac{1}{2}c'_2)}{(3c_1+c_2)^3}
\end{aligned}
$$

und hieraus folgt schließlich

$$
\delta = 3(a+l) = -\frac{3p}{3c_1+c_2}-\frac{27p^2(c'_1+\frac{1}{2}c'_2)}{(3c_1+c_2)^3}. \qquad 22')
$$

Die Combination der neuen Constanten, welche die Compression durch allseitig gleichen Druck zu bestimmen gestattet, ist also $c'_1+\frac{1}{2}c'_2$.

Da eine Temperaturerhöhung t mit einer Verminderung des äußern Druckes um einen von t abhängigen Betrag aequivalent ist, so ergiebt die Formel (22') auch da, wo der Druck mit der Temperatur proportional variirt, für die thermische Dilatation keine Proportionalität mit der Temperatur.

Bei der Dilatation eines Cylinders von beliebigem Querschnitt durch einen einseitigen Zug P auf die Querschnittseinheit ist, wenn man die Z-Axe in die Cylinderaxe fallen läßt:

$$23)\qquad a = b = -\frac{Pc_1}{c_2(3c_1+c_2)},\quad c = +\frac{P(2c_1+c_2)}{c_2(3c_1+c_2)},$$

$$A = B = \frac{P^2}{c_2^2(3c_1+c_2)^2}\left[c_1'c_2^2 + \tfrac{1}{2}c_2'(6c_1^2+2c_1c_2+c_2^2)\right],$$

$$C = \frac{P^2}{c_2^2(3c_1+c_2)^2}\left[c_1'c_2^2 + \tfrac{1}{2}c_2'(6c_1^2+8c_1c_2+3c_2^2)\right].$$

Die gesammte Verlängerung $\lambda = L(c+n)$ aber wird, wenn die ursprüngliche Länge $= L$ ist,

$$23')\quad \lambda = \frac{PL(2c_1+c_2)}{c_2(3c_1+c_2)} - \frac{P^2L}{c_2^2(3c_1+c_2)^2}\left[c_1'c_2^2 + \tfrac{3}{2}c_2'(6c_1^2+4c_1c_2+c_2^2)\right].$$

Dies ist die Größe, auf welche sich die Beobachtungen des Herrn O. Thompson beziehen; seine Resultate sind innerhalb mäßiger Bereiche auch durch diese Formel darstellbar und gestatten die Berechnung der in der eckigen Klammer enthaltenen Combination von c_1' und c_2'.

Es würde nicht die geringste Schwierigkeit bieten, durch Hinzufügung eines Gliedes von der Form

$$c_1''\delta^4 + c_2''\delta^2\vartheta + c_3''\vartheta^2$$

zu dem Ansatz (5) des Potentiales auch die von ihm benutzte weitere Interpolationsformel $l = AP + BP^2 + CP^3$ zu gewinnen; aber hierdurch würden, statt zwei, nun fünf neue Constanten eingeführt und demgemäß der Ueberblick über den Zusammenhang der Resultate bei verschiedenen Deformationen nahezu unmöglich gemacht werden. Ueberdies liegen bisher noch für keine Substanz Beobachtungen vor, welche eine zweite Combination der Ergänzungsconstanten c_1' und c_2' und dadurch ihre Werthe im Einzelnen zu bestimmen gestatten. Wir werden sehen, daß es eine

gewisse Schwierigkeit hat, eine solche Beobachtungsmethode aufzufinden. —

Das Problem der Torsion eines Kreiscylinders wird in erster Annährung gelöst durch

$$\begin{gathered} u^0 = -\tau yz, \quad v^0 = +\tau xz, \quad w^0 = 0, \text{ also} \\ x_x^0 = y_y^0 = z_z^0 = x_y^0 = \delta^0 = 0, \quad y_z = \tau x, \; z_x = -\tau y \end{gathered} \tag{24}$$

woraus folgt, falls $x^2+y^2 = r^2$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} -X_x' &= c_1\delta' + c_2 x_x' + \tfrac{1}{4} c_2'\tau^2 r^2 \\ -Y_y' &= c_1\delta' + c_2 y_y' + \tfrac{1}{4} c_2'\tau^2 r^2 \\ -Z_z' &= c_1\delta' + c_2 z_z' + \tfrac{1}{4} c_2'\tau^2 r^2 \\ -Y_z' &= \tfrac{1}{2} c_2 y_z' \\ -Z_x' &= \tfrac{1}{2} c_2 z_x' \\ -X_y' &= \tfrac{1}{2} c_2 x_y'. \end{aligned} \tag{25}$$

Wir machen den Ansatz

$$u' = \tau^2 Rx, \quad v' = \tau^2 Ry, \quad w' = \tau^2 Cz \tag{26}$$

worin R eine Function von r, und C eine Constante ist.

Dadurch wird

$$\begin{aligned} -X_x' &= \tau^2\left[c_1(2R+R'r+C)+c_2\left(R+R'\frac{x^2}{r}\right)+\tfrac{1}{4}c_2'r^2\right] \\ -Y_y' &= \tau^2\left[c_1(2R+R'r+C)+c_2\left(R+R'\frac{y_2}{r}\right)+\tfrac{1}{4}c_2'r^2\right] \\ -Z_z' &= \tau^2\left[c_1(2R+R'r+C)+c_2 C \qquad\qquad +\tfrac{1}{4}c_2'r^2\right] \\ -Y_z' &= 0, \quad -Z_x' = 0, \quad -X_y' = \tau^2 c_2\frac{R'xy}{r}; \end{aligned} \tag{27}$$

hierin ist kurz

$$\frac{dR}{dr} = R'$$

gesetzt.

Die erste und zweite der Gleichungen (18) werden durch diesen Ansatz identisch, nämlich gleich

$$0 = (c_1+c_2)(3R'+rR'') + \tfrac{1}{2}c_2'r. \tag{28}$$

Gleiches gilt von den beiden ersten Formeln (18'), wenn man sie auf den Cylindermantel anwendet; lauten sie jetzt:

$$29)\qquad 0 = c_1(\overline{2R} + \overline{R'r} + \overline{C}) + c_2(\overline{R} + \overline{R'r}) + \tfrac{1}{4}c_2'\overline{r^2}.$$

Die Integration der ersten Formel giebt

$$30)\qquad R = A + \frac{B}{r^2} - \frac{c_2' r^2}{16(c_1 + c_2)};$$

hierin muß B verschwinden, wenn die Formel auf einen vollen Kreiscylinder anwendbar sein soll; setzt man noch kurz $c_2'/16(c_1 + c_2) = K$, so erhält man

$$30')\qquad R = A - Kr^2.$$

Die Grenzbedingung (29) liefert die Gleichung

$$31)\qquad c_1(C + 2A) + c_2 K\varrho^2 = 0$$

worin ϱ den Radius des Kreiscylinders bezeichnet; eine weitere erhält man aus der Thatsache, daß bei reiner Torsion, d. h. bei der ausschließlichen Wirkung eines Drehungsmomentes N um die Z-Axe Z_z über den Querschnitt integrirt verschwinden muß. Diese lautet:

$$31')\qquad C(c_1 + c_2) + 2Ac_1 + 2c_2 K\varrho^2 = 0$$

und ergiebt mit der vorigen

$$C + K\varrho^2 = 0,\ \ 2Ac_1 + K\varrho^2(c_2 - c_1) = 0,\ \text{also}$$

$$32)\qquad C = -K\varrho^2,\ \ R = -K\left(\varrho^2 \frac{c_2 - c_1}{2c_1} + r^2\right).$$

Da die letzte der Hauptgleichungen und der Bedingungen für den Cylindermantel durch den Ansatz (26) identisch erfüllt sind, so genügen die Werthe (32) allen Bedingungen, und man erhält schließlich:

$$33)\qquad \begin{aligned} u &= -\tau yz - \tau^2 xK\left(\varrho^2 \frac{c_2 - c_1}{2c_1} + r^2\right) \\ v &= +\tau xz - \tau^2 yK\left(\varrho^2 \frac{c_2 - c_1}{2c_1} + r^2\right) \\ w &= -\tau^2 K\varrho^2 z,\ \text{wobei} \end{aligned}$$

$$K = \frac{c_2'}{16(c_1 + c_2)}.$$

Das Moment um die Längsaxe ist

$$N = -\int dq(xY_z - yX_z) = \pi c_2 \tau \int_0^\varrho r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi c_2 \tau \varrho^4, \qquad 34)$$

der Drehungswinkel aber gleich τL, wenn L die Länge des Cylinders bezeichnet.

Sonach findet man das merkwürdige Resultat, daß die ergänzte Theorie, obwohl sie allgemein die Deformationen als Functionen zweiten Grades von den Kräften liefert, bei der Torsion eines Kreiscylinders doch einen dem ausgeübten Moment proportionalen Drillungswinkel ergiebt. Seine Beobachtung kann also zur Bestimmung einer Combination der Ergänzungsconstanten c_1' und c_2' nicht benutzt werden. Dagegen ist in dieser Richtung zu verwerthen das weitere unerwartete Resultat, daß nach der ergänzten Theorie der gedrillte Kreiscylinder seine Länge ändert; der Betrag der Verlängerung λ ist bei einer Gesammtlänge gegeben durch

$$\lambda = -\frac{\tau^2 c_2' \varrho^2 L}{16(c_1 + c_2)}. \qquad 35)$$

Zugleich mit der Länge variirt auch der Radius des Kreiscylinders u. zw. um den Betrag

$$-\frac{\tau^2 c_1' \varrho^3}{32 c_1},$$

was sich aber der Beobachtung entziehen dürfte. Bei der Benutzung dieser Formeln ist zu berücksichtigen, daß τ nur die Drillung der Längeneinheit bezeichnet, die Gesammtdrillung des Stabes aber τL beträgt.

Führt man das wirkende Moment nach (34) ein, so ergiebt sich

$$\lambda = -\frac{c_2' L N^2}{\pi^2 \varrho^6 c_2^2 (c_1 + c_2)}. \qquad 35')$$

Die beiden zunächst nur für Kreiscylinder erhaltenen Resultate, daß auch bei Benutzung der erweiterten Theorie der Drillungswinkel dem ausgeübten Moment proportional bleibt, daß hier aber die Länge des Cylinders sich durch die Drillung ändert, gestatten die Uebertragung auch auf andere Querschnittsformen.

Hier ist nur statt des Ansatzes (24) der allgemeinere

$$u^0 = -\tau y z, \quad v^0 = +\tau x z, \quad w^0 = \tau \chi(x,y) \qquad 36)$$

zu benutzen, in dem χ eine von der Gestalt des Querschnitts abhängige Function bezeichnet, welche bei gegen die X- und Y-Axe

symmetrischen Querschnitten in Bezug auf x und y ungerade ist. Er wird also

$$x_z^0 = y_y^0 = z_z^0 = x_y^0 = \delta^0 = 0,\ y_z^0 = \tau\left(x + \frac{\partial \chi}{\partial y}\right),\ z_x^0 = \tau\left(-y + \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)$$

und die Gleichungen (35) nehmen die Form an

$$37)\quad \begin{gathered} X_x' = X_x'' + \tau^2\psi,\ Y_y' = Y_y'' + \tau^2\psi,\ Z_z' = Z_z''\tau^2\psi \\ Y_z' = Y_z'',\ Z_x' = Z_x'',\ X_y' = X_y'', \end{gathered}$$

worin die $X_x'' \ldots X_y''$ die gewöhnlichen, von den Verrückungen u', v', w' gebildeten Componenten bezeichnen, und

$$37')\quad \psi = -\frac{c_2'}{4}\left(\left(x + \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(y - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2\right)$$

bei doppeltsymmetrischen Querschnitten eine in Bezug auf x und y gerade Function ist.

Demgemäß lauten die Hauptgleichungen für u', v', w' jetzt

$$38)\quad \begin{aligned} -\varepsilon\tau^2\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial X_x''}{\partial x} + \frac{\partial X_y''}{\partial y} + \frac{\partial X_z''}{\partial z}, \\ -\varepsilon\tau^2\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial Y_x''}{\partial x} + \frac{\partial Y_y''}{\partial y} + \frac{\partial Y_z''}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial Z_x''}{\partial x} + \frac{\partial Z_y''}{\partial y} + \frac{\partial Z_z''}{\partial z}, \end{aligned}$$

die Bedingungen für den Cylindermantel aber

$$38')\quad \begin{aligned} \overline{X}_x''\cos(n, x) + \overline{X}_y''\cos(n, y) &= -\tau^2\overline{\psi}\cos(n, x), \\ \overline{Y}_x''\cos(n, x) + \overline{Y}_y''\cos(n, y) &= -\tau^2\overline{\psi}\cos(n, y), \\ \overline{Z}_x''\cos(n, x) + \overline{Z}_y''\cos(n, y) &= 0. \end{aligned}$$

Sie sind dieselben, wie für ein Verrückungssystem, das durch fernwirkende Kräfte und Oberflächendrucke hervorgerufen wird, welche die gleiche Symmetrie, wie der Querschnitt, besitzen. Solche Einwirkungen können aber keine Drillung, sondern nur Längs- und Querdilatationen bewirken; daher giebt auch u', v', w' zu dem Drillungswinkel keinen Antheil, wohl aber zu der Längsdilatation z_z, was zu beweisen war. —

Um die gleichförmige Biegung eines Cylinders durch Momente um die eine Hauptträgheitsaxe Y seines Querschnittes zu erhalten, setzen wir

$$39)\quad u^0 = a(x^2 - y^2) + bz(l - z),\ v^0 = 2axy,\ w^0 = -b(l - 2z)x$$

also

$$x_x^0 = 2ax = y_y^0,\ z_z^0 = 2bx,\ y_z^0 = z_x^0 = x_y^0 = 0,\ \delta^0 = 2x(2a+b).$$

Die Gleichungen (17) nehmen hierdurch die Gestalt an

$$\begin{aligned} -X_x' &= c_1\delta' + c_2 x_x' + kx^2, & -Y_z' &= \tfrac{1}{2} c_2 y_z', \\ -Y_y' &= c_1\delta' + c_2 y_y' + kx^2, & -Z_x' &= \tfrac{1}{2} c_2 z_x', \\ -Z_z' &= c_1\delta' + c_2 z_z' + k_1 x^2, & -X_y' &= \tfrac{1}{2} c_2 x_y'; \end{aligned} \qquad 40)$$

hierin bezeichnen k und k_1 leicht angebbare Constanten, welche a, b, c_1' und c_2' enthalten.

Man kann Y_z', Z_x', X_y' zu Null machen, indem man wählt

$$u' = lx + \tfrac{1}{2} px^2,\quad v' = my,\quad w' = mz; \qquad 41)$$

dadurch erhält man

$$\begin{aligned} -X_x' &= c_1(l+m+n) + c_2 l + ((c_1+c_2)p + k)x^2, \\ -Y_y' &= c_1(l+m+n) + c_2 m + (c_1 p + k)x^2 \\ -Z_z' &= c_1(l+m+n) + c_2 n + (c_1 p + k_1)x^2, \end{aligned} \qquad 41)$$

und diese Werthe genügen den Hauptgleichungen (18), wenn man $X_x' = 0$ d. h.

$$(c_1+c_2)p + k = 0 \text{ und } c_1(l+m+n) + c_2 l = 0 \qquad 42)$$

setzt, sie genügen auch zugleich der ersten und letzten Randbedingung (18′), aber nicht der zweiten.

Indessen übersieht man sogleich, daß dieser Umstand bei einem zur X- und Y-Axe symmetrischen Querschnitt ohne Belang ist, wenn es sich nicht um die vollständige Lösung des Problems, sondern nur um die Bestimmung der, einem gegebenen Moment entsprechende Biegung der Cylinderaxe handelt. Denn die Drucke gegen den Cylindermantel, welche nothwendig sein würden, um die angesetzte Deformation zu bewirken, sind für $+x$ und $-x$ gleich und gleich gerichtet, sie können alle nur eine in Bezug auf YZ-Ebene symmetrische Deformation und keine Biegung bewirken.

Wenn der Querschnitt ein Rechteck bildet, dessen Seite A parallel der X-Axe viel kleiner ist, als die Seite B parallel der Y-Axe, so giebt der Ansatz (38) eine sehr nahe vollständige Lösung des Problemes, falls man nur die noch verfügbaren zwei Con-

stanten so bestimmt, daß

$$\int_{-\frac{A}{2}}^{+\frac{A}{2}} Y_y dx = 0, \quad \int_{-\frac{A}{2}}^{+\frac{A}{2}} Z_z dx = 0$$

ist, d. h., daß die Resultanten der gegen die Schmalseiten wirkenden Kräfte für jedes Querschnittselement des Prismas verschwinden.

Dann gelten für l, m, n, p die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} (c_1+c_2)p+k &= 0, \quad c_1(l+m+n)+c_2 l = 0, \\ c_1(l+m+n)+c_2 m+\tfrac{1}{8}(c_1 p+k)A^2 &= 0, \\ c_1(l+m+n)+c_2 n+\tfrac{1}{8}(c_1 p+k_1)A^2 &= 0, \end{aligned} \tag{43}$$

aus denen man l, m, n und p mit Leichtigkeit gewinnen kann.

Was hier für gleichförmige Biegung gefunden ist, gestattet sofort die Uebertragung auf ungleichförmige, wenn nur der gebogene Cylinder so lang gegen seine Querdimensionen ist, daß man Elemente, welche durch einander sehr nahe Querschnitte begrenzt sind, als gleichförmig gebogen betrachten kann. —

Die vorstehenden, für Drillung und Biegung gefundenen Resultate, welche, so überraschend sie erscheinen, sich durch Discussion der Eigenschaften der erweiterten Druckcomponenten (6) plausibel machen lassen, klären den Widerspruch auf, in welchem scheinbar die von Herrn O. Thompson bei Längsdehnung gefundenen Resultate mit den von mir und Anderen bei Biegung und Torsion erhaltenen stehen. Sie zeigen, daß der Einfluß, welchen die nicht genaue Gültigkeit des gewöhnlichen elastischen Potentiales auf die verschiedenen beobachtbaren Deformationen hat, eine ganz verschiedene Größenordnung besitzt, z. B. bei Längsdehnung in einem Gliede erster, bei Biegung und Drillung in einem Gliede zweiter Ordnung auftritt, im ersteren Falle also unter Umständen sehr merklich sein kann, wo er in den letzteren kaum nachweisbar ist.

Hierdurch sind auch einige der von Herrn Thompson aus seinen Beoabachtungen gezogenen Schlußfolgerungen als irrig erwiesen. —

Das erweiterte elastische Potential (5) und die aus ihm gefolgerten Werthe der Druckcomponenten (6) gestatten auch noch die Verwendung, zu bestimmen, wie sich der isotrope Körper durch eine hervorgebrachte starke Deformation gegenüber späteren kleinen in seinem Verhalten ändert; er muß durch die erstere

offenbar in jedem Volumenelement nach verschiedenen Richtungen physikalisch ungleichwerthig werden, und die Gesetze dieser Wirkung sind in dem obigen Ansatz enthalten.

Es möge jetzt u^0, v^0, w^0 und entsprechend δ^0, ϑ^0 sich auf die vorhergehenden starken Deformationen beziehen, u', v', w', δ', ϑ' auf die nachfolgenden schwächeren.

Beschränken wir uns hinsichtlich der u', v', w' auf die niedrigste Ordnung, so nehmen die Formeln (6) für die Drucke die Gestalt an:

$$-X_x = -X_x^0 - X_x', \ldots, -X_y = -X_y^0 - X_y',$$

wo $X_x^0 \ldots X_y^0$ die Ausdrücke (6) selbst sind, wenn man darin rechts die oberen Indices ^{0} anfügt, die $X_x' \ldots X_y'$ aber gegeben sind durch

$$\left.\begin{aligned}
-X_x' &= (c_1 + 2c_1'\delta^0 + c_2' x_x^0)\,\delta' + (c_2 + c_2'\delta^0)\,x_x' + c_2'\varphi,\\
-Y_y' &= (c_1 + 2c_1'\delta^0 + c_2' y_y^0)\,\delta' + (c_2 + c_2'\delta^0)\,y_y' + c_2'\varphi,\\
-Z_z' &= (c_1 + 2c_1'\delta^0 + c_2' z_z^0)\,\delta' + (c_2 + c_2'\delta^0)\,z_z' + c_2'\varphi,\\
-Y_z' &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c_2'\delta^0)\,y_z' + \tfrac{1}{2}c_2' y_z^0\,\delta',\\
-Z_x' &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c_2'\delta^0)\,z_x' + \tfrac{1}{2}c_2' z_x^0\,\delta',\\
-X_y' &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c_2'\delta^0)\,x_y' + \tfrac{1}{2}c_2' x_y^0\,\delta',
\end{aligned}\right\} \quad 44)$$

worin kurz

$$x_x^0 x_x' + y_y^0 y_y' + z_z^0 z_z' + \tfrac{1}{2}(y_z^0 y_z' + z_x^0 z_x' + x_y^0 x_y') = \varphi$$

gesetzt ist.

Da in diesen Formeln die ursprünglichen Deformationen nur mit c_1' und c_2' multiplicirt auftreten, so ist es unbedenklich, für sie die nach der älteren Theorie berechneten Werthe zu benutzen.

Die Gleichungen (44) stimmen in der Form mit den für krystallinische Medien durch die ältere Theorie gelieferten überein, haben aber nicht soviel unabhängige Constanten, wie jene. Für ein Volumenelement, in welchem die Druckaxen der primären Deformation in die Coordinatenaxen X, Y, Z fallen, also $y_z^0 = z_x^0 = x_y^0 = 0$ ist, nehmen sie die Symmetrie eines rhombischen Krystalles an, mit der Vereinfachung, daß die Coëfficienten von Y_z', Z_x', X_y' gleich sind, die Anzahl unabhängiger Constanten also statt 9 nur 7 beträgt.

Von der großen Anzahl von Anwendungen, welche diese Grundgleichungen gestatten, seien nur einige angeführt.

Der Körper sei ein Cylinder und die primäre Dilatation eine Dehnung durch einseitigen Zug.

Dann ist

$$\text{45)} \quad x_x^0 = a, \quad y_y^0 = a, \quad z_z^0 = c, \quad \delta^0 = 2a + c, \quad y_z^0 = z_x^0 = x_y^0 = 0,$$
$$\varphi = a\delta' + (c - a) z'_z,$$

also

$$\text{46)} \quad \begin{aligned} -X'_x &= c_{11} x'_x + c_{12} y'_y + c_{13} z'_z, \\ -Y'_y &= c_{12} x'_x + c_{11} y'_y + c_{13} z'_z, \\ -Z'_z &= c_{13} x'_x + c_{13} y'_y + c_{33} z'_z, \\ -Y'_z &= c_{44} y'_z, \quad -Z'_x = c_{44} z'_x, \quad -X'_y = c_{44} x'_y; \end{aligned}$$

wobei

$$\text{46')} \quad \begin{aligned} c_{11} &= c_1 + c_2 + 2c'_1(2a + c) + c'_2(4a + c), \\ c_{12} &= c_1 + 2c'_1(2a + c) + 2c'_2 a, \\ c_{13} &= c_1 + 2c'_1(2a + c) + c'_2(a + c), \\ c_{33} &= c_1 + c_2 + 2c'_1(2a + c) + c'_2(2a + 3c), \\ c_{44} &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c'_2(2a + c)) = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \end{aligned}$$

Diese Formeln entsprechen, wie natürlich, der Symmetrie eines hexagonalen Krystalles (oder eines Rotationskörpers), dessen Hauptaxe in die Cylinderaxe fällt, sind aber specieller, als die allgemeinen hierfür gültigen. Da nun für einen solchen Krystall die Probleme der Biegung und Drillung leicht gelöst werden können, so enthalten die Werthe (46') der Constanten die gesammte Theorie des Einflusses der ausgeübten Längsdilatation.

Für das Experiment kommt von statischen Vorgängen wohl nur die Drillung des gedehnten Cylinders in Betracht; da c_{44} den Drillungswiderstand angiebt, so zeigt die letzte Formel (46') unter Benutzung der Werthe (23), die a und c bei einseitigem Zug P annehmen, daß die Aenderung dieses Widerstandes

$$\text{47)} \quad c_{44} = \tfrac{1}{2}(c_2 + c'_2(2a + c)) = \tfrac{1}{2}\left(c_2 + \frac{Pc'_2}{3c_1 + c_2}\right)$$

mit P nur von der einen Ergänzungsconstante c'_2 abhängt. Der Einfluß eines Längszuges auf den Drillungswiderstand bietet eine Methode zur Bestimmung von c'_2 dar, indessen wohl nicht die genauste, da c'_2 nur in einem Correctionsglied auftritt; die sicherste scheint durch Formel (35) gegeben zu sein.

Von dynamischen Vorgängen ist die Veränderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω von longitudinalen und Drillungsschwingungen durch die Wirkung der Längsdehnung der Beobachtung sehr wohl zugänglich; daß die erstere unter Umständen recht bedeutend sein kann, bestätigt eine Bemerkung von W. Weber[1]) über die Aenderung des Longitudinaltones einer Metallsaite durch Spannung. Die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω_λ und ω_τ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega_\lambda^2 &= \frac{1}{\varepsilon s_{33}} = \frac{c_{33}(c_{11}+c_{12}) - 2c_{13}^2}{\varepsilon(c_{11}+c_{12})}, \\ \omega_\tau^2 &= \frac{1}{\varepsilon s_{44}} = \frac{c_{44}}{\varepsilon} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2\varepsilon}. \end{aligned} \qquad 48)$$

Hierin bezeichnet ε die Dichtigkeit im deformirten Zustande, welche sich durch die ursprüngliche Dichte ε^0 bestimmt nach der Formel

$$\varepsilon = \varepsilon^0(1-\delta^0) = \varepsilon^0(1-2a-c) = \varepsilon^0\left(1-\frac{P}{3c_1+c_2}\right). \qquad 49)$$

Ist der Körper speciell ein Kreiscylinder um die Z-Axe, und ist die primäre Dilatation eine gleichförmige Drillung, so ist

$$x_x^0 = y_y^0 = z_z^0 = x_y^0 = 0, \qquad y_z^0 = \tau x, \qquad z_x^0 = -\tau y$$

und das System (44) wird zu

$$\begin{aligned} -X'_x &= c_1\delta' + c_2 x'_x + \frac{c'_2\tau}{2}(x y'_z - y z'_x), \\ -Y'_y &= c_1\delta' + c_2 y'_y + \frac{c'_2\tau}{2}(x y'_z - y z'_x), \\ -Z'_z &= c_1\delta' + c_2 z'_z + \frac{c'_2\tau}{2}(x y'_z - y z'_x), \\ -Y'_z &= \frac{c_2}{2} y'_z + \frac{c'_2\tau}{2} x\delta', \\ -Z'_x &= \frac{c_2}{2} z'_x - \frac{c'_2\tau}{2} y\delta', \\ -X'_y &= \frac{c_2}{2} x'_y. \end{aligned} \qquad 50)$$

Der Cylinder ist also in diesem Falle durch die Deformation inhomogen geworden, und die theoretische Behandlung hat im All-

1) W. Weber, Ges. Werke, Bd. I, p. 44, Berlin 1892.

gemeinen Schwierigkeit. Doch wird eine Dehnung durch einseitigen Zug durch dieselben Ansätze gelöst

$$u' = ax, \qquad v' = ay, \qquad w' = cz,$$

und es finden sich für a und c dieselben Werthe, als wenn der Cylinder ungedrillt der Zugkraft unterworfen würde. Dem entsprechend ändert sich also auch die Tonhöhe eines Cylinders für longitudinale Schwingungen durch eine Drillung nicht.

Göttingen, 1. Juli 1893.

Bruchstücke des Lalita-Vigraharâja Nâṭaka.

Von

F. Kielhorn.

Vor zwei Jahren habe ich im *Indian Antiquary*, Bd. XX, 201—212, Bruchstücke von zwei Schauspielen veröffentlicht, die sich auf zwei Basaltplatten zu Ajmere in Râjputânâ befinden. Ich konnte damals berichten, daß eine dieser Platten ein Stück des von Sômadêva verfaßten Lalita-Vigraharâja-Nâṭaka, die andre einen Theil eines von Vigraharâja selbst verfaßten Schauspiels enthält, dem der König den Namen Harakêli-Nâṭaka gegeben hat; daß beide Inschriften von einem gewissen Bhâskara geschrieben und eingegraben sind, und daß eine von ihnen ein Datum trägt, das dem 22. November 1153 n. Chr. entspricht. Noch ehe mein Aufsatz über diese Inschriften in Indien erschienen war, erhielt ich durch die Vermittlung Dr. Fleet's von Herrn Râmchandra Dube in Ajmere Abklatsche einer größeren Anzahl andrer Inschriften, von denen zwei neue, wichtige Theile derselben beiden Schauspiele enthielten. Später hat Dr. Führer in Lucknow Abdrücke aller in Ajmere entdeckten Inschriften an Ort und

Stelle angefertigt und mich durch Uebersendung derselben zu großem Danke verpflichtet. Was Dr. Führer mir geschickt hat, ist nicht mehr als was ich schon vorher besaß, aber seine sorgfältigen Abdrücke ermöglichen es mir, die bisher entdeckten Stücke der oben genannten Schauspiele vollständig herauszugeben. Im Folgenden gebe ich die Fragmente von Sômadêva's Lalita-Vigraharâja-Nâṭaka.

Diese Fragmente befinden sich auf zwei Platten von poliertem Basalt, die im Jahre 1875 oder 1876 bei einer Reparatur der Arhai-din-kâ Jhonpra Moschee in Ajmere entdeckt worden sind und jetzt in derselben Moschee aufbewahrt werden. Die eine Platte enthält 38 Zeilen Schrift auf einem Raume von etwa 90 × 55 cm., die andre 37 Zeilen auf einem Raume von etwa 106 × 58 cm. Beide Platten haben mehrere breite Risse. Trotzdem ist die Schrift der ersten Platte außer in den beiden letzten Zeilen im Ganzen gut erhalten. Dagegen hat die Schrift der zweiten Platte besonders in den Zeilen 19—21 so arg gelitten, daß es unmöglich ist, den Wortlaut dieser Zeilen auch nur annähernd wieder herzustellen; und kürzere Stellen fehlen auch in andren Zeilen. Die Höhe der Buchstaben ist auf beiden Platten ungefähr 1 cm. Die Schrift ist Nâgarî. Die technische Ausführung ist in jeder Hinsicht vortrefflich; und über die Orthographie brauche ich nur zu bemerken, daß der Laut *b* überall durch den Buchstaben *v* bezeichnet ist.

Was den Inhalt dieser Fragmente betrifft, so habe ich dem, was ich schon früher darüber geschrieben habe, hier Nichts hinzuzufügen. Ich gebe ihren Text genau so wie er auf den Steinen steht, mit unbedeutenden Anmerkungen und einer Sanskrit Uebersetzung der Prâkrit Stellen. Ich habe schon früher bemerkt, daß gerade das Prâkrit (Śaurasênî, Mâhârâshṭrî und Mâgadhî) dieser Fragmente sehr interessant ist, weil es mehr zu den Lehren des Hêmachandra stimmt als bei irgend einem der veröffentlichten Schauspiele der Fall ist. Dies eingehender zu untersuchen, überlasse ich den Sachverständigen.

Platte I.

Z. 1. nidhâtuṁ niyatyâ

nyastâ tanvî sakṛid=anubhavasy=âdhvani svapnajasya |
tach-chiṁtâbhis=tad=ayam=adhunâ bhâvitô bhâvan-âtmâ
hêtuḥ [sûtê] diśi vidiśi tâṁ jâgratô=py=agratô mê ||

sakhêdaṁ || âścharyam=âścharyaṁ ||

Smita-jyôtsnâ-sâraṁ dadhad=api tad-âsy-êṁdum=uditaṁ
sakhê chêtaś=chitraṁ nipatati mahâmôha-

2. timirê |
sudhâ-vîchi-snigdhaiḥ snapitam=api tan-nêtra-valitair=
vvapur=mmê sarvv-âṁgaṁ kalayati cha saṁtâpam=adhikaṁ ||

Vidû || [(a)] Vayassa maha hiayaṁ tujjha a dâva ekkaṁ jjeva | tuha uṇa bhûri-bhâvaṇâṇuvaṁdha-paravvase hiae ṇichcha-saṇṇihida jjeva sâ maachchhî | tâ tae pachchakkhîkadâ mae vi kâdavva
3. jjeva tti juttaṁ bhodi | tadhâvi maha asaṁjâda-taddaṁsaṇassa kade kaṁpi taddaṁsaṇovâyaṁ maṁtehi[1]) ||

Râjâ || Vayasya || yadi tê kautukam=asti tadâ samâlikhya darśayâm=*îti chitrê likhitvâ darśayati* ||

Vidû || *chitra-phalakam=âdâya nirîkshya* [||*][(b)] Vayassa ṭṭhâṇe[2]) jâdâsaṁgosi || *punar=avalô-*
4. *kya* ||[(c)] kadhaṁ siloo vi ṇimmâya lihido *iti vâchayati* ||
Svapnê prâg=avalôkit=âsi sutanu prâptair=mmay=ôjjâgaraiḥ
[sô]=py=aṁtarvvitat-ârativyatikaraiḥ paśchâd=abhûd=durllabhaḥ |
paśyaty=asta-rasâṁtaraṁ tu vidhṛita-dhyânapravaṁ(baṁ)dhaṁ tvayi
svâṁtaṁ tvanmayam=êva viśvam=adhunâ dhattê tu nô nirvṛitiṁ ||

5. Vidû ||[(d)] Vayassa asachcha jjeva dâva atthâ siviṇae viloijjaṁti | kâiṁpi uṇa jahatthâiṁ pi vatthurûvâiṁ siviṇae pekkhij-

---

(*a*) Vayasya mama hṛidayaṁ tava cha tâvad=êkam=êva | tava punar=bhûri-bhâvan-ânubandha-paravaśê hṛidayê nitya-saṁnihit=aiva sâ mṛigâkshî | tasmât=tvayâ pratyakshîkṛitâ may=âpi kartavy=aiv=êti yuktaṁ bhavati | tathâpi mam=âsaṁjâta-tad-darśanasya kṛitê kam=api tad-darśan-ôpâyaṁ mantrayasva ||

(*b*) Vayasya sthânê jât-âsaṅgô=si ||

(*c*) Kathaṁ ślôkô=pi nirmâya likhitaḥ ||

(*d*) Vayasya asatyâ êva tâvad=arthâḥ svapnê vilôkyantê | kâny=api punar=yathârthâny=api vasturûpâṇi svapnê prêkshyantê | Aniruddhêna khal=Ûsrâ tayâ cha sa satya êva svapnê dṛishṭa ity=êvaṁvidhâ vṛittântâ aitihâsikânâṁ kathâbhiḥ śrûyantê | tasmâd=yady=êsh=âpi sundarî satyâ sulabh=âbhâti tad=yuktâ tatra ta âsaktiḥ | anyathâ punaḥ kimity=âtm=âyâsyatê | athavâ satyâ sulabhâ cha s=âvaśyaṁ saṁbhâvyata êva | na khalu s=âsatyâ bhavantî tvayâ śuddha-hṛidayêna nishkâraṇaṁ svapnê prêkshyatê | îdṛiśaś=ch=ânurâgaḥ samarthasya tê kathaṁ nishphalaḥ saṁbhâvyatê ||

---

1) Ursprünglich *maṁtehiṁ*, geändert zu *maṁtehi*. 2) Lies *ṭhâṇe*.

jaṁti | Aṇiruddheṇa khu Ûsâ tâe a so sachcho jjeva siviṇae diṭṭho tti evaṁvihâ vuttaṁtâ edihâsiâṇaṁ kadhâhiṁ suṇîyaṁti | tâ jaï esâ
6. vi suṁdarî sachchâ sulahâ âbhâdi tâ juttâ tattha de âsattî | aṇṇadhâ uṇa kitti appâ[1]) âyâsîyadi | adhavâ sachchâ sulahâ a sâ avassaṁ saṁbhâvîyadi jjeva | ṇa hu sâ asachchâ huvaṁtî tae suddha-hiaeṇa ṇikkâraṇaṁ siviṇae pekkhîyadi | eriso a aṇurâo samatthassa de kadhaṁ
7. ṇipphalo saṁbhâvîyadi ||

Râjâ || Vayasya sâ saty=êti kathaṁ vijñâtuṁ pâryatê ||

Vidû || *sôtprâsaṁ* ||[e] Vayassa | ṇaṁ bhaṇâmi puhavîtala-ṇihidâiṁ dhaṇiâṇaṁ dhaṇâiṁ tadhâ tamapasara-duppechchha-peraṁtesu pura-vahiṭṭhidesu uvavaṇesu addharatta-vihidâiṁ choriâ-suradâiṁ pi jâva tu-
8. mhârisâṇaṁ châra-ṇayaṇâṇaṁ mahîvadîṇaṁ pachakkhâiṁ[2]) huṁti | kiṁ uṇa ṇa saala-loa-loaṇâṇaṁdaṇâiṁ paaḍâiṁ kâmiṇî-rayaṇâiṁ ||

Râjâ || Vayasya kim=ayam=upahâsaḥ samâśvâsanaṁ vâ ||

Vidû ||[f] Ṇaṁ sachchaṁ jjeva edaṁ | tâ kiṁ ettha uvahâseṇa âsâsaṇeṇa vâ | (||)

Nêpathyê ||

Phalaṁ ka-
9. rmm-ânusârêṇa bhâvayan=bhavinâṁ prabhuḥ |
Śaṁbhuḥ śubhâya mê bhûyâd=bhaktânâm=abhaya-pradaḥ ||

Râjâ || *śrutvâ* || *vilôkya* | *saharshaṁ* || [Va]yasya pâṁtha iva kô=pi dṛiśyatê || yaḥ ||
Avirata-[pa]thi-prasthân-ôtthâm=imâṁ kṛiśatâ-sakhîṁ
dṛig-anabhimatâṁ kṛitsnaṁ vyâpya sthitâṁ vapur=aśriyaṁ |

(e) Vayasya | nanu bhaṇâmi pṛithivîtala-nihitâni dhanikânâṁ dhanâni tathâ tamaḥprasara-dushprêksha-paryantêshu pura-bahiḥsthitêsh=ûpavanêshv=ardharâtra-vihitâni chaurikâ-suratâny=api yâvad=yushmâdṛiśânâṁ châra-nayanânâṁ mahîpatînâṁ pratyakshâṇi bhavanti | kiṁ punar=na sakala-lôka-lôchan-ânandanâni prakaṭâni kâminî-ratnâni ||

(f) Nanu satyam=êv=aitat | tasmât=kim=atr=ôpahâsên=âśvâsanêna vâ ||

---

1) Was auf dem Steine steht, sieht mehr wie *apyâ* aus.
2) Lies *pachchakkhâiṁ*.

dadhad⸗api vahann⸗êtad⸗vrâ(brâ)hmaṁ mahaḥ
10. sphuṭam⸗adbhutaṁ
jagad⸗api jayaty⸗âkṛity⸗aiva pratîta-guṇôdayaḥ ||
tad⸗duḥkhitam⸗api mê hṛidayam⸗êtasya darśanêna sukhita[m⸗ê]va varttatê ||

Tataḥ praviśati pâṁthaḥ ||

Pâṁthaḥ || Śru[taṁ] mayâ yathâ kila puraḥsthitam⸗idam⸗êv⸗ôdyânam⸗alaṁkurvvann⸗âstê Śâkaṁbharî-narêṁdrô Vigraharâja iti tatô yady⸗a-
11. parichitatvân⸗na nivâryê tadâ kṛitârthayâmi tad-avalôkanêna chakshushî || *purô⸗valôkya* || *sânaṁdaṁ* || dishṭyâ dûrâpas[âri]ta-samasta-parijanô dvi-traiḥ praṇayibhir⸗upê[tô]⸗sy⸗aiva samullasita-kusum-âmôda-mêdurita-Malayamâruta-samṛiddhêr⸗ghanatama-chchhâyâ-pariṇâha-manôhara-samunnatê-
12. r⸗nûtana-vakulasya talam⸗alaṁkurutê dêvô Vigraharâjaḥ ||
Ayaṁ duḥprêkshyaṁ[1]) cha prathita-jagad-ânaṁdam⸗api cha
prabhûtaṁ vi(bi)bhrâ[ṇa]s⸗tad⸗idam⸗asamaṁ dhâma kim⸗api |
satâṁ saṁtrâṇâya vyat[i]karita-mârttaṁḍa-tuhina-
dyuti-jyôtiḥ kâṁtaṁ jayati jagatî-maṁḍana-maṇiḥ ||
Yam⸗utkô⸗smi drashṭuṁ namad-amara-kôṭîra-
13. vilasan-
maṇi-śrêṇî-śâṇ-ôjvala[2])-charaṇapîṭh-ârppita-padaṁ |
prabhôś⸗Chaṁḍîbharttus⸗tribhuvana-patês⸗tasya kṛipayâ
nṛipaṁ saṁ[vî]kshy⸗ainaṁ jani-phalam⸗avâptô⸗smi sakalaṁ ||

Râjâ || *[saṁ]jñayâ pratîhâram⸗âdiśati* | (||)

Pratîhâraḥ [||*] Ârya ita itaḥ[||*]

Pâṁthaḥ | (||) *upasṛitya* | Svasti samast-âvani-rakshâ-puṇya-bhâja-
14. nâya bhavatê bhûpâya ||

Râjâ || Namô vidushê ||

Pâṁthaḥ || Śarad-iṁdu-dyuti-svachchhair⸗ddaś⸗âpi satataṁ di[śaḥ |]
.[3]) . . . d-yaśaḥ-pûrair⸗ddûram⸗unnamita-śriyaḥ ||

Râjâ || *svagataṁ* | Ahô sâtiśaya-puṇya-pariṇatyâ mahatâm⸗êvaṁvidhânâm⸗api darśanaṁ na durllabhaṁ || *prakâśaṁ* || *âsanaṁ pradâpya* | *sa-*

---

1) Lies *dushprêkshyaṁ*.
2) Lies *-ôjjvala-*.
3) Lies *bhavanti tvad-* (?).

15. *vinayaṁ* ‖ vidvan=kuta iyaṁ yâtrâ kathaṁ vâ sâtiśaya-guṇ-ô[ttarê]=py=avatârê niḥ[parichchhada] [1]) . . . . . [tavyaṁ] |

Vrâ(brâ)hmaṇaḥ ‖ Mahârâja ‖

Tarkkâr=îti prasiddhaṁ jagati nirupamaṁ sthânam=asti dvijânâṁ
tasmin=niḥśêsha-vidyâ-vasatir=adhigata-vrahmatatv-âvavôdhaḥ [2]) |
tâtaḥ saṁjâtavân=mê di-

16. śi diśi sudhiyaḥ prakramê yat-kathânâṁ
[sarvvê=py]=ânaṁda-vâshpa-prasara-bhara-bhṛit-âpâṁga-bhâjô bhavaṁti ‖

tasmiṁś=cha ‖

Tâtê [ga]tavati svarggam=aśêsha-vidushâṁ gurau |
s=âpi kv=âpi śuch=ê[va] śrîḥ prayâtâ tasya vêśmanaḥ ‖

ahaṁ tu tâta-śôka-śaṁkubhir=nnirbhidyamâna-marmmâ ‖

Vṛiddhâṁ tâṁ jananîṁ śiśûn=api su-

17. tân=sâdhvîm=a[pi] — ⏑ —
— — [na]nya-samâśrayân=api vahûn=[3]) vaṁdhûn=vihây=âdhunâ |
taṁ drashṭuṁ chalitô=smi viśva-bhuvana-prâraṁbha-rakshâ-vyaya-
vyâpâra-prabhavaṁ prabhuṁ sumanasâm=îśaṁ Prabhâsa-sthitaṁ ‖

Râjâ ‖ Vidvan |

Virachitam=uchitaiḥ purâtanais=taiḥ
sukṛita-chayair=idam=atra darśanaṁ tê |
niravadhi-śubha-

18. saṁpadâṁ [nidânaṁ]
[sa]phalayati sma mam=aitad=âdhipatyaṁ ‖

kiṁtv=ârya ‖ tvad-abhidhâna-śravaṇêna śrôtra-vṛittim=api kṛitârthayitum=ichchhâmaḥ ‖

Vipraḥ ‖ *savrîḍaṁ* ‖ Dêva ‖

Viśv-ô[tsa]va-nidânasya sadyaḥ saṁdarśanât=tava |
prâpt-âśêsha-śubh-ânaṁdaṁ Śubhânaṁdaṁ pratîhi mâṁ ‖

Râjâ ‖ Ârya ‖ tatra

19. sad-dêśê saṁbhûtêna prabhû[tâ]nâṁ cha vidyânâṁ bhâjanên=aitâvaṁtaṁ dêśam=âgatêna cha kiṁ kim=apy=adbhutam-avalôkitam=iha bhavatâ ‖

---

1) Lies *nishpari°*. 2) Lies *-brahmatattv-âvabôdhaḥ*. 3) Lies *bahûn-baṁdhûn=*.

Śubhânaṁdaḥ || Jagad-vismayadâyi-guṇa-gaṇaṁ bhavaṁtam=âlôkya kiṁ nâma n=âdbhutam=avalôkitaṁ || *smṛitim=abhinîya sânaṁdaṁ* || mahârâja || dvitîyaṁ ch=âdbhutaṁ dṛi-

20. shṭaṁ yathâ [|*] ast=îta uttarasyâṁ diśi[1]) Iṁdrapuraṁ nâma nagaraṁ | tatra cha tad-upâṁta-vartti vinidr-êṁdîvara-vanam=udbhinn-âṁbhôja-vraja-virâjitam=apâram=aparam=iva pârâvâraṁ vasaṁta-samaya-suṁdaraṁ sarôvaram=avalôkituṁ tatratyasya râjñô Vasaṁtapâlasya putrî prachuratara-turaṁga-vâra-parivṛitâṁ gṛi-

21. hîta-vividh-âyudha-purusha-saṁgha-saṁrakshitâṁ saviśêsha-maṁḍanâṁ kariṇîm=ârûḍhâ vividh-âlaṁkâra-bhûshit-âbhinavâraṁbha-yauvan-ôdbhâsit-âdbhuta-rûpa-ramaṇîyâbhir=bhûyasîbhiḥ sakhîbhir=upêtâ yatr=âhaṁ nitya-karmma kurvvann=asmi tatr=âgatavatî | âgatya cha tîrê samuttîrya mâṁ praṇanâma | a-

22. haṁ tu tasyâs=têna vinayêna pramudita-manâ âśishaṁ pradâya [tâṁ ni]puṇataraṁ chiraṁ nirîkshitavân | kiṁ va(ba)hunâ ||

Mukhât=tasyâḥ padmaṁ niyatam=anukaṁpâṁ mṛigayatê
dhruvaṁ tal-lâvaṇyâd=abhilashati bhâgaṁ himaruchiḥ |
tad-aṁgânâṁ kâṁtyâḥ kanakam=upamêyaṁ tu bhavituṁ
sphuṭaṁ bhûyô bhûyaḥ pra-

23. viśati hutâśasya jaṭharaṁ ||

api cha

Suvyakta-stanamaṁḍala-dvayam=urô n=â[dy=â]pi na vrîḍayâ
vâ(bâ)la-krîḍitam=âvṛitaṁ smita-sudhâ-siktâ na [vâ]châṁ tatiḥ |
na spashṭa-trivalî-ta[raṁ]ga-vibhavô madhya-pradêśas=tath-âpy=
astraṁ jaitram=iti Smarêṇa manasi nyastaṁ tadîyaṁ vapuḥ||

atha kâchit=tad-anucha[rî]

24. mûrtt=êva Ratis=tvaritatara-turaṁgam-âdhirûḍhâ paśchâd=âgatya tâm=uktavatî | bhartṛidâri[kê] tvâṁ dêvî samâdiśati yathâ || abhinava-nirmmita-chitrasâ(śâ)likâ-pravêśa-lagnaṁ pratyâsannaṁ varttatê | tat=satvaram=âgamyatâm=iti || tataḥ sâ tad=âkarṇṇya tath=aiva nagaraṁ pravishṭavatî ||

Râjâ || *svagataṁ* | A-

25. hô nu khalv=âścharya-paraṁparâ-va(ba)hulô jîvalôkaḥ | yatô mayâ tâvad=âkâra-jita-jagatîtalavartti-sakala-nârîjanam=avalôkitaṁ svapnê kanyâ-ratnaṁ | ayaṁ cha vivu(bu)dh-âgraṇ[îḥ] Śubhânaṁdô=pi tad-anûna-guṇam=aparam=api strî-ratnam=âchashṭê || manyê ch=âsaṁsâram=asamâpta-prakarsha-paraṁpar=aiva jaga-

---

1) Lies *diś=Îṁdra°*.

26. ti srashṭuḥ srishṭiḥ || *prakâśaṁ* || vidvan || tvâdṛiśâm=api dṛiśâm=âścharya-dâyi nârî-rûpam=asmân=api dra[shṭuṁ s]ôtkaṁṭhayati ||

Śubhânaṁdaḥ || Mahârâja kim=atr=âpi durllabham=ânîyatâṁ sa-chitrôpakaraṇaṁ tal-likhanâya phalakaṁ ||

Râjâ || *tathâ kârayati* ||

Śubhânaṁdaḥ || *likhitvâ darśayati* ||

27. Râjâ || *vilôkya svapna-dṛishṭâṁ pratyabhijñâya* || *sânaṁdâdbhutaṁ* || *svagatam* || Aścharyam=âścharyaṁ ||

Sarvvê=pi drutam=êtad-aṁga-niviḍa-ślêsh-âbhilâsh-âṁkura-
vrâtên=êva samaṁtatô=py=avayavâ rô[mô]dgamên=âṁchitâḥ |
saṁprâpt-âvasarô mam=aisha bhajati vyaktiṁ chirât=saṁchitô
vâshpâṁbhaḥ-prasara-chchhalêna cha dṛiśôr=asyâṁ di-

28. dṛikshâ-rasaḥ ||

tad=idânîṁ sâtirêkayôḥ sukha-duḥkhayôr=aṁtarê tishṭhâmi || *prakâśaṁ* || ahô k=âpy=apar=aiv=êyaṁ sauṁdarya-rêkhâ |

Sâjâtyê=py=upalâṁtarât=khalu janair=mmâṇikya-khaṁḍa[sya] cha
śrîkhaṁḍasya cha yâvad=atra viditaṁ kâshṭhâṁtarâd=aṁtaraṁ |
ślâghyâd=apy=uchitair=gguṇaiḥ kshiti-bhuvô niḥśêsha-nârîjanâl=

29. lâvaṇy-aika-vidhâv=ih=âpi vidadhê dhâtrâ tath=aiv=âṁtaraṁ ||

api cha ||

Smita-bhrûbhaṁg-âdyaiḥ kila harati chi[ttaṁ] śaśimukhî
svarûpâkhyânatvâd=iha tu na hi tê kê=pi likhitâḥ |
ta[th=â]py=âkârô=yaṁ jita-Kusumavâṇa-praṇayinî-
vapuḥ-sauṁdarya-śrîr=bhramayati munînâm=api manaḥ ||

ûrdhvam=ava-

30. *lôkya* || vidvan=saṁvṛittô madhyâhnaḥ || tathâ hi ||

Samastasy=âpy=ûrdhvê vilasati dinânâm=adhipatau
ksha[ṇaṁ] maṁdîbhâvaṁ nayati turaga-śrêṇim=Aruṇaḥ |
anushṭhâsyan=mâdhyaṁdinam=atha [vi]dhiṁ śishya-nivahô
vihâya svâdhyâyaṁ namati cha gurôr=aṁhri-yugalaṁ ||

tatô bhavadbhir=apy=asmat-parijana-saṁnidhâ-

31. [pi]ta-samasta-sôpakaraṇa-parijanam=asman-nirddishṭa ṅ pratîhârêṇa nivêdayishyamâṇam=âvâsam=adhishṭhâya vimuchyatâm=adhva-śramaḥ | kiyaṁtam=api kâlaṁ sva-saṁvâsêna ch=âsmâka[m=a]pi śubh-ânaṁdau pradây=âsmad-anumatair=bhavadbhiḥ śrî-Sômanâthadêvô drashṭavyaḥ ||

Śubhânaṅdaḥ || Yad=âha mahîpa-

32. [ti]ḥ ||

Râjâ || *Vidûshakaṁ prati* || Vayasya vrajâmô dêvârchchan-âdi-kṛityâya ||

Vidû || [g] Jaṁ vayasso âṇavedi || *iti niḥkrântâḥ*[1]) *sarvvê* ||

|| Iti mahâkavi-paṁḍita-śrî-Sômadêva-virachitê Lalitavigraharâj-âbhidhânê nâṭakê prathamô=ṁkaḥ samâptaḥ ||

Tataḥ praviśataś=chêṭyau ||

33. Ekâ || [h] Halâ Nomâlie | bhaṭṭidâriâ Desaladevî kim karedi ||

Dvitîyâ || [i] Sahi Suṁdarie | ahiṇava-ṇimmidaṁ chitta-sâliaṁ pekkhaṁtî chiṭṭhadi | (||)

Suṁdarikâ || [k] Halâ kiṁ kiṁ ta[ttha] pekkhidavvaṁ vatthu âlihidaṁ ||

Navamâlikâ || [l] Sahi jaṁ kim pi saṁsâre sâradaraṁ âsi vaṭṭadi ya ||

Suṁdarikâ ||

34. [m] Nomâlie | keṇa uṇa târisaṁ chittaṁ âlihidaṁ | (||)

Navamâlikâ | (||) [n] Suṁdarie kiṇṇa jâṇasi Ṇiuṇa-ṇâmaṁ chittaaraṁ | so khu parisîlid-âsesa-desaṁtara-vvavahâro raaṇatta[ya] . î-gihîda-saala-purâṇa-vuttaṁto a ||

Suṁdarikâ || [o] Sahi Ṇomâlie saṁpadaṁ jarâ-jajjarassa tassa kadhaṁ nâ-

---

(*g*) Yad=vayasya âjñâpayati ||

(*h*) Sakhi Navamâlikê | bhartṛidârikâ Dêsaladêvî kiṁ karôti ||

(*i*) Sakhi Sundarikê | abhinava-nirmitâṁ chitra-śâlikâṁ prêkshamâṇâ tishṭhati ||

(*k*) Sakhi ki ṁ kiṁ tatra prêkshitavyaṁ vastv=âlikhitam ||

(*l*) Sakhi yat=kim=api saṁsârê sârataram=âsîd=vartatê cha ||

(*m*) Navamâlikê | kêna punas=tâdṛiśaṁ chitram=âlikhitam ||

(*n*) Sundarikê kiṁ na jânâsi Nipuṇa-nâmâna ṁ chitrakaram | sa khalu pariśîlit-âśêsha-dêśântara-vyavahârô ratna-traya . . gṛihîta-sakala-purâṇa-vṛittântaś=cha ||

(*o*) Sakhi Navamâlikê sâmprataṁ jarâ-jarjarasya tasya kathaṁ nâmn=êva kâryêṇ=âpi nipuṇatâ ||

---

1) Lies *nishkrântâḥ*.

35. meṇa vva kajjeṇa vi ṇiuṇattaṇaṁ ||

N a v a m â l i k â || [p]Halâ ṇaṁ bhaṇâmi vâlattaṇâdo vi niraṁtaravbhâ(bbhâ)sa-ppaariso jarâjaṇidaṁgavialattaṇâṇaṁ pi taruṇo jjeva bhodi ||

S u ṁ d a r i k â || [q]Sahi tumaṁ dâṇi kahiṁ chalidâsi ||

N a v a m â l i k â || [r]Sahi bhaṭṭidâriatthaṁ Chaṁdasehara-ghariṇî-cha-
36. laṇachchâ-ṇimittaṁ chaṁpaa-kusumâiṁ avachiṇeduṁ ||

S u ṁ d a r i k â || [s]Sahi pasîdadu se bhaavadî Sasisehara-vallahâ aṇurûva-vallaha-dâṇeṇa ||

N a v a m â l i k â || [t]Tumaṁ uṇa kattha [chali]dâsi ||

S u ṁ d a r i k â || [u]Sahi ahaṁ pi bhaṭṭidâriâe guruaṇa-pâavaṁdaṇaṁ kâduṁ pesidâ | taṁ kadua bhaṭṭi-
37. dâriaṁ Desaladeviṁ daṭṭhuṁ gachchhaṁtî chiṭṭhâmi ||

N a v a m â l i k â || [v]Halâ tâ gachchha tumaṁ | ahaṁ pi patthudaṁ karemi ||

iti niḥkrâṁtê[1]) [||*] *Vishkaṁbhakaḥ* ||

Tataḥ praviśati chi[*tram=avalô*]*kamânâ sapa*[2]) . . . . *ladêvî chitrakaraś=cha* ||

D ê s a l a || [w]Mahâbhâa kiṁ uṇa paaṁ louttara-suṁdarattaṇâṇaṁ diâse-

---

(p) Sakhi nanu bhaṇâmi bâlatvâd=api nirantar-âbhyâsa-prakarshô jarâ-janit-âṅga-vikalatvânâm=api taruṇa êva bhavati ||
(q) Sakhi tvam=idânîṁ kva chalit=âsi ||
(r) Sakhi bhartṛidârik-ârthaṁ Chandraśêkhara-gṛihiṇî-chala-nṛityâ-nimittaṁ champaka-kusumâny=avachêtum ||
(s) Sakhi prasîdatv=asyai bhagavatî Śaśiśêkhara-vallabh=ânurûpa-vallabha-dânêna ||
(t) Tvaṁ punaḥ kva chalit=âsi ||
(u) Sakhi aham=api bhartṛidârikayâ gurujana-pâdavandanaṁ kartuṁ prêshitâ | tat=kṛitvâ bhartṛidârikâṁ Dêsaladêvîṁ drashṭuṁ gachchhantî tishṭhâmi ||
(v) Sakhi tad=gachchha tvam | aham=api prastutaṁ karômi ||
(w) Mahâbhâga kiṁ punaḥ padaṁ lôkôttara-sundaratvânâṁ dvijâśê(?) . . . . drịśyatê ||

---

1) Lies *nishkrântê*. 2) Lies *saparijanâ Dêsaladêvî*.

38. . . . . dîsaï ||

Chitra || Bhartṛidârikê | idam=anupama-râmaṇîyakâ . tridiva-sadâm=uchitaṁ sadaḥ sudharmmâ | ayam=api sa . . . .

[Dêsala ||] *namasyati* || *anyatô=valôkya* || [x] Mahâbhâa ko eso vi-viha-raaṇa-gaṇa-bhûsi . .

(*x*) Mahâbhâga ka êsha vividha-ratna-gaṇa-bhûshi . .

Platte II.

Z. 1. vâṁchhitânâṁ

vihita iva hitânâm=antikê durllabhânâṁ |
tad-abhayam=avivêkaṁ śâśva[taṁ] svâvavô(bô)[dhaṁ]
⏑ ⏑ ⏑ ⏑ ⏑ ⏑ — — — ⏑ — — kṛitârthaḥ ||

atha ||

Kim=api nivi[ḍaṁ] vrîḍâ-chchhannaṁ prakâma-manôharaṁ
[pra]kaṭitavatî s=âpi prêma prabhûtatamaṁ mayi |
yad=aśanir=iva krûraḥ prauḍhaṁ jvalann=iva pâvakaḥ
skhalad=iva muhuḥ śa-

2. lyaṁ svâṁtê tanôty=adhunâ rujaṁ ||

Śaśi || *sânaṁdaṁ* || [a] Deva diṭṭhiâ pasaṇṇaṁ bhaavadâ vihiṇâ va[lla]heṇa a || achchhariaṁ 2

Daṁsaṇa-suhaṁ pi aṇisaṁ patthijjaï jeṇa dullahaṁ jassa |
so vi hu jaï tassa kae jhijjaï tâ kiṇṇa pajjattaṁ ||

dâṇi jaṁ bhaṭṭidâriâe târisa-kilesâṇala-saṁtâva-paraṁparâe e-

3. risassa a ṇia-ppasâa-vilasidassa aṇurûam taṁ aïreṇa jjeva kijjadu || jado ||

(*a*) Dêva dishṭyâ prasannaṁ bhagavatâ vidhinâ vallabhêna cha| âścharyam=âścharyam |

Darśana-sukham=apy=aniśaṁ prârthyatê yêna durlabhaṁ yasya |
sô=pi khalu yadi tasya kṛitê kshîyatê tat=kiṁ na paryâptam ||

idânîṁ yad=bhartṛidârikâyâs=tâdṛiśa-klêśânala-saṁtâpa-paraṁparâyâ îdṛiśasya cha nijaprasâda-vilasitasy=ânurûpaṁ tad=achirêṇ=aiva kri-yatâm | yataḥ |

Prabala-pavanaugha-durdhara-dâvânala-kavalanaṁ taru-varâ api |
na sahanta êva kiṁ punaḥ sukumâraṁ mâlatî-kusumam ||

ahaṁ tv=îdṛiśaṁ dêvasy=ânurâgam=êtâdṛiśaṁ cha svapna-saṁvidhâ-naṁ nivêdy=âśvâsayâmi sa-parijanâṁ bhartṛidârikâm ||

Pavala-pavaṇoha-duddhara-dâvâṇala-kavalaṇaṁ taru-varâ vi |
ṇa sahaṁti chchia kiṁ uṇa somâlaṁ mâladî-kusumaṁ ||
ahaṁ tu erisaṁ devîyam=aṇurâam=eârisaṁ[1]) cha siviṇaa-saṁvihâ-
ṇaaṁ ṇiveiya âsâsaemi sapa-
4. riaṇaṁ bhaṭṭidâriaṁ ||

Râjâ || *svagataṁ* ||
Sa prauḍha-prasaraḥ priyâ-viraha-jô duḥkh-augha-dâvânalô
vishvag=vâg-amṛitair=mukh-âṁvu(bu)da-tatair=yên=âdya nir-
vvâpitaḥ |
âḥ kashṭaṁ sudhay=êva nirmmita-tanôs=tasy=âdhun=ôpasthitaḥ
kô=py=êtasya sumânushasya virahaḥ sôḍhuṁ kathaṁ yâ-
syati ||
prakâśaṁ || sakhi Śaśiprabhê saṁprati pri-
5. yatamâ-viraha-duḥkha-dâvânalas=tvad-viyôga-prava(ba)la-pra-
bhaṁjana-vêga-śatamukhîkṛitaḥ kavalayann=imaṁ dêha-viṭapinaṁ
kathaṁ śakanîyaḥ sôḍhuṁ || tatô yâvat=priyâ-samâgamô bhavati tâ-
vad=atr=aiva tishṭhatu bhavatî || tatra tu tvadîya-kalyâṇa-pravṛitty-
upavṛiṁhitâm=âtmanaḥ kuśala-vârttâṁ nivêdayitum=âtmîyâṁ sa-
kala-viśraṁ-
6. bha-bhuvaṁ Kalyâṇavatîṁ nâma prêshayishyâmaḥ ||

Śaśiprabhâ || (b) Jaṁ devo âṇavedi ||

Râjâ || Kaḥ kô=tra bhôḥ kaḥ kô=tra ||

Praviśya purushaḥ || (c) Âṇavedu bhaṭṭâ ||

Râjâ || Bhadra asmad-vachanâd=abhidhîyatâṁ mahâmâtyaḥ ||
yathâ saṁnidhâpit-âśêsha-śayan-âsana-bhâṇḍ-âdy-upakaraṇaṁ tâṁ-
vû(bû)la-kusuma-karppûra-vilêpana-vasa-
7. n-âdi-samast-ôpabhôgya-vastu-saṁpannaṁ sa-parijanâyâḥ Śa-
śiprabhâyâḥ sthity-uchitaṁ saṁpâday=âvâsa-bhavanam=iti ||

Purushaḥ || (d) Jaṁ devo âṇaved= *iti niḥkrâṁtaḥ*[2]) ||

Râjâ || Śaśiprabhê ||
Sâ kalpadruma-maṁjar=îva hi mama smêra-smarâgni-jvara-
jvâlâ-dhyâmalitair=mmanôratha-śatair=bhṛiṁgair=iv=âliṁgitâ |
âḥ kashṭaṁ ◡ ◡ —

(*b*) Yad=dêva âjñâpayati ||
(*c*) Âjñâpayatu bhartâ ||
(*d*) Yad=dêva âjñâpayati ||

---

1) Lies *deviaṁ aṇurâaṁ eârisaṁ*. 2) Lies *nishkrântaḥ*.

8. r=vvidhêr=vvilasitair=durvvâta-vêgair=iva
krûrair=vyâkulatâṁ va(ba)lêna gamitâ tanvî kathaṁ sthâsyati ||
Vidûshakaṁ prati || vayasya samâhûyatâṁ Kalyâṇavatî ||

V i d û || [(e)] Hî hî jâṇe vayassena vvavasidaṁ[1]) ṇia-vivâha-kajjeṇa | tâ amhâṇaṁ chira-vaḍḍhidâ dâṇi phalaṁtu khaṁḍa-laḍḍuâiṁ maṇoraha-ddu[mâ] ||

9. *ity=uktvâ nikkramya*[2]) *Kalyâṇavatyâ saha praviśati* ||

R â j â || Kalyâṇavati ih=âsanê[3]) upaviśyatâṁ ||

K a l y â ṇ a || *tathâ karôti* ||

R â j â || *Kalyâṇavatyâḥ Śaśiprabhâ-svarûpam=âgamana-prayôjanaṁ cha sarvvaṁ nivêdya* [||*] Kalyâṇavati vraja tvam=avanipatêr=V a s a n t a p â l a s y a putrîm=asmad-vachanâd=anumôdayitum=â-

10. râdhayituṁ cha || idaṁ=ch=âsmat-saṁdishṭaṁ râjaputrî śrâvayitavyâ ||

Drutataram=itaḥ kâṁtê viśvaiḥ samaṁ vahir=iṁdriyaiḥ
kvachid=api manô=smâkaṁ nîtaṁ tvayâ prathamaṁ haṭhât |
anujigamishôr=jjîvasy=aitâny=ath=âsya Śaśiprabhâ-
vachana-vihitâd=âśâ-taṁtôr=abhûd=avalaṁva(ba)naṁ ||

idaṁ ch=âgrataḥ karttavyam=asmadîyam ||

11. vijñapanîyâ râjaputrî yathâ T u r u s h k ê n d r a-vigraha-prasaṁgêna drutataram=êv=âgatya dêvi bhavatîṁ prasâdayishyamaḥ || yatas=T u r u s h k a r â j ô=py=asmân=prati prachalitaḥ śrûyatê ||

K a l y â ṇ a v a t î || [(f)] Jaṁ devo âṇavedi ||

R â j â || Vayasy=âsmad-vachanâd=uchyatâṁ mahâmâtyô yath=êdam-idam-upâyan-âdy-uchitôpakaraṇa-

12. saṁpannâ kṛitvâ sa-tvaraṁ prêshyatâṁ Kalyâṇavatî ||

V i d û || [(g)] Jaṁ vayasso bhaṇedi || *iti Kalyâṇavatyâ saha nikkrântaḥ*[4]) ||

R â j â || Śaśiprabhê âvâsaṁ gatvâ vyapagat-âdhva-śramâ bha-

(*e*) Hî hî jânê vayasyêna vyavasitaṁ nija-vivâha-kâryêṇa (°ryam) | tad=asmâkaṁ chira-vardhitâ idânîṁ phalantu khaṇḍa-laḍḍukâni manôratha-drumâḥ ||

(*f*) Yad=dêva âjñâpayati ||

(*g*) Yad=vayasyô bhaṇati ||

---

1) Lies *vavasidaṁ*.
2) Lies *nishkramya*.
3) *âsana*.
4) Lies *nishkrântaḥ*.

vatu bhavatî | vayam=api mâdhyâhnikaṁ vidhâtum=uttishṭhâma *iti sarvvê nihkrântâḥ* [1]) ||

|| Tṛitîyô=ṅkaḥ samâptaḥ ||

Tataḥ pra-

13. *viśatô vaṁdinau* ||

Vaṁdinau || [(h)] Eśe śe Śâyaṁbhalîśala-śivila-ṇiveśe | edaś-śiṁ alaśkiyyamâṇa-payyaṁde kadhaṁ [lâ]ulaṁ yâṇidavvaṁ || *purô=valôkya* || vayaśśa eśe ke vi chale vva dîśadi | tâ imâdo edaśśa śivilaśśa śśalûvaṁ [2]) lâulaṁ cha yâṇiśśamha ||

Tataḥ praviśati charaḥ ||

Charaḥ || [(i)] Aśchaliyaṁ 2 aho Viggahalâa-

14. ṇaleśala-śilîṇaṁ avayyaṁdadâ || *purô=valôkya* || amhadeśîya vva kevi puliśâ peśkiyyaṁdi | yâ[ṇe] vaṁdîhiṁ edehiṁ huvidavvaṁ | (||)

Vaṁdinau | (||) [(j)] Bhadda amhâṇaṁ Tuluśkâṇaṁ deśîye vva tumaṁ peśkiyyasi | tâ kadhehi Châhamâṇa-śivila-śalûvaṁ lâulaṁ cha ||

Charaḥ || [(k)] Śuṇâdha le vaṁdiṇo śuṇâdha | hage Tuluśkalâeṇa

15. Śâaṁbhalîśalaśśa śivilaṁ peśkiduṁ peśide | taṁ cha dûśaṁchalaṁ | yado tatthastehiṁ idale puśchaṁde [3]) vi ṇi[liśkaṁ]de

(*h*) Êsha sa Śâkambharîśvara-śibira-nivêśaḥ | êtasminn=alakshyamâṇa-paryantê kathaṁ râjakulaṁ jñâtavyam || vayasya êsha kô=pi chara iva dṛiśyatê | tad=asmâd=êtasya śibirasya svarûpaṁ râjakulaṁ cha jñâsyâvaḥ ||

(*i*) Âścharyam=âścharyam | ahô Vigraharâja-narêśvara-śrîṇâm=aparyantatâ || asmaddêśîyâv=iva kâv=api purushau prêkshyêtê | jânê vandibhyâm=êtâbhyâṁ bhavitavyam ||

(*j*) Bhadra âvayôs=Turushkayôr=dêśîya [4]) iva tvaṁ prêkshyasê | tasmât=kathaya Châhamâna-śibira-svarûpaṁ râjakulaṁ cha ||

(*k*) Śṛiṇutaṁ rê vandinau śṛiṇutam | ahaṁ Turushkarâjêna Śâkambharîśvarasya śibiraṁ prêkshituṁ prêshitaḥ | tach=cha duḥsaṁcharam | yatas=tatrasthair=itaraḥ pṛichchhann=api nirîkshamâṇô=pi cha parakîya iti jñâyatê | tathâpi mayâ kim=api kim=api pratyakshîkṛitam ||

1) Lies *nishkrântâḥ*. 2) Lies *śalûvaṁ*.

3) Ursprünglich *puśchaṁdo vi ṇi[liśkaṁ]do*, aber *o* beide Male zu *e* verändert. 4) Dies ist kein correctes Sanskṛit.

vi a palakîye tti yâṇiyyadi | tadhâvi mae kiṁpi kiṁpi pachakkhîkadaṁ[1]) | (||)

V a ṁ d i n a u | (||)[(l)] Aśchaliaṁ 2 kadhaṁ bhadda tattha uvastidâṇaṁ chadulide aṇuaṁ pi tae laśkidaṁ ||

C h a r a ḥ || [(m)] Suṇâdha[2]) le vaṁdiṇo ya-

16. dhâ mae taṁ śivilaṁ ṇilûvidaṁ | hage khu śili-Śomeśalaevaṁ peśkiduṁ vaññaṁdaśśa śaśtaśśa[3]) milide milia a ettha paviśiûṇa bhiśkaṁ paśtiduṁ[4]) lagge | tado yaṁ yaṁ yâṇidaṁ taṁ taṁ tumhâṇaṁ yahastaṁ kadhîyadu || maa-vâli-nijjhala-kalâla-kaḍastalâṇaṁ kaliṁdâṇaṁ dâva śahaśśaṁ | tulaṁgâṇaṁ u-

17. ṇa laśkaṁ | ṇalâṇaṁ uṇa yujjha-śkamâṇaṁ daha laśkâiṁ ti || kiṁ vahuṇâ yaṁpideṇa | taśśa kaḍaaśśa pâśa-stide śâale vi śuśke bhodi || *vâ(bâ)hum=utkshipya* [||*] edaṁ cha taṁ lâulam=[5]) *iti darśayati* ||

V a ṁ d i n a u || [(n)] Śâhu le chalâ śâhu ||

C h a r a ḥ || [(o)] Ale le vaṁdiṇo | chilaṁ khu me ṇia-stâṇâdo ṇiśśalidaśśa | tâ ha-

18. ge vaññâmi ||

V a ṁ d i n a u || [(p)] Gaścha le chalâ gaścha (||) *iti charô niḥkrântaḥ*[6]) ||

V a ṁ d i n a u || *puratô gatv=âvalokya* || [(q)] Taṁ ṇidaṁ lâula-duvâ-

---

(*l*) Âścharyam=âścharyam | kathaṁ bhadra tatr=ôpasthitânâṁ chatura-svabhâvê (?)=ṇukam=api tvayâ lakshitam ||

(*m*) Śriṇutaṁ rê vandinau yathâ mayâ tach=chhibiraṁ nirûpitam | ahaṁ khalu śrî-Sômêśvaradêvaṁ prêkshituṁ vrajataḥ sârthasya militô militvâ ch=âtra praviśya bhikshâṁ prârthayituṁ lagnaḥ | tatô yad=yaj=jñâtaṁ tat=tad=yuvayôr=yathârthaṁ kathyatâm | madavâri-nirjhara-karâla-kaṭasthalânâṁ karîndrâṇâṁ tâvat=sahasram | turaṅgâṇâṁ punar=laksham | narâṇâṁ punar=yuddha-kshamâṇâṁ daśa lakshâṇ=îti | kiṁ bahunâ jalpitêna | tasya kaṭakasya pârśva-sthitaḥ sâgarô=pi śushkô bhavati || êtach=cha tad=râjakulam ||

(*n*) Sâdhu rê chara sâdhu ||

(*o*) Arê rê vandinau | chiraṁ khalu mê nija-sthânân=niḥsṛitasya | tasmâd=ahaṁ vrajâmi ||

(*p*) Gachchha rê chara gachchha ||

(*q*) Tad=idaṁ râjakula-dvarâṁ tasmâd=iha sthitâv=êva nija-râja-

---

1) Lies *pachchakkhî°*. 2) Lies *śuṇâdha*.
3) Ursprünglich *śâśtaśśa*, aber zu *śaśtaśśa* verändert.
4) Ursprünglich *pâśtiduṁ*, aber zu *paśtiduṁ* verändert.
5) Lies *lâulaṁ*. 6) Lies *nishkrântaḥ*.

laṁ tâ idha stidâ eva nia-lâa-ppahâvaṁ payâsemha || *punar=avalôkya* || *sânaṁdaṁ* || eśe śe Śâaṁbhalîśale astâṇa-stide pulado dîśadi || *Tataḥ praviśati râjâ vibhavataś=cha pari-*

19. *vâraḥ* ||

Râjâ || *svagataṁ* || Ahô vaichitryaṁ ||

Âdâv=amṛitamay-âṁvu(bu)dhi-vigâhana-pratimam=avanipati-duhituḥ |

smaraṇaṁ davadahan-ôdara-nipâta-nibham=agratô bhavati || [1])

. . . .

21. Vigraharâjadêvaḥ ||

22. *pratîhâram=âkârya* | Pratîhâra | dâpyatâm=êtayôr=yathâ-dîya-mânaḥ kanaka-vasan-âdis=tyâgaḥ ||

Pratîhâraḥ || Yad=âdiśati dêva *iti vaṁdibhyâṁ saha niḥkrân-taḥ* [2]) ||

Râjâ || Ahô n=âdy=âpy . . . py=âgatô Hammîra-kaṭak-âvâsa-svarûpa . . . kaḥ ||

Praviśya charaḥ || [(r)]Jayadu 2 devo | deva deveṇa Hammîra-kaḍa-

23. a-vuttaṁtaṁ jâṇiduṁ parassiṁ diṇe pesido saṁpadaṁ âado mhi ||

Râjâ || Bhadra kathaya kiyat=Turushkêśvara-śivi(bi)raṁ kutra ch=êti ||

Charaḥ || [(s)]Deva ||

Agahida-gaa-raha-turaa-ppavîra-saṁkhaṁ a[ṇâ]a-peraṁtaṁ |

amuṇida-pavesa-ṇiggama-maggaṁ riurâiṇo kaḍaaṁ ||

âvâso uṇa kalle ido Vavveraâdo joa-

---

prabhâvaṁ prakâśayâvaḥ | êsha sa Śâkambharîśvara âsthâna-sthitaḥ puratô dṛiśyatê ||

(r) Jayatu jayatu dêvaḥ | dêva dêvêna Hammîra-kaṭaka-vṛit-tântaṁ jñâtuṁ parasmin=dinê prêshitaḥ sâmpratam=âgatô=smi ||

(s) Dêva

Agṛihîta-gaja-ratha-turaga-pravîra-saṁkhyam=a[jñâta-]pary-antam |

ajñâta-pravêśa-nirgama-mârgaṁ ripurâjasya kaṭakam ||

âvâsaḥ punaḥ kalya itô Vavvêraâd=yôjana-traya âsît | adya punas=tên=aiva śibirêṇa samam=âgamya tad=itô yôjan-aikên=âvâsitaṁ prêk-shy=âgatô=smi ||

---

1) Der Rest der Zeile 19 und die beiden folgenden Zeilen haben so arg gelitten, daß es unmöglich ist, einen auch nur einigermaßen verständlichen Text herzustellen. 2) Read *nishkrântaḥ*.

24. ṇa-ttae âsi | ajja uṇa teṇa jjeva sivireṇa samaṁ âachchhiûṇa taṁ iďo joaṇekkeṇa âvâsidaṁ pekkhiûṇa âado mhi ||

R â j â || Bhadra kîdṛiśî punas=tatra kiṁvadantî ||

Charaḥ || (t) Deva jujjhatthaṁ saalâiṁ pi seṇṇâiṁ saṇṇaddhâiṁ kâriûṇa ettomuhaṁ chalaṁteṇa H a m m î r e ṇ a tumhâṇaṁ pâse keṇa
25. vi vaaṇeṇa dûďo pesidavvo tti kehiṁpi jaṇehiṁ jaṁpijjadi ||

R â j â || Bhadra gachchha tvaṁ viśrâmây=êti *charô niḥkrâṁtuḥ* [1]) ||

R â j â || Kaḥ kô=tra bhôḥ kaḥ kô=tra ||

Praviśya p u r u s h a ḥ || (u) Eso mhi âṇavedu ďevo ||

R â j â || Âhûyatâṁ mâtulaḥ S i ṁ h a v a(b a) l ô râjâ ||

P u r u s h a ḥ || (v) Jaṁ devo âṇavedi || *iti niḥkrâṁtaḥ* [1]) ||

Tataḥ pra-
26. *viśati Siṁhava(ba)laḥ* ||

R â j â || *sâdaram=âsanaṁ pradâpya* | *sarvvaṁ vṛittâṁtaṁ nivêdya* [||*] Mâtula kim=idânîṁ vidhêyaṁ ||

S i ṁ h a v a(b a) l a ḥ ||

Tair=mmâtaṁgair=haribhir=api tais=tair=bhaṭ-aughair=anîkaṁ
H a m m î r a s y a prasarad=akhilâṁ mêdinîm=âvṛiṇôtu |
vîrair=êtais=tad=api samarât=tvat-pratâpa-pravṛiddhi-
prâpt-ôtsâhair=iha na hi bhavê-
27. t=tâvakaiḥ kṛityam=anyat ||

R â j â || *maṁtriṇaṁ Śrîdharaṁ prati* || Bhavatâm=atra kiṁ pratibhâti ||

Ś r î d h a r a ḥ || Dêva ||

Vîrâṇâṁ cha vipaśchitâṁ cha gaṇanâsv=âdyas=tvam=êv=âdhunâ
vidvadbhir=ggaṇitô=si têna bhavataḥ kvâpy=asti na dvâparaḥ |
kiṁtv=âtmîyatayâ vidhêyam=adhunâ yat=pṛishṭam=asmâdṛiśâṁ
sva-prajñâm=anusṛitya tat=kathayatâṁ
28. kshaṁtavyam=îśa tvayâ ||

R â j â || Mahâmatê=smâkaṁ tvam=êva maṁtriṇâm=agraṇîs=tat=kim=êvam=abhidhîyatê ||

(*t*) Dêva yuddhârthaṁ sakalâny=api sainyâni saṁnaddhâni kârayitv=aitad-abhimukhaṁ chalatâ H a m m î r ê ṇ a yushmâkaṁ pârśvê kên=âpi vachanêna dûtaḥ prêshayitavya iti kair=api janaiḥ kathyatê ||

(*u*) Êshô=smi âjñâpayatu dêvaḥ ||

(*v*) Yad=dêva âjñâpayati ||

---

1) Lies *nishkrântaḥ*.

Śrîdharaḥ || Dêva saty=upâyâṁtara-saṁbhavê yuddham=anupâya iti dharmm-ârtha-śâstra-vidâṁ samayaḥ ||

Râjâ || Bhavêd=êvaṁ yady=upâyâṁtaram=atra syât | kiṁcha || durâtmânaṁ Mlêchchharâjaṁ praty=upâyâṁtar-ânusaraṇê ma-
29. hatî vrîḍâ ||

Śrîdharaḥ || Dêva tathâpi jagad-êkavîrêṇa Hammîrêṇ=âsaṁkhya-sainya-svâminâ saha yuddh-âvataraṇaṁ katham=anumanyâmahê ||

Râjâ ||
Akîrttiḥ kâpy=uchchaiḥ suhṛid-abhayadâna-vrata-hatis=
tathâ dhvaṁsas=tîrtha-dvija-sumanasâṁ vîrya-vigamaḥ |
mam=aitêshu vyastêshv=api ◡◡ [a]sahyêshu sakalân=
imân=aṁgî-
30. karttuḥ kathayata vidhêyaṁ kim=asubhiḥ ||

Siṁhava(ba)laḥ || Mahârâja ||
Svayaṁ chêd=urvvîśaiḥ samitishu mahâ-sâhasa-rasair=
ajasraṁ yôddhavyaṁ tad=iha karaṇîyaṁ kim=aparaiḥ |
saśastrair=nniḥsaṁkhyair=vvijita-va(ba)hu-saṁkhyaiś=cha subhaṭair=
mmad-ândhair=mmâtaṁgaiḥ pavana-javanair=vvâjibhir=api ||
Api [cha] |
Kshâtraṁ dhâma tav=êdam=adbhutatamaṁ tva-
31. t-saṁnidhi-sthâyinâṁ
vîrâṇâṁ tanushu dhruvaṁ pariṇataṁ yâsyaty=asaṁkhyâtatâm |
dîpâd=êkata êva [bha]dra timira-pradhvaṁsa-dhîraṁ ma[ha]ḥ
svîkurvann=iha hi pradîpa-nivahô dṛishṭâṁtatâm=âśritaḥ ||
Api cha |
Yudhyasê svayam=êva tvaṁ sannidhi-sthê=pi chên=mayi |
dakshiṇa-karêṇa sva-vâ(bâ)hû ni[rddi]śya |
tad=dôshṇôr=ddhig=imaṁ bhâraṁ dhanushi śrâṁ-
32. tayôr=vṛithâ ||

Praviśya pratîhâraḥ || Deva Turushkarâjêna prahitaḥ praśâṁta-vêshaḥ kô=pi viśishṭa iva pumân=saparichchhadô dvâri samâgatas=tishṭhati ||

Râjâ || *Siṁhava(ba)la-Śrîdharâv=uddiśya* || Kim=ih=âpi têna pravêshṭavyaṁ ||

Tau dvâv=api || Kô dôshô râja-sadanaṁ h=îdaṁ tat=prayôjan-ânurôdhataḥ sarvvair=api pravêshṭavyam=êva ||

33. [Râjâ] ‖ *pratîhâraṁ prati* ‖ Pravêśaya tarhi drutaṁ ‖

Pratî ‖ Yad=âdiśati dêva *iti nirggatya dûtêna saha praviśati* ‖

Dûtaḥ ‖ *samantatô=valôkya* | *sânaṁdaṁ* ‖ Ahô sarvv-âṁga-suṁdarâbhir=vvibhûtibhiḥ saṁpûrṇṇaṁ râja-maṁdiraṁ ‖ tathâ hi ‖

Iha kari-nikarair=ih=âyudh-âḍhyaiḥ
purusha-varair=iha vârasuṁdarîbhiḥ |
iha vi-

34. ◡◡◡ — ◡ bhir=nnarêṁdra-
praṇayi-janair=iha râjatê nṛipa-śrîḥ ‖

purô râjânam=avalôkya ‖ *sânaṁdâdbhutaṁ* ‖ ahô sakala-jana-vilakshaṇaḥ kô=py=ayam=apûrvva êv=âsya nṛipatêḥ sannivêśaḥ ‖ *vimṛiśya* ‖ athavâ ‖ ayaṁ tâvad=akhilam=api râja-maṁḍalam=atiśêta êva prabhâvêna | kiṁtv=aparêshâm=api râjñâṁ kṛitê . . . .

35. . . . . êva paurâṇikaḥ pravâdaḥ ‖ katham=aparathâ têshâm=idaṁ vaiśvarûpyaṁ ‖ tathâ hi ‖

Chârâḥ kârya-vilôkana-śravaṇayôś=chakshuḥ-śrutî vâg=vayaṁ
vaktuṁ saṁdhi-virôdha-karmma samara-krîḍâsu vîrâḥ karâḥ |
kṛity-âkṛitya-vivêchana-vyatikarê san-maṁtriṇô mânasaṁ
hasty-aśvaṁ kramituṁ payôdhi-raśanâm=êtâṁ mahî-

36. — ◡ — ‖

. . . . vyâhata-vidhêya-dvay-ôpasthânêna paryâkulô=smi ‖ tathâ hi ‖

Sâmarthyaṁ yadi na prabhôr=abhidadhê yâsyaṁti tad-vidvishaḥ
saṁdhêyatvam=asâdhvasâḥ katham=atha prakhyâpayê
‖ *Vigraharâjam=uddiśya* ‖
syât=tadâ |
âkṛity=aiva vibhâvyamâna ◡◡ [kaṁ] dhâm=êdam=âvirbhavat-
kôpaṁ kasya vidhêyam=ity=ubhaya-

37. Mahîpati-sutêna paṁdita-Bhâskarêṇa svayam=âlikhy=ôtkîrṇṇâni aksharâṇi ‖

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

13. September. № 14. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 10. Juni.

G. Fr. Grotefend's erste Nachricht von seiner Entzifferung der Keilschrift.

Zum Abdruck gebracht von W. Meyer.

Als ich das Archiv der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen untersuchte, fand ich manche für die Geschichte der Wissenschaften werthvollen Stücke. In dem Verzeichniß der im Preußischen Staat vorhandenen Handschriften werden dieselben beschrieben werden; hier werden zunächst Grotefend's Abhandlungen mitgetheilt, denen sich ein unbekannter Aufsatz von Gauss anschließen wird.

In der Gesellschaft der Wissenschaften war es früher Gebrauch, daß über Arbeiten, welche Nichtmitglieder schriftlich einsendeten, nur in den Sitzungen mündlich berichtet oder im besten Falle durch einen kurzen Auszug in den Götting. Gelehrten Anzeigen dem Publikum Nachricht gegeben wurde. So ging es wohl auch mit den beiden erwähnten Schriftstücken.

Das erste Schriftstück ist der Denkstein für einen wichtigen Fortschritt der Sprachwissenschaft. Inschriften ähnliche Ein-

meißelungen in den Palästen von Persepolis hatten im vorigen Jahrhundert C. Niebuhr und Andere in mehr oder minder treuen Nachbildungen veröffentlicht; ähnliche Stücke aus Babylon waren von Anderen bekannt gegeben worden. Die Kenner der orientalischen Sprachen mühten sich jene Einmeißelungen zu deuten. Doch vergebens; ja Manche konnten die Behauptung wagen, jene Einmeißelungen beständen überhaupt nicht aus Schriftzeichen; es seien nur Schnörkel oder Spielereien. Eben hatten zwei angesehene Orientalisten, Tychsen in Rostock und Münter in Kopenhagen, einen vergeblichen Versuch gemacht, das Räthsel zu lösen. Da übergab G. Fr. Grotefend, der 1775 in dem benachbarten Münden geboren, seit 1797 Lehrer am Göttinger Gymnasium war, im September 1802 der Gesellschaft der Wissenschaften einen kleinen lateinischen Aufsatz, dem rasch noch drei weitere folgten.

Fast ohne jede Kenntniß orientalischer Sprachen, aber geschult durch das Studium der klassischen Philologie und insbesondere durch Lieblingsstudien, welche in einer kleinen Schrift De pasigraphia sive de scriptura universali (Göttingen 1799) Ausdruck gefunden hatten, hat der junge Mann versucht, das Räthsel zu lösen: und es ist ihm gelungen. Er wies nach, daß jene Einmeißelungen wirklich Inschriften seien, welche aus Buchstaben beständen; viele Buchstaben dieses neuen Alphabetes, der Keilschrift, bestimmte er und stellte fest, daß die Sprache dieser Inschriften dem Zend sehr nahe stehe.

Durch die glänzende Entdeckung Grotefend's ist der Zugang zu einem wichtigen Gebiet der Sprachwissenschaft eröffnet worden. Aber über jene vier kleinen Abhandlungen, in welchen Grotefend seine Entdeckung zuerst darlegte, waltete ein ungünstiges Geschick. In den Götting. Gel. Anzeigen wurden nur kurze Auszüge aus denselben veröffentlicht, welche Tychsen in Göttingen verfaßt hat. Auf die Nachricht von der ersten Abhandlung erbat Silvestre de Sacy in Paris sich eine Abschrift derselben und hat in der Lettre à M. Millin, sur les inscriptions des monumens Persépolitains p. 21—32 (= Magasin Encyclop., année VIII t. V p. 438), den Inhalt dieser Abhandlung in sehr geschickter Darstellung wiedergegeben und durch eine Schrifttafel erläutert. So hat eigentlich S. de Sacy Grotefend's Entdeckung in die gelehrte Welt eingeführt. Grotefend selbst arbeitete still weiter. Nur in einer Recension im Intelligenzblatt der Jenaischen Allg. Literaturzeitung 1804 no. 101 Sp. 825—830 sprach er sich über die babylonische Keilschrift aus.

Heeren bestimmte dann Grotefend, daß er seine Entdeckung

kurz darstellte in einem Anhange zum 1. Bande von Heeren's „Ideen über die Politik, den Verkehr und den Handel der vornehmsten Völker der alten Welt“. Diese Darstellung „Ueber die Erklärung der Keilschriften und besonders der Inschriften von Persepolis“ erschien zuerst 1805 (Ideen, 2. Aufl., I S. 931—960), dann wenig vermehrt 1815 (3. Aufl., I S. 563—609); Heeren gab dazu Schrifttafeln und einige Zusätze aus Grotefend's „der K. Societät vorgelegtem Aufsatze“. Diese für das gebildete Publikum berechnete Darstellung der Entdeckung ist neben jenen Auszügen in den Gött. G. Anzeigen von 1802 und 1803 und S. de Sacy's Lettre à Millin die Quelle dessen, was wir bisher über Grotefend's Entdeckung wußten (vgl. z. B. Fr. Spiegel, Die altpersischen Keilinschriften, 2. Aufl. 1881, S. 133—148).

Jene vier lateinischen Aufsätze, welche Grotefend 1802 und 1803 der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt hatte, waren während des Suchens und Findens entstanden und natürlich mit manchen Irrtümern angefüllt, die Grotefend später nicht abdrucken lassen wollte. So sind diese Aufsätze in ihrem Wortlaut unbekannt geblieben. Sie sind aber die Inkunabeln eines jetzt schon bedeutenden Zweiges der semitischen Sprachwissenschaft. Deßhalb ist schon öfter nach ihnen gesucht worden und deßhalb sollen sie jetzt in ihrem vollen Wortlaute veröffentlicht werden, nicht als eine Quelle neuen Wissens, sondern als ein historisches Denkmal. Gerade die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ist hiezu ebenso berechtigt als verpflichtet[1]).

Auszüge aus diesen vier Aufsätzen sind (von Th. Chr. Tychsen) in den Götting. Gelehrten Anzeigen veröffentlicht und zwar:

aus no. I vom 4. Sept. 1802 in den G. G. Anz. 1802 S. 1481/7 (dazu ein viel ausführlicherer Auszug von S. de Sacy in der Lettre à M. Millin p. 21—32), aus no. II vom 2. Oct. 1802 in G. G. Anz. 1802 S. 1769—1772 (das Zend-Alphabet A und B ist auf einer Tafel zu Heeren's „Ideen“ nachgebildet), aus no. III vom 13. Nov. 1802 in den G. G. Anz. 1803 S. 593—595, wo fast nur die Beilage, diese aber nahezu vollständig, mitgetheilt ist, aus no. IV vom 20. Mai 1803 in G. G. Anz. 1803 S. 1161—1164.

Nach einem beiliegenden Briefe Grotefend's an Heyne (Frankfurt 6. Jan. 1805) sind die hier vorliegenden Reinschriften gefertigt von Johannknecht und von Grotefend durchcorrigirt. Bemerkt

1) Bei der Correctur hat mich gütigst unterstützt Bibliothekar Dr. J. Flemming in Bonn, dem wir auch die genauen Nachrichten über Grotefend's Leben und Schriften in den Beiträgen zur Assyriologie I S. 80 verdanken.

sei noch, daß in dem Archiv der Gesellschaft der Wissenschaften ziemlich viele Briefe Grotefend's an die Gesellschaft sich fanden, welche seine in den Jahren 1847—1854 in den Schriften der Gesellschaft erschienenen Abhandlungen über Keilinschriften betreffen.

(1) GEORGII FRIDERICI GROTEFEND COLLABORATORIS SCHOLAE GOTTINGENSIS

PRAEVIA

DE CUNEATIS, QUAS VOCANT, INSCRIPTIONIBUS PERSEPOLITANIS LEGENDIS ET EXPLICANDIS RELATIO.

Gottingae a. d. IV. Septemb. 1802.

Praemonenda.

Mense Julio, quum amicus meus Fiorillo, Bibl. Reg. a secretis, inter ambulandum mecum disputaret, num sensus scriptorum erui posset, quorum et alphabetum et sermo prorsus incognita essent: ego, qui jam a pueris sententias linguae vernaculae occultis notis expressas explicare consueveram, fieri sane illud posse censebam. Quum ille responderet, me tum maxime hoc ipsi probaturum, cum e. g. unam ex cuneatis inscriptionibus explicare potuissem: hoc pollicitus sum, si opem suam mihi praestare notitiasque omnes ad illas illustrandas pertinentes mecum communicare vellet. Quo facto, amici mei ope, scripturam illam, quam jam O. G. Tychsen V. Cl. legere conatus erat, tanquam facillimam omnium, aggressus sum, et ita me adjuvit fortuna, ut post paucas hebdomades, tentatis omnibus eruendi artibus, maximam inscriptionum partem interpretari possem. Hoc, ut mihi ipsi, sic omni reipublicae literariae gratissimum fore ratus, praeviam hanc atque succinctam relationem Virorum Doctissimorum judicio subjicere non dubitavi. Sunt quidem haud pauca, quae nondum satis examinata mihi videantur; at veritus, ne nimis diu tacerem, quae quam maxime mature publicari interesset, veniam eruditorum, si qua falsa statuissem, precari, quam diutius silere, malui. Demonstrabo igitur, quam paucissimis potero, quae, qualia, qua ratione eruerim.

I. De inscriptionibus cuneatis in genere.

1. *Figurae earum sunt notae scriptoriae.*

Haec vix monerem, nisi qui temere contra statuissent, figuras istas, non nisi ornamenta quaedam esse, vel vermium et insecto-

rum effectus, vel ad summum signa numerorum, quae explicari paullum interesset: ita luculenter ac manifesto certae figurae certis modis plus vicies ad verba designanda construuntur.

2. *Tria inscriptionum genera diversi prorsus alphabeti atque sermonis semper sibi respondent.*

Sunt quidem plura inscriptionum genera cuneatarum, quae in Babylonica aliisque regionibus Orientis inveniantur; sed in Persepolitanis inscriptionibus, quas explicandas mihi proposui, tria tantum conspicua sunt, quae verbo tenus fere sibi respondent, ut adeo, uno intellecto genere, ceterorum quoque sensum noverimus. Urna illa, quam de Caylus (Recueil d'antiquités. T. V. pl. XXX.) publicavit, verum eorum ordinem constituit. Ut igitur clarum sit, quae inscriptionum genera sub *primae*, *secundae*, *tertiae scripturae* nominibus intelligam, ipsam urnae inscriptionem, ex comparatione Niebuhr. Tab. XXIV. G. F. E. init. et Bruin. nr. 131. A. lin. 6. et 10 B. lin. 3. 4. et 9. med. C. lin. 3. fin. et 8. med. emendatam appono.

Scriptura prima:

Scriptura secunda:

Scriptura tertia:

Jam facile quisque animadvertet, inscriptiones Niebuhr. (Tom. II.) Tab. A. B. G. H. I. ad primam, D. F. K. ad secundam, C. E. L. ad tertiam scripturam pertinere.

Inscriptio A. respondentibus scripturis caret, ut eadem Bruiniana n. 126: at adsunt istae inscriptioni prorsus simili apud De Bruin n. 131. Inscriptioni H. respondet, ni fallor, tertiae scripturae inscriptio L. et inscriptioni I. secundae scripturae inscriptio K. Inscriptiones Bruinianae nr. 132. eaedem sunt, quas Niebuhr Tab. B. D. C. exhibet: et inscriptio excisi lapidis n. 137. finis est inscriptionis nr. 134. scripturae tertiae, quam et Chardin tab. LXIX, 5. et Kaempfer p. 347. depinxerunt. Inscriptio vero in talaris regii plicaturis n. 133. quam de Bruin pag. 273. ex disjectis membris se recomposuisse affirmat, tam male composita est, ut fragmina duarum diversarum inscriptionum trilinguia, quae ex comparatione Niebuhr. Tab. B. D. C. et G. F. E. facile restitui possunt, in unum corpus coaluerint. Superiores enim quatuor lineae priorem trilinguem inscriptionem continent, eaeque ita legendae sunt, ut a quarta

linea fiat initium, et tertia quartam, altera tertiam, prima secundam sequatur. Eodem fere modo fragmina quaedam alterius inscriptionis trilinguis composita sunt, ut primum linea septima, deinde initium quintae sextaeque, tum finis sextae, quintaeque legi debeat.

3. *Inscriptionum illarum, quas explicandas mihi proposui, figurae, non verba vel syllabas, ut Sinensium et Japonensium, sed literas, ut nostratium, designant.*

Si, quod facile est observatu, in inscriptionibus primi ordinis cuneolus obliquus, et in secundae scripturae inscriptionibus saepe cuneolus rectus vocabulorum finem designat: vix credibile est, linguam quondam fuisse, cujus voces ad decem usque syllabas accreverint. Praeterea flexiones quaedam vocabulorum, vel quatuor figuris constant, per quas literas, non syllabas, significari, vix dubitari potest. Si quis autem verborum signa illa esse putet, quaero, an verisimile sit, eandem vocabulorum seriem, paucis tantum interjectis, toties repeti, quoties signa [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. similiaque repetantur. Praecipuum autem argumentum, signis modo laudatis non vocabula, sed elementa, exprimi, est id, quod e comparatis Debruin. n. 131. et Niebuhr. Tab. XXIV. A. inscriptionibus efficiatur, notam [cuneiform]. abbreviationem esse supra laudati nominis, quod interdum flexionibus [cuneiform]. vel [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. vel [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. augetur. Ad hoc quadraginta signa, et quae hunc numerum excedunt, quae ex unoquoque inscriptionum genere colligere licet, vocabulariae cuidam vel syllabali scripturae vix sufficiunt.

4. *Inscriptiones cuneatae omnes, quas novi, a sinistra ad dextram, eadem semper horizontali linea, neque κιονηδόν neque βουστροφηδὸν, legendae sunt.*

In omnibus inscriptionibus, si a Bruiniana n. 133. discesseris, superior ordo horizontalis initium facit, ut e comparatione plurium inscriptionum, praecipueque urnae Caylianae et Niebuhrianae tab. XXIV. G. F. E. facile efficitur: ac si qua ad perpendiculum exacta videatur, quemadmodum ea, quae apud Kaempfer p. 347. ad fenestras conspicitur, figurae ita conversae sunt, ut linea horizontalis, quam et Bruin n. 134. retinuit, permaneat. Deinde in omnibus inscriptionibus cuneatis Persepolitanis vocabula in linearum horizontalium extremitatibus ita semper dissecantur, ut dextra superioris lineae pars cum sinistra inferioris lineae parte cohaereat, id quod primus intuitus verbi supra laudati, et quae ab illo

flectuntur, in Niebuhr. tab. B. G. docet. Praeterea flexiones nominis hujus laudatae non in sinistra, sed in dextra semper parte, tanquam fine vocabuli, adjiciuntur. Ut autem apertius ostendam, hoc non solum in primae scripturae genere, sed in ceteris quoque fieri, nomina ipsa cum flexionibus apponam, ex Niebuhr. tabb. B. D. C. vel G. F. E.

Prima scriptura:

[cuneiform signs]

vel si eadem abbreviatione supra descripta scribamus:

Prima scriptura:

[cuneiform signs]

Secunda scriptura:

[cuneiform signs]

Tertia scriptura:

[cuneiform signs]

Quum autem post citata verba in inscriptionibus G. F. E. forte fortuna nomen aliquod sequatur, quod inscriptionum B. D. C. initium facit, flexione quadam excepta: D. Lichtenstein V. S. R. auctore forsan Wahlio, ex eo, quod in tabula C. ante figuras [cuneiform signs]. quae in tabula E. initio secundae lineae leguntur, ejusmodi signa praecedant, quae in tertiam tabulae E. lineam ad assem usque quadrent, hoc indicari statim conjecit, inscriptiones istas a dextra ad sinistram legi debere. At nimis mature dijudicantem pro argumento illum accepisse, quod casu aliquo fortuito factum est, ex eo jam intelligitur, quod apud Bruin. n. 131. inscr. C. l. 9. et 10. dextra superioris lineae pars eodem modo cum sinistra inferioris parte cohaeret, quo ille in inscriptione Niebuhr. E. sinistram superioris ordinis partem cum dextra inferioris parte conjungendam putavit. Ceterum si vel inscriptionem urnae Caylianae vel Bruin. tabulam n. 131. inscr. C. l. 3. 5. aut 8. init. cum Niebuhr. tab. E. comparasset Lichtenstein: vidisset certe, initium sinistrum secundae lineae cum primae, nec tertiae, lineae fine dextro cohaerere. Ex his jam dijudicent eruditi, quamvis plura moneri possent, nisi id spatii angustia vetaret vel superfluum esset, quid ab eo exspectandum sit, qui se casu fortuito, non ratione, regi profitetur.

II. De primae scripturae inscriptionibus in specie.

1. *Prima, quam diximus, scriptura ad vocales literas designandas peculiares figuras adhibet.*

Jam Münter, homo acutissimus aeque ac modestissimus, observavit, in inscriptionibus primae scripturae, de quibus jam solis sermo esto, nonnulla signa prae ceteris tam frequenter occurri, ut dubitari nequeat, quin sint figurae vocalium. Praeterea quum Niebuhr. Tab. XXIII. plus quadraginta figuras collegerit, inter quas tamen nonnulla sphalmata, nonnulla quoque ejusdem valoris signa, aliis contra vel corruptis vel omissis, occurrunt: hunc numerum syllabali quidem scripturae minorem, scripturae contra vocalibus destitutae majorem esse, facile quisque intelligit. Verum tamen quinque vocales non sufficiunt, ad numerum istum explendum; statuendum est igitur, tam longas, quam breves vocales, priscarum linguarum persicarum more, peculiaribus signis notari.

2. *Sermo scripturae primae est iste, quem Zend vocant.*

Priusquam hoc probem, praemonendum est, haud difficulter erui, quaenam figurae pro vocalibus sint accipiendae. Pertinent huc figurae:

𐎢., quae quam maxime occurrit, atque, ni fallebatur Niebuhr, in tab. I. l. 8. sola efficit vocabulum.

𐎠., quae initio inscriptionis A apud Niebuhr. sola efficeret vocabulum, ni inscriptio ista mutilata esset; sed ex eo vocalis illa cognoscitur, quod raro in initio, plerumque vero in fine vocabulorum tanquam flexio quaedam est obvia, et ita quidem, ut in ultima linea inscriptionis B. geminetur.

𐎡., quae non tantum quam saepissime occurrit, sed etiam apud Niebuhr. Tab. XXIV. A. lin. 19. in principio vocabuli geminatur.

Eodem modo ceterae vocales possunt agnosci, sed hae sufficiunt ad id, quod professus sum, probandum. Illae vocales enim toties prae ceteris notis occurrunt, ut facile intelligatur, sermonem nostrae scripturae vocalibus quam maxime abundasse: quin plurimae voces solis e vocalibus constant, quarum has citasse sufficiat: 𐎠. 𐎢. 𐏐. 𐎢. 𐎠. 𐏐. 𐎠. 𐎢. 𐎠. 𐏐. 𐎡. 𐎠. 𐎢. 𐎠. 𐏐. 𐎡. 𐎠. 𐎢. 𐏐. 𐎡. 𐎠. 𐎠. Hunc vero characterem esse linguae Zendicae, quo ab aliis linguis differat, quis est, qui ignoret? Sunt quidem multa, quae in linguam Samscrdamicam quadrent, ut, lecto Münteri libello, paullum dubitarem, utrum Zendicam an Samscrdamicam linguam cuneolis istis expressam esse censerem. At

quum mox animadverterem, in Samscrdamico sermone plures saepe consonantes horrido sono, ut in ipso ejus nomine, aggregari, quod nusquam in nostris inscriptionibus observaveram; quum praeterea parum probabile esset, Samscrdamica verba in monumentis persicis esse expressa: haud cunctanter conjeci, sermonem esse Zendicum, et quod ratione conjeceram, experientia docuit.

3. *Omnes inscriptiones, quarum sensum hucusque perspexi, vel ad Darium vel ad Xerxem pertinent.*

Ea, quae Heeren noster, V. Clar., tam acute de monumentis Persepolitanis edocuit, et post eum Münter probavit, lucide satis indicant, inscriptiones illas antiquas, monumentis ipsis coaevas, ad priscum aliquem Persarum regem inter Cyrum et Alexandrum esse referendas. Quomodo vero experientia mihi Darium Xerxemque monstraverit, ipsa de ratione agendi nostra relatio docebit.

III. De ratione inscriptionum primae scripturae enodandarum.

Sufficere possit videri, si, quae eruerim, indicem, quum eventus ipse veritatem eorum, quae periculi faciendi causa statuerim, probet: ut vero eruditis simul viam ostendam, qua Orientalium linguarum imperitus antiquissima Orientis scripta detegere potuerit, ipsam meam rationem agendi in medium proferam.

1. Primum inscriptionibus illis, quas Tychsen non legere solum, sed interpretari etiam conatus est, comparatis cum illis, quas de Sacy vere detexit, animadverti statim, primum in utraque inscriptione vocabulum, quod Tychsen *Osch patscha* et *Malkéusch* legit, nomen regis: illud contra vocabulum, quod Tychsen *Osch Aksak* legit, ejus titulum, *regem* significantem, esse. Nam illud ipsum, quod hoc vocabulum in omnibus inscriptionibus toties, etiam cum flexionibus casuum, repeteretur, et praecedens tantum vocabulum variaret, indicio erat, id nomen proprium aliquod esse non posse; praesertim quum, quod supra jam monui, vocabulum hoc, ut notus aliquis titulus, in aliis inscriptionibus abbreviari soleret.

2. Deinde videbam, nomen illud, quod in principio alterius inscriptionis positum est, in altera post *regis regum* titulum cum parva quadam genitivi flexione scriptum esse; ex quo colligebam, reges in his inscriptionibus laudatos patrem esse ac filium. Quum igitur Darii nomen, quem sacer codex Darjavesch vocat, in vocabulum illud, quod Tychsen *Malkéusch* (*Dârheûsch*) legit, quadrare videretur, Xerxis vero nomen in illud, quod Tychsen *Osch patscha* (*Khschhërschê*) legit: titulus regis quis esset, haud diu fugere me

poterat. Necessario enim ob figurarum similitudinem, quae in Darii Xerxisque nominibus obviae sunt, primae quatuor literae *Khschêh* . . legendae mihi erant. Jam vero lexicon zendicum Anquetilianum pag. 442. regis titulum *Khscheïô* mihi monstrabat, qui ab inscriptionis vocabulo in eo tantum differebat, quod vocali longae signum aspirationis esset adjectum: Anquetil autem ipse alicubi annotat, vocales Zendicas in fine vocabulorum saepe cum aspiratione aliqua pronuntiari.

3. Sequentis vocabuli, quod e Sacyanarum inscriptionum comparatione adjectivum aliquod esse conjiciebam, prima et tertia litera E. et R. ex Darii nomine notae jam erant: quum igitur in Anquetiliano lexico p. 435 vocem *eghré* (*vis et fortitudo*) invenirem, vocabulum illud *eghré* legere, et *fortis* interpretari non dubitavi. cf. Anquet. Zend. Av. Tom. II. p. 202. not. 2. T. I. P. II. p. 423. not. 4 et 5.

Sic Caylianae urnae inscriptionem supra appositam interpretari jam poteram, cujus primum scripturae genus ita lego:

[cuneiform]
Kh. sch. h. ê. r. sch. ê. K...h. e. gh. r. é.
Xerxes. *rex.* *fortis.*

Ne tamen lectione mea offendantur eruditorum oculi, monendum est, Zendicum alphabetum, ut ex Anquetiliana tabula, (Zend-avesta Tom. II. p. 424) videre est, tria genera vocalis *e* (quartum enim *eh* ex *e* et *h* compositum est) propriis notis exprimere: 1) primam alphabeti literam *ê*, [cuneiform]. quae simul *â* pronuntiari potest, ut in Darii nomine, 2) *e* simplex [cuneiform]. et 3) *é* accentu superimposito [cuneiform]. vel [cuneiform]. Hoc tamen non impedit, quo minus vocabula, nota [cuneiform]. incipientia, ut [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. sub prima alphabeti litera evolvamus: vocales enim Zendicas Anquetil inter se permutat, ut e. g. voces *eschedanm* et *eschtô* (Anquet. Zend-av. T. II. p. 471.) etiam sub prima litera (p. 434.) inveniantur.

4. Redeo ad Niebuhrianas inscriptiones, quarum interpretationem ita jam referam, ut lector ipse enucleare illas videatur. E quatuor literis, quibus in altera tertiaque linea augetur regis titulus, et genitivus pluralis significari videtur, ultima [cuneiform]. *o* designet, necesse est, quoniam vocalis est, et in Niebuhr. Tab. XXIV. lin. 2. sqq. flexionem nominis efficit (cf. Kleuker, Zend-Avesta. Tom. II. p. 65.): altera vero litera [cuneiform]. *tch*, denotat, ut flexio genitivi plural. exsistat *êtchêo* sive *âtchâo*. In inscriptione G. nomen Darii, Xerxis patris, literâ [cuneiform]. et titulus regis flexione [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. augetur ad genitivum singul. significandum; quas *â* et *âhê* le-

gendas esse, vix dubitari potest. In inscriptione B. titulum regis excipit vox quaedam, quae, flexione genitivi plural. abscisa, nomen populi sistit, *Dâhû*, qui secundum Anquet. Zend-avest. Tom. II. p. 283. not. 4. idem est, quem Herod. I. 125. fin. *Δαοὺς* vocat, et nationem persicam (*Pârs* Nieb. H. l. 6. f. et 7. init.) esse testatur. Sequens vocabulum cum genitivi singul. flexione nomen *Gôschtâsp* simulque literas [Keilschriftzeichen]. *g.* [Keilschriftzeichen]. *t.* [Keilschriftzeichen]. *s.* [Keilschriftzeichen]. *p.* nobis aperit. Notam [Keilschriftzeichen]., ut recte a Bruinio n. 132. scribitur, Niebuhr cum simillima figura [Keilschriftzeichen]. diversi prorsus valoris permutavit, ideoque omisit in Alphabeto Tab. XXIII. Nomen regis post *Gôschtâspâhê* recte omittitur: vocabulum autem, quod *filium* designet, semper in Zendica lingua solet omitti.

5. Jam ad inscriptionem G. legendam unius literae valor nos latet in fine vocis [Keilschriftzeichen]. [Keilschriftzeichen]. [Keilschriftzeichen]., quae quid significet, vox ultima docebit. Vocabulum *âkhêotchôschôh* in medio genitivi notam [Keilschriftzeichen]. continet, hinc ex pehlavico *akhé* (*mundus*, *universa rerum natura*, Anquetil. lex. Pehl. p. 484.) et voce *Schâh* (*rex*) compositum *mundi rectorem* significare videtur. Quis sit iste mundi rector, docet Tab. A. lin. 16. vel de Bruin. n. 131. lin. 9. fin., ubi vox *Jêmôh* (Anquet. Zend. lex. p. 465) Djemschiden sive Achaemeniden, et nota incognita adhuc [Keilschriftzeichen]. literam *m.* significat. Quum igitur Herodot. I. 125 Persarum reges ab Achaemenidis oriundos esse testetur, vox [Keilschriftzeichen]. [Keilschriftzeichen]. [Keilschriftzeichen]. *stirpem* vel simile quid designare videtur. Quod si eandem notam et *p.* et *b.* consonantis valorem exprimere statuimus, vocem illam *bûn* legere atque per Pehlavicam *bûn* (*radicem*) *stirpem* interpretari licet, vid. Anquet. Zend. av. T. II. pag. 439.

6. Post illa verba, quae inscriptionem G. claudunt, in inscriptione B. quatuor alia leguntur, quae, nisi fallor, tempus designant, quo praecedentia scribebantur. Nam verbum *Môro* (nota [Keilschriftzeichen] eadem est, quae [Keilschriftzeichen]. sicuti [Keilschriftzeichen] eadem quae [Keilschriftzeichen]. vel [Keilschriftzeichen]. eadem quae [Keilschriftzeichen].) cum nusquam alibi occurrat, vix ad inscriptionem ipsam pertinet; deinde liber Bun-dehesch (Anquet. Zend-av. T. II. p. 349.) docet, *Moro* unam e duodetriginta constellationibus masculis esse. Hinc antecedens vocabulum *ôoo*, cujus ultima litera accusativi flexionem denotat, *masculam constellationem* interpretor, et ab *oûé* (Anquet. p. 475) *copula mascula*, unde *oûeeé*, *copula feminina*, derivo. *Âh* est articulus demonstrativus (Anquet. pag. 473), ut adeo Persae eodem fere modo tempus notaverint, quo nostrates e. g. *den vierten September 1802.*

7. Venimus nunc ad ultimam vocem inscriptionis B., cujus secunda litera [Keilschriftzeichen]. dubia est. Equidem eandem fere esse puto ac [Keilschriftzeichen]. *z*, et vocem *êzûtchûsch* pro genitivo nominis *iezetehé* sive *iezeté*

(in Parsi *ized*) accipio, v. Anquet. Zend. av. T. II. p. 2. pag. 82. not. 11. T. II. pag. 189. n. 2. p. 316. n. 2. p. 493. v. 2. Anquetil. enim in Indice rerum s. v. *Ized* haec inter alia annotat: „Ized „est proprement nom des bons Génies du second Ordre, nom donné „a Ormuzd et aux autres Génies qui président aux trente jours „du mois“.

8. Quae cum ita sint, duas illas inscriptiones ita lego et verto:

Niebuhr. Tabul. XXIV. B., de Bruin p. 273. n. 132.

Dârheûsch.	*Khschêhiôh.*	*eghré.*	*Khschêhiôh*	*Khschêhiôhêtchâo*
Darius.	rex.	fortis.	rex.	regum.
Khschêhiôh.	*Dâhûtchâo.*	*Gôschtâspâhê.*	*bûn.*	*âkhêotchôschôh*
rex.	Daharum.	(filius) Hystaspis.	stirps.	mundi rectoris.
Âh.	*ôoo.*		*Môro.*	*êzûtchûsch.*
In	constellatione mascula.		Môro.	τοῦ Ized.

Niebuhr. Tab. XXIV. G.

Khschhêrschê.	*Khschêhiôh.*	*eghré.*	*Khschêhiôh.*	*Khschêhiôhêtchâo*
Xerxes.	rex.	fortis.	rex.	regum.
Dârheâûsch.	*Khschêhiôhâhê.*		*bûn.*	*âkhêotchôschôh.*
(filius) Darii.	regis.		stirps.	omnium rectoris.

9. E duabus his inscriptionibus duplex in talaris regii plicaturis inscriptio (apud de Bruin p. 273. n. 133.), quae quam male composita sit, supra jam dictum est, prorsus potest restitui.

lin. 4 et 3.	*Dârheûsch.*	*Khschêhiôh.*	*eghré.*	*Gôschtâspâhê*
	Darius.	rex.	fortis.	(filius) Hystaspis.
	bûn.	*âkheôtchôschôh.*		
	stirps.	mundi rectoris.		
lin. 7.	[*Khschhêrschê.*	*Khschêhiôh.*	*eghré.*	*Dârheâûsch.*
	Xerxes.	rex.	fortis.	(filius) Darii.
	Khschêh] *iôhâhê.*	*bûn.*	*âkhêotchôschôh.*	
	re- gis	stirps.	mundi rectoris.	

Nomen *Xerxis* certe latet in scripturae tertiae figuris, quae partim in quintae, partim in sextae lineae initio leguntur. Tum *Darii*, patris ejus, nomen quintae lineae finis in secundo, et sextae lineae finis in tertio scripturae genere exhibet.

10. Restat jam, quum majorum inscriptionum interpretationes ad aliud tempus differam, nonnisi ea inscriptio, quae supra fenestras conspicitur: de Bruin. p. 273. n. 134. Chardin tab. LXIX. 5. Kaempfer p. 347. Neminem sine vitio transcripsisse, Tychsen jam

animadvertit, verumtamen e comparatis omnibus facile potest illa restitui:

Årdsmêtch.	*ëiûôtch.*	*Dârheâûsch.*	*K . . hâhê.*
τῷ Ard coeli,	qui supra est.	Darii.	regis
	gôiôhê.	*erm.*	
	vita.	servit.	

11. Argumenta, quibus interpretatio mea nititur, sunt haec: *Ard* sive *Ascheschingh* est Ized aliquis, (v. Anquet. in ind. rer. s. h. v.) qui victum diurnum, splendorem temperatum et lucem donat, indeque inscriptioni supra fenestras conspicuae aptus videtur. Deinde *schmeha*, cujus dativus vel genitivus est *smêtch*, in pehlvi (Anquet. Zend. av. T. II p. 507.) *coelum* significat. Alteram vocem cum eadem flexione a Zendico *eevé* (p. 435.) sive *eûestâtêm* (p. 438.) *supra*, derivo, atque primi vocabuli appositionem esse puto. Vox *gôiôhê* eadem videtur, quae *gêiêhê* (Anquet. p. 452.) *anima, vita*: *érm* seu *erém* (p. 433.) denique *servum* designat.

Haec fere sunt, quae jam in medium proferre volui, praetermissis, quae ex his inscriptionibus argumentari licet; cetera sequentur, quum haec probata fuerint. In singulis me errasse lubenter confitebor; in universis vix aliquis erroris me convincet.

(2) GEORGII FRIDERICI GROTEFEND COLLABORATORIS SCHOLAE GOTTINGENSIS

PRAEVIA

DE CUNEATIS, QUAS VOCANT, INSCRIPTIONIBUS PERSEPOLITANIS LEGENDIS ET EXPLICANDIS RELATIO CONTINUATA.

FASCICULUS PRIMUS

DE

ZENDICI ALPHABETI CUNEATI ATQUE SERMONIS CHARACTERE.

Gottingae a. d. II. Octobr. 1802.

„Malgré le goût que l'homme a naturellement pour le nouveau et le singulier, l'esprit le plus intrépide rencontre quelquefois des difficultés capables de le décourager: quand il faut fouiller seul dans des ruines qui ont des milliers d'années d'antiquité, deviner des traits presque effacés, leur donner du corps, former un assemblage régulier de plusieurs pièces éparses, et dont le rapport perce à peine la barbarie qui les couvre, alors le critique présomptueux

prononce d'un ton imposant, donne des explications dont il doute souvent lui-même, et promet pour l'ordinaire un reste d'eclaircissemens qui ne doivent jamais paroître; foible ressource de l'amour propre, qui craint moins l'ignorance que la honte d'en être soupçonné."

„Celui que l'amour du vrai porte ensuite à consulter les monumens, se trouve fort embarrassé; souvent après un examen serieux et désintéressé, il se voit obligé de redresser les idées reçues; premier écueil, où il est difficile de ne pas échouer: s'il a encore l'équité d'avouer ce qu'il ne sait pas, malgré l'éloignement des temps, le silence des écrivains et l'insuffisance des sources qui lui sont ouvertes, les questions qu'il ne peut résoudre diminueront le prix des verités qu'il propose."

„Telle est à peu près la position délicate, où je me trouve; les matières que j'ai a traiter sont nouvelles et difficiles à débrouiller, les secours ordinaires me manquent, et je ne puis quelquefois me dispenser de relever les méprises de plusieurs Savans, dont la reputation est faite: mais j'ai lieu d'espérer que l'importance du sujet qui m'occupe pourra le rendre intéressant, et que les preuves ne seront pas affoiblies par les conjectures que je hasarde quelquefois; l'obscurité couvre toujours le commencement des découvertes."

Haec verba Anquetilii (Memoires de l'Academie Royale des Inscriptions et belles-Lettres, T. XXXI. P. II. p. 339. seq.) in me jam ita congruunt, ut transcribere minime dubitaverim.

Minoribus primae scripturae inscriptionibus in priore mea relatione explicatis, debebam nunc majorum inscriptionum interpretationes in medium proferre; sed quia vix aliquis intelliget, quî eas ita legere ac interpretari possim, quemadmodum legam et interpreter, nisi antea characterem Zendici alphabeti cuneati atque sermonis plane perspexerit, de hoc aliqua praemittenda censui. Sunt itaque duae hujus dissertationis particulae, quarum prior de Zendico alphabeto cuneato, posterior de sermone Zendico agit: quibus pauca de erroribus in priori mea relatione obviis praemittere liceat.

Nam quod professus eram, in singulis me errare potuisse, quamvis in universis verum vidissem, hoc continuato meo studio confirmatum est. Quamvis enim nonnulla, quae doctissimus relationis meae censor monuit, non concedam, ob illud tamen me recte reprehensum confiteor, quod Darium *regem Daharum* appellaverim. Vox *Dâhûtschâo* (pro *tch* semper *tsch* scribendum est, ut idem me privatim edocuit) non est nomen aliquod proprium, sed commune

sive, quod vocant, appellativum et *populorum* significat. Quae quidem vox jam documento est, interpretationem inscriptionum istarum parum bene procedere, nisi prius character sermonis Zendici perspectus sit. Jam Kleuker (Anhang zum Zend-Avesta. B. II. Th. 1. S. 172 n. 197.) animadvertit, flexionem *anm* nonnisi variam formam esse, pro *ao*, e. g. *ganm* pro *gao*, *huanm* pro *huo*: equidem adjicio, alias etiam esse formas in *â*, *emo* sive *ehmo* et *emenô*, e. g. *zâ*, *zao*, *zémô*, *zeémenô* (Anq. Zend-Av. T. II. pag. 446.) et *zanm*, *terra* (Anq. Zend-Av. T. II. p. 176 n. 1). *Dâhô* igitur, quod certe nominativus singl. est vocis *Dâhûtschâo* nullo modo differt a *dehmo*, quod secundum Anq. (Zend-Av. T. II. p. 443.) *populum* significat, et voci *danm* in Pehlavico sermone respondet. Eo minus autem dubitare possumus, quin *Dâhûtschâo populorum* vertamus, quod in ceteris inscriptionibus aliae ejusdem vocis formae occurrant, quarum unam notasse sufficiat. In Niebuhr. tab. H. l. 6. fin. legitur *dâhêûsch Pêrs* sive, *Pârs*, quae vix aliter ac *populus Persicus* vertere licet. Jam vero quum forma *danm*, quae certe Zendica est, in Anquetiliano lexico tanquam Pehlavica tantum recensita sit, ex eo colligere licet, plurimas formas Pehlavici sermonis esse etiam Zendicas. Huc refero inter alias formam *bûn*, quam in priori mea relatione Pehlavicam esse, Anquetilio duce, professus sum: certe illa nonnisi varia est forma vocis *bonêm* (Anq. Zend. Av. T. II. p. 439. med.); forma *bon* occurrit in Zend-Av. T. II. p. 3. n. 4. et in inscr. Bruin. n. 131. lin. penultim. init. Ita etiam non dubito, quin *âkhêotschôschôh* vocabulum sit Zendicum: *Akhe* saltem nonnisi varia forma est vocis Zendicae *enghohé* (Kleuk. Anh. zum Zend. Av. T. II. P. I. p. 174. cf. Niebuhr. inscr. H. l. 19 init.) et quomodo *schah* respondeat voci *Khschêhiôh*, de Sacy (Mém. p. 192.) docet.

Particula I.

De Zendici alphabeti cuneati charactere.

Primae, quam diximus, scripturae alphabetum iure vocatur Zendicum, quod, si recte inscriptiones enodavi, ad Zendicas voces scribendas est adhibitum. Cuneatum autem vulgo dicitur, quod signa ejus e variis cuneolis composita sunt: revera tamen duae sunt figurae, quae signa hujus alphabeti constituunt, 𒁹 et 〈, quae, si ad usum ejus lapidarium spectes, coelum normamque lapicidae, vel, quod minus videtur probabile, sagittam arcumque Persarum repraesentare possunt. Ad lapicidae usum illud praecipue inventum fuisse videtur, quum nihil rotundi habeat: neque percommodum solum monumentis est lapideis, sed ita etiam nitidum, ut nitidissimo

nostro scripturae generi, latino scilicet, parum cedat pulcritudine. Sine ullo ornatu superfluo, tanta simplicitate est compositum, ut, duobus tantum figurarum generibus adhibitis, nulla tamen litera plus quinque figuras contineat.

Ceterum haec fere de charactere hujus alphabeti possunt statui, quae magnam partem ad calligraphiam spectant.

1. Si *normam*, quam vocavi (〈), ab *cuneolo*, quem vocant (𒁹) discernas, nulla figura hujus alphabeti est oblique posita, nisi cuneolus ille, quo vocabula inter se distingui solent (╲). Norma (non?) nisi recta adhibetur, cuneolus vero transverse quoque ponitur. Cuneolum rectum *primarium* voco, *secundarius* semper transversus est, excepto illo, qui in litera *g* ([cuneiform]) transverso infigitur. Secundarius porro cuneolus vel superne vel in medio vel ad latus, sive dextrum, sive sinistrum, nunquam vero infra ponitur.

2. Angulus normae ad sinistram semper vergit, cuneoli vero caput sursum quoque spectat, nunquam autem ad dextram vel desuper. Lichtenstein in eo superstitionem quondam (quandam?) subesse conjecit, ne coelo quasi acies opponatur. (Brauns. Magaz. Septbr. 1802). Sed quum ex illo nequeat intelligi, cur nunquam acies cuneoli vel angulus normae ad dextram spectet: hanc potius causam fuisse puto, quod scriptor a superiori ordine ad inferiorem et a sinistra ad dextram partem pergeret. Mihi quidem aliter depingere literas, ac usu acceptum est, summam difficultatem praebet.

3. Uni literae normarum nunquam plures duabus, cuneolorum nunquam plures ternis insunt; ternis, inquam: nisi enim primarios cuneolos distinguas a secundariis, quinque interdum enumerare possis. Normis duo tantum cuneoli recti, sed tres etiam transversi adjungi possunt, quin quatuor interdum, si alterius lateris cuneolum annumeres.

4. Normae sunt pari semper longitudine, ut etiam cuneoli recti sive primarii in eadem litera, exceptis literis *o* ([cuneiform]) et *m* ([cuneiform]), quarum posterior certe distinctionis causa ita scribitur, ne cum simili prorsus litera *t* ([cuneiform]) confundatur. Si vero ex tribus cuneolis secundariis vel transversis vel medius brevior est, vel supremus longior, hoc calligraphiae tantum debetur. Illud contra necessitatis causa fiebat ob spatii angustiam, vel perspicuitatis gratia post certas figuras, si qui cuneoli secundarii, qui supra scribendi erant, ad latus sunt appositi, e. g. [cuneiform] pro [cuneiform], [cuneiform] pro [cuneiform], [cuneiform] pro [cuneiform].

5. Si qua litera nonnisi unam normam, vel unum tantum cuneolum primarium continet, secundarii cuneoli nunquam supra, sed

ad latus seu dextrum seu sinistrum ponuntur. Si vero duo vel tres cuneoli recti literae insunt, secundarii cuneoli supra potius quam ad latus scribuntur; ad latus tamen semper, si e tribus cuneolis rectis medius est brevior. Quod ad secundarios cuneolos in medio literarum attinet, inter duos cuneolos rectos alter post alterum e. g. [cuneiform], inter duas normas vel inter normam et cuneolum rectum alter supra alterum scribi solet, e. g. [cuneiform]. [cuneiform].

6. Calligraphia postulat, ut litera quaeque pari sit altitudine; hinc cuneoli recti eo minores scribi solent, quo plures transversi supra sunt positi, e. g. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]; hinc quoque factum esse videtur, ut [cuneiform] pro [cuneiform] interdum scriberetur et [cuneiform] pro [cuneiform], ne, si cuneoli recti justo altiores scripti forent, litera modum altitudinis excederet. Literae denique inter duas horizontales lineas ita scribuntur, ut spatium aliquod latius inter singulas literas relinquatur; quocirca Kaempfer p. 332. supinum suum chalcographum, et Niebuhr T. II. p. 150. antecessores suos recte vituperavit, quod decens illud spacium omiserint, quod characteres ubique distinguat.

His de Zendici alphabeti cuneati charactere praemissis, alphabetum ipsum ex figurarum similitudine transcribere libet, quo facilius eas discernas atque dignoscas: deinde literas ex eo ordine recensebo, quo in Anquetiliano lexico sese excipiunt, adjectis Bruinii atque Niebuhrii sphalmatibus.

A. *Zendicum alphabetum cuneatum secundum figurarum similitudinem coordinatum.*

[cuneiform] s. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform] s. [cuneiform].
é. s. e. v. r.

[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform].
d. n. b s. p. g. ô. gh. incerta.

[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform].
ê s. â. th? t. m. o. k? dj.

[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform].
tsch. â. sch. z (ds & ts). û.

[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform] s. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform].
kh. ng. h. i. f s. ph.

B. *Zendicum alphabetum cuneatum secundum Anquetilii lexicon coordinatum, cum sphalmatibus.*

A s. Ê. [cuneiform]. Sphalmata. [cuneiform]. [cuneiform]. N. [cuneiform]. B.

B. [cuneiform]. « [cuneiform]. N. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. B.

T.	[cuneiform].	Sphalmata.	[cuneiform]. N.
Dj.	[cuneiform]?		
Kh.	[cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. B.
D.	[cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. N. [cuneiform]. B.
R.	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]	«	[cuneiform]. N. semperque fere B.
Z. (Ds & Ts)	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. N.
S.	[cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. B.
SCH.	[cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. N. [cuneiform]. [cuneiform]. B.
GH.	[cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. B.
F s. PH.	[cuneiform].		
K.	[cuneiform]?		
G.	[cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. B.
M.	[cuneiform].	«	[cuneiform]. N. [cuneiform]. [cuneiform]?
N.	[cuneiform].	«	[cuneiform]. B.
V.	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. B.
H.	[cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. B.
I.	[cuneiform].	«	[cuneiform]? N.
TSCH.	[cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. B. [cuneiform]. N.
P.	[cuneiform]. vid. B.		
E.	[cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. N. [cuneiform]. [cuneiform]. B.
Ô	[cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. N. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. B.
O	[cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. N. [cuneiform] etc. B.
É.	[cuneiform]. [cuneiform].		
Â	[cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. B.
TH.	[cuneiform]?		
Û	[cuneiform]. [cuneiform].	«	[cuneiform]. [cuneiform]. N. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. B.
NG.	[cuneiform].		

[cuneiform] esse abbreviationem nominis [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform]. [cuneiform] ex prima ultimaque nominis figura compositam; cuneolum porro obliquum ([cuneiform]) fines vocabulorum designare, in priori mea dissertatione jam dictum est. Quibus si hoc adjiciam, Bruinium interdum notas aliquas vel omittere vel falso inserere, et pro cuneolo obliquo, quo vocabula disjungi solent, normam ([cuneiform]) depingere, omnia indicavi, quae a me de hac re exspectare licet. Quum Niebuhrii

tabula I. non solum lacunas quasdam habeat, sed etiam minori diligentia quam ceterae perscripta esse videatur: penes me non est, figurarum illarum, quae hac in tabula sola occurrunt, valorem accuratius constituere.

Ceterum facile quisque animadvertet, quantopere Zendicum alphabetum cuneatum a ceteris differat, ut adeo pro novo prorsus alphabeti genere habendum sit, nec cum ullis aliis, nisi cuneatis, alphabetis comparari possit. Hinc valor literarum non ex comparatione aliorum alphabetorum, sed ex se solum ratiocinando enucleari potest: nisi hoc aliquid valere putes, quod ex comparatione Sacyani alphabeti Pehlavici (Mémoires p. 171. Pl. VII) reperi, plerasque literarum figuras, quae in illo alphabeto similes sibi sunt, interque se permutari solent, in cuneato quoque nostro alphabeto similitudinem quandam habere eandemque pati permutationem. Huc refero *b. et p.* (Sacy Mém. p. 33.) *v. et r.* (Sacy Mém. p. 84. 173.) *m* et *t*, ([illegible] & [illegible], [illegible] & [illegible]), *n* et *d* ([illegible] & [illegible], [illegible] & [illegible]) etc. Quodsi Lichtenstein tertiae scripturae literas et illas, quae in Babylonicis lateribus coctilibus conspiciuntur, e comparatione cuficarum aliarumque similium enucleare studet: caveat, ne in eundem errorem incidat, quo perducti nonnulli (Itiner. Th. Herbert. vers. gallic. Paris. 1683. Lib. II. p. 240) principium, ut videtur, inscriptionis B. apud Niebuhr. cum graecis characteribus comparatum „*Ahasveros Theos*“ legerunt:

[illegible]
'A. 'A. Σ. Υ. E. Ϝ. Q., Θ.E. Q.

vel Swinton (Philos. transact. tom. XLIX. p. 604. Sacy Mémoir. p. 121.) inscriptionis Pehlavicae cujusdam in Nakhschi-Rustam initium ex palmyrenis literis comparatis interpretari conatus est.

Certe nihil magis est falsum atque temerarium, quam si cuneolus ille vocabulis disjungendis destinatus in secunda scriptura cum arabico Eliph, in prima vero cum hebraico Aleph comparatur graecoque spiritui leni respondere dicitur. (Brauns. Magaz. Septbr. 1802). Multoque majori jure eruditi illi *Ahasveros Theos* legendum putare poterant, quam iste affirmare, Nieb. tabulam L. Artaxerxi deberi videri, quoniam verba *Arta-Chasach-Zathath* saepius contineat: inscriptiones enim inversa ratione a dextra ad sinistram legit.

At hanc quoque inscriptionem ad Darium Hystaspis pertinere, non locus solum, quo invenitur, sed nomen etiam Darii docet, quod e. g. lin. 4 bis repetitur.

Sed nimium jam moratus in Lichtensteinii arbitrio, ad alteram dissertationis hujus particulam progredior.

Particula II.

De Zendici sermonis charactere.

Nemo hic exspectet, me, paucis tantum hebdomadibus in Zend-Avesta, unico Zendici sermonis fonte, versatum, quaecunque de charactere ejus dici possint, absoluturum esse. Nonnisi pauca demonstrasse sufficiat, quae quam maxime pertineant ad majores primae scripturae inscriptiones illustrandas: plura qui desiderat, legat, quae Kleuker et Anquetil ad Zend-Avestam notarunt, in primis Memoir. de l'Acad. des inscr. et bell. L. T. XXXI. P. II. p. 339. seq. et Anhang zum Zend-Av. T. II. P. II. p. 1. seq.

1. Lingua Zendica est inter Persicas fere, quae Samscrdamica inter Indicas, eique in multis tam similis, ut Jones illam Samscrdamicae dialectum esse putarit et P. Paulinus a S. Bartholomaeo dissertationem de affinitate linguae Zendicae et Samscrdamicae (1798. 4.) scripserit. Idem Paulinus Samscrdamicae linguae grammaticam dedit (Rom. 1790. 4) sub titulo: *Sidharúbam seu Grammatica Samscrdamica*, qua cum Zendico sermone comparata haec fere constituere licet. Tam Zendica lingua, quae secundum Anquetilium duodequinquaginta, quam Samscrdamica, quae duo et quinquaginta literis utitur, veteris, incultae et originalis linguae characterem habet.

Utraque est rudis, sed vigens multis vocabulis, quae, maxima vi et contentione pronunciata, eloquutioni summam praebent efficaciam. Utraque est refertissima vocalibus, alte plerumque et acute sonantibus; sed eadem interdum consonantibus praegnans, quae horrido nobis sono eloquuntur, ideoque in recentioribus dialectis e. g. Pehlavica Parsicaque vel elidendo vel mutando expoliri solent. Quum tamen utraque vocales amet, et longas magis quam breves, in primis a e o, quum etiam, ubi consonantes vocem finire debeant, e. g. 3. pers. singl. vocales adjiciat, ut eloquutio plenior sit ac suavior: utraque carminibus maxime est idonea, sensibus affectibusque pariter ac sententiis breviter et nervose exprimendis accommodata. Utraque est locupletissima nominum, non ita verborum; et in utraque plurimae sunt, quas vocant, formae aequivocae, variaeque formae grammaticales, quae primo in intuitu omnibus regulis destitutae videntur. Utraque tres numeros habet, singularem, dualem atque pluralem; tria genera, masculinum, femininum, neutrum; triaque tempora, praesens, praeteritum atque futurum: et in utraque conjugationes incipiunt a tertia persona. Utraque tamen, licet inter se et etymis et flexionibus quam simillimae sint,

pauca cum Aramaeis linguis communia habet, valdeque differt ab eo, quem vulgo dicunt orientalium linguarum genium.

2. Zendica lingua pariter variat in formis grammaticalibus, ac construendi legibus caret, quum ipsa illa regula, quam Anquetil. dedit, e duobus nominibus in regimine positis rectum regenti praeponi solere, in inscriptionibus nostris, si, quae supra fenestras conspicitur, excipias, rarius adhibeatur. In construendis tamen vocabulis parum differt a Latino sermone, ita ut primaria notio secundariis antecedere soleat: differt autem quam maxime a Latino sermone, atque Germano Graecoque similior est in componendis vocabulis, ita ut magna saepe idearum congeries in unam vocem coarctetur. Notatu dignum est, quod Zendica lingua primam alphabeti literam, ut Graeca Alpha suum privativum, adhibeat, ad negationem quandam exprimendam, cujus exempla quam plurima et Kleuker l. l. et de Sacy (Mémoir. p. 60. seq.) collegerunt. Vocales literae finales sunt in nominibus saepius quam in verbis significantes: in his enim eloquutionem saepe suaviorem plenioremque reddunt, si e. g. tertiae personae in d vel t exeunti e vel o adjiciatur; in illis vero casus varios exprimunt. Verba Zendica conjugantur fere ut Persica, licet vocalibus magis extendantur: declinationum paradigmata sunt haec.

	A. Anquetilii e Zend-Avesta Mém. de l'Acad. XXXI p. 389.	B. Nostrum ex inscriptionibus Persepolit.
	Singl.	*Singul.*
N.	Pete, petoesch, *dominus.*	Khschêhiôh, *rex*
G.	Pete-tscha.	Khschêhiôhâhê
D.	Pete-tscha s. Petao.	Khschêhiôhâhê
Acc.	Pete s. Pete-m	Khschêhiôho
V.	Pete s. Petao	Khschêhiôh
Abl.	Petanm.	— — — —
	Plurl.	*Plural.*
N.	Pete-bi-o	Khschêhiôhê.
G.	Pete-bi-etscha.	Khschêhiôhêtschâo.
D.	Pete-bi-etscha	Khschêhiôhêtschâo.
Acc.	Pete-bi-o.	Khschêhiôhê.
V.	Pete-bi-o	Khschêhiôhê.
Abl.	Pete-bi-o.	— — — —

Pro *tscha* Anquetil. etiam *stscha* scribit; litera *m*, affirmante illo, peculiarem saepe accusativum designat; saepius autem et casus et numeri inter se permutantur. Flexio *tsche* in secundo tertioque casu utriusque numeri est frequentissima. Sunt et aliae

flexiones, ut e.g. *Atred* ablativus est vocis *Atro* s. *Aterê* (ignis): flexio pluralis *bio* rara est, nec in inscriptionibus occurrit; usitatior est flexio *nanm* e.g. Singl. *Aperenaeoko* (adolescens), Dual. *Aperenaeoke*, Plural. *Aperenaeokenanm* etc.

(3) GEORGII FRIDERICI GROTEFEND COLLABORATORIS SCHOLAE GOTTINGENSIS

PRAEVIA

DE CUNEATIS, QUAS VOCANT, INSCRIPTIONIBUS PERSEPOLITANIS LEGENDIS ET EXPLICANDIS RELATIO CONTINUATA.

FASCICULUS II.

DE PRIMAE SECUNDAEQUE SCRIPTURAE INSCRIPTIONIBUS PER SINGULAS VOCES INTER SE COMPARATIS.

Gottingae a. d. 13. Novbr. 1802.

Praemonenda.

Majores inscriptiones cuneiformes, quas et legere et explicare nobis superest, sunt quatuor, haud ita sibi dissimiles. Tres earum Niebuhr. exhibet sub literis A. H. et I. et unam de Bruin sub numero 131. Inscriptio A, quo loco posita sit, monstrat Niebuhr. in tab. XXIII. idemque dicit (p. 134) eandem jam a Kaempfero et Bruinio transcriptam esse. De Bruin quidem sistit eam sub numero 126, licet initio carentem; sed in Kaempferi libro eandem non inveni. Major enim inscriptio, quam Kaempfer p. 333. exarari curavit, Niebuhrianae inscriptioni L. ex tertiae scripturâe genere respondet, quae una cum inscriptionibus H. I. et K. lapidem aliquem in australi muri parte occupat. (Niebuhr. p. 150). Notandum autem est, inscriptiones muri et aedificii illius, quod Niebuhr. in tab. XVIII. litera G. signavit et in tab. XXVI. separatim depinxit, Dario Hystaspis deberi, excepta illa inscriptione, quam de Bruin sub numero 131. ex lapide quodam ad angulum aedificii G. inter Austrum et Zephyrum erecto transcriptam exhibet. Ceterae omnes, quas habemus, cum laudata modo inscriptione, ab illius filio profectae sunt eaeque interdum iis locis positae, ubi vestigia cessantis exstructionis apparent: ut adeo parum probabilitatis habeat, quod Niebuhr (p. 142) contendit, aedificium G. serius esse exstructum. Niebuhrianae tres majores inscriptiones versionibus ceterorum scripturae generum carent: nam inscriptio secundae scripturae

K. ex parte tantum inscriptioni I. et inscriptio tertiae scripturae L. nonnisi paucis inscriptioni H. respondet. Hinc a Bruiniana inscriptione n. 131. vertenda initium facio, eoque magis, quod ejus interpretatione via quasi ad ceteras explicandas aperiatur. Illa enim parum differt a Niebuhriana inscriptione A., quae cum ista comparata ab initio mutilata deprehenditur ceterisque magnam lucem affundit. Quum vero de Bruin. literas plerasque tam corrupte ediderit, ut recte legi vix queat ejus inscriptio, nisi versionibus comparatis veram eruamus lectionem: comparationem primae secundaeque scripturae per singulas voces instituere jam constitui. Tertiam enim scripturam jam eo libentius omitto, quo magis corrupta est et intricans, quoque minus fidam versionem ostendit. Ita vero mihi agendum videtur, ut prius comparationem ipsam vocibus emendate transcriptis instituam; deinde rationes offeram, quibus emendatio mea nitatur.

I. Comparatio primae secundaeque scripturae inscriptionis Bruinianae n. 131.

	Prima scriptura.		Secunda scriptura.	
1.	[cuneiform]	lin. 1.	[cuneiform]	lin. 1.
2.	[cuneiform]		[cuneiform]	
3.	[cuneiform]		[cuneiform]	
4.	[cuneiform]		[cuneiform]	
5.	[cuneiform]		[cuneiform]	
6.	[cuneiform] ?			
7.	[cuneiform]	lin. 2.	[cuneiform]	lin. 2.
8.	[cuneiform]		[cuneiform]	
9.	[cuneiform]			
10.	[cuneiform] ?		[cuneiform] ?	
11.	[cuneiform]		[cuneiform]	
12.	[cuneiform]		[cuneiform]	
13.	[cuneiform]		[cuneiform]	
14.	[cuneiform]	lin. 3.	[cuneiform]	lin. 3.
15.	[cuneiform]		[cuneiform]	

	Prima scriptura.		Secunda scriptura.	
16.	[cuneiform]		[cuneiform]	
17.	[cuneiform]		[cuneiform]	
18.	[cuneiform]		[cuneiform]	
19.	[cuneiform]	lin. 4.	[cuneiform]	
20.	[cuneiform]		[cuneiform]	
21.	[cuneiform]		[cuneiform]	lin. 4.
22.	[cuneiform]		[cuneiform]	
23.	[cuneiform]		[cuneiform]	
24.	[cuneiform]	lin. 5.	[cuneiform]	
25.	[cuneiform]		[cuneiform]	
26.	[cuneiform]		[cuneiform]	
27.	[cuneiform]		[cuneiform]	lin. 5.
28.	[cuneiform]		[cuneiform] ?	
29.	[cuneiform]	lin. 6.	[cuneiform]	
30.	[cuneiform]		[cuneiform]	
31.	[cuneiform]		[cuneiform]	
32.	[cuneiform]		[cuneiform]	lin. 6.
33.	[cuneiform]		[cuneiform]	
34.	[cuneiform]		[cuneiform]	
35.	[cuneiform]	lin. 7.	[cuneiform]	
36.	[cuneiform]		[cuneiform]	
37.	[cuneiform]		[cuneiform]	
38.	[cuneiform]		[cuneiform]	lin. 7.

	Prima scriptura.	Secunda scriptura.
39.	[cuneiform]	[cuneiform]
40.	[cuneiform]	[cuneiform]
41.	[cuneiform] lin. 8.	[cuneiform] ?
42.	[cuneiform]	[cuneiform]
43.	[cuneiform]	[cuneiform] ? lin. 8.
44.	[cuneiform]	[cuneiform] ?
45.	[cuneiform] lin. 9.	[cuneiform]
46.	[cuneiform]	[cuneiform]
47.	[cuneiform]	[cuneiform]
48.	[cuneiform]	[cuneiform]
49.	[cuneiform]	[cuneiform] ? lin. 9.
50.	[cuneiform] lin. 10.	[cuneiform]
51.	[cuneiform]	[cuneiform]
52.	[cuneiform]	[cuneiform]
53.	[cuneiform]	[cuneiform]
54.	[cuneiform] ? lin. 11.	[cuneiform] ? lin. 10.
55.	[cuneiform] ?	[cuneiform] ?
56.	[cuneiform]	[cuneiform]
57.	[cuneiform]	[cuneiform]
58.	[cuneiform]	[cuneiform]
59.	[cuneiform]	[cuneiform] lin. 11.
60.	[cuneiform]	[cuneiform]
61.	[cuneiform] lin. 12.	[cuneiform]
62.	[cuneiform]	[cuneiform] ?

	Prima scriptura.	Secunda scriptura.
63.	[cuneiform]	[cuneiform]
64.	[cuneiform]	[cuneiform]
65.	[cuneiform]	[cuneiform]
66.	[cuneiform] lin. 13.	[cuneiform] lin. 12.
67.	[cuneiform]	[cuneiform]
68.	[cuneiform]	[cuneiform]
69.	[cuneiform]	[cuneiform]
70.	[cuneiform]	[cuneiform]
71.	[cuneiform]	[cuneiform]
72.	[cuneiform] lin. 14.	[cuneiform] lin. 13.
73.	[cuneiform]	[cuneiform]
74.	[cuneiform]	[cuneiform]
75.	[cuneiform]	[cuneiform]
76.	[cuneiform]	[cuneiform] lin. 14.
77.	[cuneiform] lin. 15.	[cuneiform]
78.	[cuneiform]	([cuneiform]) [cuneiform]
79.	[cuneiform]	[cuneiform]
80.	[cuneiform]	[cuneiform]

II. Rationes emendandi.

v. 1. Hanc vocem recte scriptam esse, docet derivatum ab ea nomen in fine hujus inscriptionis et initio antepenultimae lineae, quod et Niebuhr. tab. K. l. 13. med. et l. 20 fine exhibet.

v. 2. Hoc epitheton toties occurrit, ut quomodo scribas, dubitare nequeas. Invenitur illud in omnibus inscriptionibus, si ab ea discesseris, quae ad fenestras conspicitur; in secundae scripturae genere illud primam omnium Niebuhrianarum inscriptionum lineam finit, inter quas tab. K. veram ejus scripturam sistit.

v. 3. Hoc quoque vocabulum occurrit saepius, idque interdum flexionibus auctum e. g. in ultimi versus initio, et apud Nieb. tab. K. l. 10. med. 12. med. 19. fin.

v. 4. Haec vox in hac ipsa inscriptione toties repetitur, ut facile intelligatur, eam nonnisi duabus constare literis, quarum veram scripturam Nieb. tab. D. in versus penultimi fine aperit. Tertia scriptura hanc vocem non exprimere solet.

v. 5. Hujus vocis scripturam excitata modo Nieb. tab. D. in ultimi versus initio monstrat.

v. 6. Notae, quae sextae primae scripturae voci respondeant, in secunda scriptura desunt; hinc lectio ejus in prima scriptura dubia exsistit. Nam si Nieb. tab. H. compares, [cuneiform] legendum videtur; sin autem vocem in medii hujusce inscriptionis versus initio conferas, [cuneiform] in quarto casu legendum esse, putes. Nihil decernere ausus, literas sine ulla emendatione transcripsi, licet sphalma quoddam inesse dubitari nequeat.

v. 7. Haec vox nonnisi hac in inscriptione est obvia, in fine primae secundaeque, et in medio secundae tertiaeque lineae, semperque in secunda scriptura eodem fere modo false scribitur. Restitui tamen facile potest, comparatis aliis vocabulis, Darii praesertim nomine, lin. 10. med. et lin. 13. med. cujus prima litera tertiam, ultima secundam illius vocis literam sistit.

v. 8. eadem est, quae v. 4.

v. 9. et 10. in utroque scripturae genere dubiae sunt: verumtamen quum secunda scriptura unam modo vocem exprimere videatur, utramque primae scripturae vocem eandem esse puto, et alteram quidem cum genitivi pl. flexione. Hinc utramque inter se collatam correxi.

v. 11. eadem quae v. 7. et *v. 12.* eadem quae v. 4 et 8.

v. 13. Hanc vocem hic in quarto casu, ut in sequenti linea in secundo positum esse, primae scripturae flexiones docent: hinc secundae scripturae voci in utroque loco una litera in fine adjicitur; ceterae literae in Nieb. tab. K. ultimo versu reperiuntur.

v. 14. et 15. modo affuerunt.

v. 16. Hujus vocis ultima litera [cuneiform], quae flexionem accus. sing. designat, initium facit Niebuhrianae tabulae A. quae in ceteris ab hac inscriptione parum differt. Inde non solum mutilatam illam in initio deprehendi prorsusque explevi, sed regii quoque tituli abbreviationem cognovi. Primae scrip-

turae vocis nominativus est in Niebuhr. tab. I. in medio penultimae lineae, [cuneiform] Ultimam hujus nominis literam [cuneiform] in quarto casu omitti, docet Darii nominis comparatio [cuneiform], quod in Niebuhr. tab. H. in secundae lineae medio in quarto casu scribitur [cuneiform] In secundo scripturae genere illa vox nullibi alias occurrit; inde quum emendandi nostra ratio in comparatione sola posita sit, lectio ejus foret dubia, nisi animadvertissem, secundam scripturam primae non vocibus solis, sed literis saepe respondere. Sic prior hujus vocabuli pars [cuneiform] e fine Nieb. tab. f. atque posterior pars [cuneiform] e voce 68. et 71. enucleari potest.

v. 17. est eadem, quae v. 7. 11. 14. de *voce 18* jam ad v. 13. loquuti sumus, et *v. 19* jam quater affuit v. 4. 8. 12. et 15.

v. 20. Nomini Xerxis, quod hic in quarto casu scriptum est, nihil dubii inesse potest, quamvis Niebuhr. id semel tantum per omnia scripturae genera stiterit, in principio tabularum E. F. G. et in omnibus quidem scripturis minus recte expressum. Bruinianis inscriptionibus omnibus inter se comparatis, luce clarius apparet, urnam Caylianam nomina Xerxis rectius sistere Niebuhrio.

v. 21. Prima scriptura cum Nieb. tab. A. comparata docet, [cuneiform] abbreviationem esse nominis [cuneiform], ex prima ultimaque litera ita compositam, ut de Sacy nuperrime abbreviationem aegyptiacam *Phtha* ex prima ultimaque consonanti vocis *afnuta* compositam esse conjecit. Eodem modo tam secunda quam tertia scriptura regis titulum abbreviatura quadam exprimit, quae quomodo composita sit, haud facile est dictu, quum plenum nomen nusquam occurrat. Ut igitur regis titulus in prima scriptura per abbreviationem [cuneiform] significatur, sic in secunda per [cuneiform] et in tertia scriptura per [cuneiform], quae quidem nominis cujusdam, non literarum signa esse, ex eo patet, quod in nulla alia voce occurrant. Quemadmodum autem in prima scriptura nomini regis abbreviato flexiones casuum adjici solent, sic etiam in secunda scriptura hoc loco abbreviato regis titulo signum [cuneiform] appositum est, quo Accs. sing. flexionem designari, ad v. 13. jam annotavimus.

v. 22. De hujus vocabuli scriptione minime dubitare licet, quum eadem vox pluries occurrat et apud Nieb. quoque tabulam D. claudat.

v. 23. Haec vox in quartae lineae fine iterum occurrit, adeoque haud difficilis est enucleatu. Ita et

v. 24. initio quintae lineae denuo legitur, eademque omissa flexione genit. plural. s. v. 37. et in Nieb. tab. K. in fine quintae principioque sextae lineae, ubi tamen prima vocis litera deleta est. Quamvis illa nullibi sine vitio scripta est, comparatis tamen omnibus veram vocis scripturam eruisse mihi videor. Ultimis tribus literis genitivum plur. significari, apparet, ut alia taceam, ex eo, quod in regis regum titulo posteriori semper abbreviaturae adjiciantur. Cur autem in Niebuhr. tab. K. illa genitivi flexio praetermissa sit, quam vox respondens [cuneiform] in quarto versu tab. I. desiderat, haud facile dixerim. Fit tamen saepius ut in prima scriptura s. v. 37., sic et in secundo et praesertim in tertio scribendi genere, ut casuum flexiones omittantur. Sic

v. 25. regis titulus accusativi flexione caret, quae in voce 21. adjecta erat, non autem Xerxis nomini in voce 20.

v. 26. et 27. modo explicatae sunt.

v. 28. Hoc vocabulum, quum sit in secundo scripturae genere *ἅπαξ λεγόμενον*, dubium manet; comparatis tamen aliis vocabulis, literas ex Bruinii scribendi more omnes restitui, si a prima litera discesseris, quae quomodo accipienda sit, decernere nondum audeo.

v. 29. Hoc uno signo constans vocabulum, sed a regis designatione diversum, in Nieb. tab. K. initium facit.

v. 30—34 haud differunt a priore parte inscriptionis Nieb. F.; easdem, Xerxis nomine in Darium mutato, exhibet tabula B. et tabula K., quae sequentes quoque voces, *35—37.*, interposito tamen regis titulo, continet.

v. 38. Hoc vocabulum, licet sit in secunda scriptura *ἅπαξ λεγόμενον*, propter similitudinem vocis *36.* facile potest emendari.

v. 39. est regis titulus.

v. 40. in secunda scriptura a quinta voce non differre videtur, ut adeo primae scripturae voces [cuneiform] atque [cuneiform] sive ut in Nieb. tab. A. lin. 12. init. legimus, [cuneiform], synonymae sint.

v. 41. Primae scripturae vocabulum a prima hujus inscriptionis voce haud diversum esse videtur; secundum vero scripturae genus alia prorsus signa sistit, quae an eadem sint, quam quae Niebuhr. in tab. K. lin. 12. fin. et 17. med. habet, decernere non ausim. Quum autem [cuneiform] vel femininum [cuneiform] secundum lexicon Anquetilianum p. 460.

voc. penult. (*vohou*) *purum*, *sanctum* seu *pium* significet, ad quam notionem designandam dialecti persicae sunt copiosissimae: mirum videri nequit, quod una eademque vox variis modis translata sit.

v. 42. Hoc epitheton in prima scriptura iterum est femininum vocis secundae.

v. 43. et 44. Hae voces, quum sint ἅπαξ λεγόμεναι, dubiae manent in secunda scriptura.

v. 45—48. posteriorem partem inscriptionis Nieb. F. efficiunt.

v. 49. Haec vox in primo scripturae genere pluribus locis occurrit, et Djemschiden significare videtur, e. g. in Nieb. tab. I. lin. 5. ante fin., cui tamen in tab. K. lin. 6. med. alia prorsus signa respondent. Tertia contra scriptura hanc vocem prorsus omittit.

v. 50—52. est urnae Caylianae inscriptio, ubi tamen in secunda scriptura tria ultima signa desunt.

v. 53. et 54 secundae scripturae apud Niebuhrium quoque tab. K. lin. 10 sq. leguntur, omissaque genitivi flexione altera vox in tertio quoque loco huiusce inscriptionis reperitur. Primae scripturae voces occurrunt in Nieb. tab. I. lin. 6 sq. indeque emendari possunt: altera vero vox magis pluralis quam singularis genitivi flexionem habere videtur.

v. 55. in utroque scribendi genere, ut ἅπαξ λεγόμενον, dubium est. In primae scripturae voce, si recte scribitur, secunda litera vocalem aliquam designet, necesse est, quum in Nieb. tab. I. lin. 19. fin. et 22. init. literam H. excipiat.

v. 56 et 57. initium faciunt et *v. 58.* finem Nieb. tab. D.

v. 59. jam quinquies supra affuit, *v. 60 et 62* in secunda scriptura a voce 29. haud differre videntur, licet primae scripturae voces variatae sint. *Vox 61* eadem esse videtur, quam quae loco 72 legitur; hinc primae scripturae vocem *bômê* lego. *Boman* (Anq. p. 485) in Pehlavica dialecto *filium* designat; eundemque designat vox *Bôn*, quam loco 72. legimus aliasque *Bûn* scriptam reperimus.

v. 63—66. hanc ipsam inscriptionem claudunt, et apud Niebuhr. quoque occurrunt in tab. K lin. 19—21. Sed notandum est, in voce hujus inscriptionis antepenultima duas deesse literas, Y. =YYY. =YY. apud Niebuhrium contra in illa voce, quae hancce inscriptionem claudit, duas alias similes, Y. =YYY. ⋚-YY. esse insertas.

v. 67. et 68. mox redeunt, et prior in Niebuhr. quoque tab. K. pau-

cis interjectis repetitur, lin. 15 et 16. ubi prima litera deleta est, et lin. 17., tum lin. 20. et 21.

v. 69. est eadem, quae vox 75. hic vero minus recte transcripta.

v. 70. et 71. 72. 73. et 74 de his modo sermonem fecimus: *ad v. 75* vero notandum est, eam in secunda scriptura a v. 22. et 58. non diversam esse. Eadem in fine inscriptionis ad fenestras conspicuae voci [cuneiform] et in Niebuhr. tab. D. voci [cuneiform] respondet, ut adeo luce clarius sit, primae scripturae voces esse synonymas.

v. *76.* in Nieb. tabulis non occurrit, ideoque Bruinii auctoritate sola nititur.

de v. 77—80 ad v. 63—66 jam sumus loquuti.

Beilage zum zweiten Hefte des fortgesetzten Berichtes über die Keilinschriften von Persepolis (ganz von Gr.'s Hand).

Die Bruinische Inschrift N. 131 enthält den Schlüssel zur Erklärung und Ergänzung der größeren Inschriften von Niebuhr, oder bahnt wenigstens den Weg dazu. Um so mehr ist es zu bedauern, daß wir sie nur in einer fehlerhaften Copie besitzen, deren Verbesserung bei dem ersten Anblicke kaum möglich scheint. Dennoch ist es mir durch mühsame Vergleichung derselben mit der zweiten Schriftart und den Niebuhrischen Inschriften gelungen, nicht nur die erste Schriftart bis auf einige Wörter völlig lesbar zu machen, sondern zugleich auch folgende Resultate über die zweite Schriftart festzusetzen.

1) Auch von der zweiten Schriftart gelten die allgemein aufgestellten Sätze über die Keilschrift überhaupt, daß sie von der Linken zur Rechten muß gelesen werden, und keine Zeichenschrift sey. Sie ist wirklich Buchstaben-Schrift, da sie Wörter von 8 und Flexionen von 3 Zeichen enthält, und die Zahl ihrer Zeichen nicht über 40 steigt. Nur für den Königstitel hat sie, wie die erste Schriftart, ein eigenes Zeichen; und weder in ihr, noch in der dritten Schriftart, kömmt jemahls das völlig ausgeschriebene Wort für den Königstitel vor. Sie hat ebenfalls eigene Zeichen für lange und kurze Vocale, und unterscheidet sich von der ersten Schriftart nur dadurch, daß sie neben den Zeichen einzelner Konsonanten auch Sylbenzeichen von Konsonanten cum vocali nativa hat.

2) Die zweite Schriftart entspricht der ersten Wort für Wort, dagegen die dritte oft beträchtlich davon abweicht. Ja! sie correspondirt mit der ersten Schriftart nicht bloß wörtlich, sondern

zuweilen selbst buchstäblich, und zwar nicht nur in nominibus propriis, sondern auch in appellativis.

3) Die zweite Schriftart hat, so wie auch die dritte, keine Praefixa, sondern lauter Suffixa; sie drückt die verschiedenen Casus nicht durch vorgesetzte Präpositionen, sondern durch angehängte Flexionen aus. Ihre Sprache kann also eben so wenig aramäisch, als ägyptisch, oder sonst eine Sprache seyn, welche Derivata und Wortbiegungen durch Praefixa bildet. Sie scheint vielmehr, da alles den Charakter des Persischen trägt, und die bereits entzifferten Wörter weder in Parsi, noch Pehlwi aufgefunden sind, ein verlorner Dialect der persischen Sprache zu seyn. Im Gebrauche der Flexionen hält sie zwischen der ersten und dritten Schriftart das Mittel, da sie in jener am häufigsten, in dieser am seltensten sind.

4) Die zweite Schriftart gibt den sichersten Führer ab, die erste richtig zu erklären, da sie ihr treuer und sclavischer als die dritte Schriftart folgt. Sie hat oft gleiche Zeichen für zwei verschiedene Wörter der ersten Schriftart, und zwar an mehren Stellen auf dieselbe Weise, und wieder verschiedene Zeichen für ein und dasselbe Wort. Ein sicherer Beweis, daß jene in der ersten, diese Wörter in der zweiten Schriftart synonym sind. Nur durch beständige Vergleichung der zweiten Schriftart kann man in zweifelhaften Fällen über die wahre Lesart der ersten und über ihren Sinn mit Sicherheit entscheiden. Ja! dadurch wird es selbst möglich, einzelne Stellen der zweiten Schriftart wörtlich zu übersetzen, ohne sie vorher entziffert zu haben.

5) Der Inhalt der zweiten Schriftart ist immer dem Inhalte der nebenstehenden ersten Schriftart gleich, da sie ihr Wort für Wort correspondirt. Nur Niebuhrs Inschrift K. entspricht der Inschrift I. bloß in der ersten Periode; so wie die Inschrift L. von der dritten Schriftart der Inschrift H. nur in wenigen Worten entspricht.

6) Was den Character der zweiten Schriftart anlangt, so hält sie auch hierin das Mittel zwischen der ersten und dritten: indem die Zeichen der einen weniger, der andern aber mehr complicirt sind. Von der ersten Schriftart unterscheidet sie sich dadurch, daß sie mehr Querkeile hat, und in manchen Zeichen gar kein grader Keil oder Winkelhaken sich findet. Von der dritten Schriftart unterscheidet sie sich, wie die erste, dadurch, daß sie die schrägen Keile meidet, und keine Keile sich durchkreuzen läßt.

G. F. Grotefend.

(4) GEORGII FRIDERICI GROTEFENDI COLLABORATORIS SCHOLAE GOTTINGENSIS

PRAEVIA

DE CUNEATIS, QUAS VOCANT, INSCRIPTIONIBUS PERSEPOLITANIS LEGENDIS ET EXPLICANDIS (RELATIO CONTINUATA).

FASCICULUS III.

DE

SENSU MAJORUM INSCRIPTIONUM, ET INTERPRETATIONIS PRAESIDIIS.

Gottingae a. d. 20. Maji 1803.

Praemonenda
de interpretationis nostrae praesidiis.

Praeparandis, quantum potui, praeparatis, ad versiones majorum inscriptionum ex primo scripturae cuneiformis genere progredior. Sunt quidem haud pauca, quae, quum recentioris Persarum linguae imperitus sim, nondum satis perspecta habeam; ne tamen diutius Eruditorum desideria frustrari videar, periculum vertendi jam facio. Eo magis autem veniam Doctorum Virorum mihi rogare licet, quo pauciora sunt praesidia, quoque magis turbidus est fons ille unicus, ex quo notitias omnes hauriam. Zendici enim sermonis, praeter paucas sane et incertas animadversiones Anquetilii, praeterque parvum quoddam vocabularium, quod Zend-Avestae adjectum est, neque grammaticam neque lexicon habemus. His super ea, quae de Zendica lingua supersunt, non in originali scriptura legere mihi contigit, nec in contextu, sed passim excerpta latinisque vel gallicis potius literis perscripta. Accedit, quod Anquetil., auctor ac testis noster unicus, ita quandoque dormitaverit, ut haud incaute fides versioni ejus habenda sit. Ne quis igitur nimis inique de interpretatione nostra judicet, si vel Anquetilium vel adeo translatorem ejus Kleukerum, qui auctoris sui errores male fida saepe versione auxit, sine ulla cautione ac indubitata fide comparet: argumenta prius proferamus, e quibus id appareat, quod de utroque modo monuimus. Ne autem justo longiores simus, ea sola recensebimus, quorum argumenta e vocabulariis illorum petere licet.

I. *Ordini vocabulorum* in istis vocabulariis parvam fidem habendam esse, ex eo conspicitur, quod ejusdem originis vocabula sub diversis literis haud raro recensita sint. Zendica idiomatis vocabula sine ullo ordine inter se mixta fuisse, Anquetil ipse in prae-

fatione profitetur: at ille quidem verum eorum ordinem haud ubique restituit. Ut alia levioris momenti exempla, quae innumera sunt, silentio praeteream, ad illud solum provoco, quod etiam ejusdem nominis numeros diversis locis et contra naturalem interdum ordinem collocaverit, v. c. *djé* sing. *djeéo* dual. et *djehî* plur. p. 441; *venté* sing., *ventâho* dual. et *venetenanm* plur. p. 458. Ad haec incommoda accedit, quod numeros grammaticales haud distincte annotaverit, sed pluralem semper secundum Pehlavicam versionem per vocem *tres* adjectam indicaverit, quum tamen ad voces *iouschmâkém* p. 466. et *tchekeén*, p. 468. diserte dicatur, per trium numerum pluralem designari. Gravioris autem momenti est illud, quod voces saepius sub alienis ac diversis literis collocatae sint. Sic *éréző*, digitus, p. 473. sub accentuata É, sed *erezân*, digitus anterior, p. 433. sub prima alphabeti litera invenitur; *ârmeetesch*, *ârmeté*, humilitas, p. 473. sub vocali Å, sed *erém*, humilis, p. 433. sub prima litera occurrit; *hapté*, septem p. 462. sub H, sed *aptenghom*, septangulum, p. 436. rursus sub prima litera collocatum est. Quo factum est, ut prima vocalis tam multa, reliquae tam pauca contineant vocabula, quanquam plura quae ad illam attinebant, aliis attribuit Anquetil. Ex inscriptionibus nostris apparere videtur, voces illas, quarum prima litera est tam E, quam O, a simplici E incipere, ut *eghranm* et *oghranm*, fortis, Anq. 1. 2. p. 423. *eschêhé* et *oschêhé* Anq. 1. 2. p. 78—80. purus, sanctus. Illas contra Anquetil sub prima alphabeti litera disposuit, simplicique E. nonnisi tria vocabula tribuit, quorum duo posteriora *eschedanm* et *eschto* iterum sub prima litera p. 434. occurrunt. Vox *eschedanm* haud dubie composita est ex *as* sive *asch* p. 473. sive *esche*, vividus, Kleuk. Anh. I, 1 p. 146 et ex *éedé*, cutis Anq. p. 437. vox *as* tamen apud Anquetilium sub Â reperitur. Ista vero vocalium confusio non tantum incommodi habet, quantum confusio consonantium, sive in initio sive in media vocabulorum parte sint positae. In primis Anquetil ejusmodi confudit literas, quae in Pehlavico alphabeto similes figura sunt, quasi Zendicas voces non tam Zendicis quam Pehlavicis literis perscriptas legerit. Permutantur praecipue N et V. e. g. *né* p. 456. et *vé* p. 461. ut adeo vox *eenekô*, frons p. 435. ab *eevé* ibid. derivandum videatur, sicuti Pehlavicum *Peschanck* a *Pesch* p. 469. Si quis igitur memoria teneat, quod Anquetil de Pehlavico alphabeto affirmat, A ab H, N a V, V ab O vel U, L ab R, P ab F, J et Z, D abs T, H ab S, SCH ab Kh, D et Dj a G duro et J nonnisi *punctis* distingui: cognationem inter vocabula inveniet, quae nulla videtur, v. c. inter *bekhdré* p. 438. *venghré* p. 459. et *vedeereïoesch* p. 457; inter *ghnâd* p. 449. et *djened* p. 449;

inter *veheschtehé* p. 458. et *oschta* p. 472. Hinc nihil mirum, quod eadem vocabula bis vel pluries interdum recenseantur, e. g. *eôkhté* p. 437. et *iokhté* p. 466; *venghed, voohekhté* et *veoûekhdé* p. 459.

II. *Versioni* etiam *Anquetilii* non semper fidem habendam esse, ex eo patet, quod Zendicas voces Pehlavicae versionis ope vertisse videatur, nisi cum recentior Persarum lingua contrarium docebat, e. g. *zeémenô* p. 446. terra, quod in Pehlavica versione *zivanand*, h. e. vivus, redditum erat. Ubi ergo Pehlavica versio pluribus modis legi atque converti poterat, quomodo reddendae essent voces, Anquetilio non liquebat, e. g. *eeédjô* p. 437. *vérénoûed* p. 461. *pérénem* p. 470. At interdum illum sine causa dubitasse, exemplo est nomen *sreoûetô* p. 448. quod, cum nonnisi unum R, contineat, nullam cum vocibus *sreré*, *srirâo* cognationem habet, sed ex vocibus *sreoûé*, *sreoûed*, *sreoûengho* explicandum, nec per *oschtah*, purus, sed per *aveschtah*, verbum, vertendum est. Eadem dubitatione haud necessaria haesit Anquetil in voce *peoroûé*, p. 469. quam per pehlavicam *pesch* reddendam esse, e *peôoroïê* et *peoerîm* ead. pag. patet. Praesertim propter similitudinem literarum pehlavicarum N et V, tum V et O vel U, plura vocabula incerti sunt sensus, ut *coûere* p. 438. *beântâo* p. 439. *snes* p. 448. *dâjed* p. 444. *athé* p. 474. Quo factum est, ut vox *asté* p. 434 contrarii prorsus significatus esse dicatur (*est, non est*) id quod sana mente concedere nequimus. Error in eo latere videtur, quod *asté*, prout prima scribitur litera, diversam prorsus significationem habeat. Si a prima alphabeti litera vox incipit, verti debet per *est*, ut voces *asteoûâô*, *astém*, *astâtô*, *aschti* eadem pagina docent, sin autem vocalis Â prima ejus est litera, quemadmodum pag. 474, vox illa per *sedens, jacens, destructus*, *deletus* vertenda est, id quod in Pehlavico sermone per *nast*, *djatibounast*, exprimitur. Quum igitur Pehlavicarum literarum N et V figurae haud facile possint distingui, Anquetil p. 434. *vast* pro *nast* legisse videtur, sicque *non est* vertit. Huc accedit, quod Anquetil ipse in praefatione ad lexicon Pehlavicum hanc dialectum haud satis novisse profiteatur, ut adeo errores quidam vitari nequirent. Ne plura proferam, *vérédoûô* p. 461. participium verbi *vérédé* esse videtur, itaque pehlavica versio *varman* quidem legenda, sed fortasse per *tollens, auferens*, neque per *ille* vel *dulcis*, reddenda erat.

III. Intelligitur ex illis, quae protuli, quam inique judicet is, qui Zendica inscriptionum vocabula nonnisi ex Anquetilii opere aestimet: Anquetilii opus e contrario ex inscriptionibus nostris interdum aestimari potest. Nam ex ipsis illis erroribus clare satis apparet, Zendicum sermonem antiquum esse, nec ab Anquetilio fictum, quemadmodum nonnulli argumentari conati sunt. Restat jam,

ut ostendam, quam parvum ac incertum usum *Kleukeri versio* praebeat, quum is non semper idiomatis verba fide reddiderit. Ut exempla falsae constructionis taceam, quae huc minus pertinent, ad falsas singularum vocum versiones provoco, quae in vocabulariis reperiuntur. Vocem gallicam *soi* Kleuker ita convertere solet, quasi scripta sit cum litera T (*soit*, sit) quamvis Anquetil addiderit plerumque *luimême* e. g. *hoûô* Anq. p. 464. Kl. p. 159. Vocabulum *fils* pluralis numeri illi videtur: nam vocem *pothré* p. 470. Kl. p. 163. pehlavicamque ejus versionem *boman* Kl. p. 172. per pluralem vertit, quamquam h. l. persica *peser* ab illa non differat, quam Kleuker pag. 163. pro singulari recte habuit. *Fille* ad voces *pérenâïosch*, *pérénâeo*, *pérénaeonanm* ibid. rectius per *puellam sive virginem*, quam per *filiam*, reddi poterat, id quod voces *apérénâeokô*, *apérénâeoke*, *apérénâeokenanm* p. 143. requirunt. cf. *sée* Kl. p. 149. et alia ejusmodi. Ad istos errores accedit neglecta perspicuitas, si res diversae iisdem nominibus a Germanis vocantur: praecipuum autem incommodum inde exsistit, quod ad tales voces, quales sunt *Räuber*, *Sünder*, p. 145. numerus grammaticalis haud annotatus sit, sicuti ad vocem *Zauberer* pag. 161. factum est.

Quae cum ita sint, nimiam jactarem solertiam, si me, rudem literarum orientalium ac destitutum fere omnibus praesidiis, perfectam omnibusque numeris absolutam versionem exhibere posse putarem. Viam ad perfectiorem aliquam interpretationem aperuisse obiterque monstrasse sufficiet, quale inscriptionum nostrarum argumentum esse videatur.

De majorum inscriptionum cuneiformium sensu et argumento.

I. Inscriptio Bruiniana n. 131. cum Niebuhriana A.

Constat illa inscriptio tribus partibus seu periodis, quarum posteriores nomen Xerxis aperit. Prima et altera pars in utraque inscriptione eadem est, nisi quod in Bruiniana regis titulus abbreviatione semper scriptus sit, et in Niebuhrianae initio dimidium primae partis interierit. In tertia parte inscriptiones istae paullum quidem differunt, ita tamen, ut argumentum utriusque idem fere videatur, unaque intellecta altera quoque intelligi possit. Utramque igitur inscriptionem cum adjecta versione juxta se ponam, quo magis similitudo earum illucescat: cui deinde versionis meae qualiscunque argumenta ad Kleukeri exemplum, Anh. z. Zend-Av. T. II. P. II. pag. 18 sq. adjungam.

Inscriptio Bruiniana nr. 131.

Pars prima.

Vû. *eghré.* *êûroghdê.*
Pius. probus. Oromasdis cultor.

âh. *ôoeô.* *vûhôho.*
hanc. constellationem. sanctam.

êdê. *âh.* *êeo.* (r) *âsmêtscho.*
et. hunc. diem. coelestem.

êdê. *âh.* *ormôho.*
et. illum. defunctum.

êdê. *âh.* *schôhêtôo.*
eumque. lumine fulgentem.

ede. *ormôhâhê.* *âh.*
et. defuncti (filium.) hunc.

Khschhêrscheo. *K....ho.* *ezûtschûsch.*
Xerxem. regem. florentem.

êôeo. *pschûtschâo.* *K...ho.*
summum. quorumlibet. regem.

êôeo. *pschûtschâo.* *froêtâro.*
summum. quorumlibet. amplificet.

Pars altera.

Édo. *Khschhêrschê.* *K...h.*
Dominus (est). Xerxes. rex.

eghré. *Khschehioh.* *K...hêtschâo.*
fortis. rex. regum.

K...h. *dâhûtschâo.*
rex. populorum.

pschûe-otschêtschâo.
quorumlibet purorum.

K...h. *êâhêhê.* *vûhôhê.*
rex. collegii. puri.

eghréêhê. *zûrôh.* *êpôh.*
probi. vi. maxima (praediti).

Dârheâûsch. *K...hâhê.*
Darii. regis (filius).

bûn. *âkhêotschôschôh.* *Jêmôh.*
stirps. mundi rectoris. Djemschidis.

Pars tertia.

Khschhêrschê. *K...h.* *eghré.*
Xerxes. rex. fortis.

[e]eschtschê. *êûr[âh]oghdêâê.*
puros. Oromasdis cultores.

Inscriptio Niebuhriana A.

Pars prima.

Ad ultimam usque literam *o* deleta sunt.

êdê. *ormôhâhê.* *âh.* *Khschher-*
et. defuncti (filium). hunc. Xer-

schêo. *Khschêhiôho.* *êzûtschûsch.*
xem. regem. florentem.

êôeo. *pschûtschâo.* *Khschêhiôho.*
summum. quorumlibet. regem.

êôeo. *pschûtschâo.* *froêtâro.*
summum. quorumlibet. amplificet.

Pars altera.

Édo. *Khschhêrschê.* *Khschêhiôh.*
Dominus (est). Xerxes. rex.

eghré. *Khschêhiôh.* *Khschêhiôhêtschâo.*
fortis. rex. regum.

Khschêhiôh. *dâhûtschâo.*
rex. populorum.

pschûe-otschêtschâo.
quorumlibet purorum.

Khschêhioh. *êâôhêhê.* *vûhôhê.*
rex. coetus. puri.

eghréêhe. *zûrôh.* *êpôh.*
probi. vi. maxima (praediti).

Dârheâûsch. *Khschehiohahe.*
Darii. regis (filius).

bûn. *âkhêotschôschôh.* *Jêmôh.*
stirps. mundi rectoris. Djemschidis.

Pars tertia.

Khschhêrschê. *Khschêhiôh.* *eghré.*
Xerxes. rex. fortis.

mhêo. *otschê.* *êrmo.* *ôôê.*
magnus. purus. floreat. usque.

(khschn)o. *âpôsch; Dârheûsch.*
foveat. nunc! Darius.

K...h. *êzûtschûsch.* *âh.*
rex. florentem. hunc.

otschê. *bômê.* *mêo.* *êûroghdê.*
per. filium. magnum. Oromasdis cultorem.

pêthûe. *âdê.* *vûôvôsch.*
degentem. hac in. puritate.

ûmê. *mhoôh.* *érmo.*
ista. magnitudine. floreat!

Úmê. *mhôvh.*
Ista. magnitudine.

bôn. *Dârheâûsch.*
filius. Darii.

K...hâhê. *érmo.*
regis. floreat.

êeschôôh. *êûroghdê.*
in sanctitate. Oromasdis cultor.

pêthûe. *âdê.* *vûôvôsch.*
degens. hac in. puritate.

ûmé. *mhoôh.* *âptrô.* *Érmo.*
ista. magnitudine. paterna! floreat.

éeschôôeo. *Eschtsché.* *éûr.*
sanctitate summa! Puros. Oromasdis.

oghdéâ(e). *ézûtscheo.* *méo.*
cultores. florentes. magnus.

éuroghdé. *pêthûe.* *âdé.* *vûôvôsch.*
Oromasdis cultor; degens. hac in. puritate.

ûmé. *mhoôh.* *khschno.* *ûmé.*
ista. magnitudine. foveat! ista.
mhoôh. *érmo.*
magnitudine. floreat! (ipse).

Quamvis falsa sit nostra interpretatio, inscriptiones certe modo explicitae Xerxi debentur. Atqui Bruiniana inscriptio parastatae cuidam in australi parte aedificii G. posito incisa est, (de Bruin p. 218. Nieb. II. p. 141.) quod aedificium, ut in priore relatione monui, a Dario exstructum est, licet Niebuhr. II. p. 142. temere contrarium existimet. Erectus est igitur iste parastata, priusquam Xerxes Darii aedificiis sua adjecerat h. e. initio (inito?) statim regno Persarum. Iam vero juxta Niebuhrianam inscriptionem A. quae ejusdem argumenti est, totius imperii populi exsculpti sunt, qui per legatos suos regi Persarum tributa atque munera afferunt. Nieb. II. p. 134. Tab. XXII et XXIII. Heeren Asia p. 233. seq. Itaque probabile inscriptionum argumentum nobis inventum esse, quis est, qui dubitet? illas enim eo tempore incisas esse declarat versio nostra, quum defuncto Dario Xerxes filius successisset, legatique populorum omnium regi novo gratularentur. Argumenta autem, quibus interpretatio nostra nititur, sunt haec.

1. *Vû* esse nomen aliquod, flexio *vûêtschâo* Nieb. H. v. 5 docet: hinc a zendico *vohou* et pehlavico *véh* Anq. p. 459. sq. non differre videtur, quae *purum* vel quod Persarum loquendi ratione idem est, *pium* significant.

2. *Eghré*, ut ad minores inscriptiones jam annotavi, et formis

aequivocis *eghranm* Anq. t. 2. p. 423. *aghrehé* Anq. II. p. 202. probatur, *fortem* designat, inde etiam *probum*, ut nostratium *brav*.

3. *Êûroghdê*, quod in secundo scripturae cuneiformis genere iisdem fere literis scribitur, pluribusque nominum flexionibus augetur, haud dubie substantivum est, et, nisi fallor, idem significat, quod Zend-Avestae nomen *Mazdïesnô* h. e. Oromasdis cultor Anq. p. 453. quo nomine Persae qua Zoroastris discipuli appellari solent. Oromasdes enim in Zendico sermone *Ehorô Mezdâo* Anq. p. 435. h. e. rex magnus. Anq. I, 2, p. 80. n. 8. Mém. de l'Acad. d. inscr. T. XXXI. p. 385. n. 16. vocatur. Quemadmodum igitur vox *Mazdïesno* sive *Mâzdêïesnôêsch* e *Mâzdé* et *iesnôésch*, precans, compositum est: ita vox *êûroghdê* ex *Ehorô* et *eôkhté*, dicit, appellat, Anq. p. 437. cf. Kleuk. I. p. 93. n. 14., cujus primitivum est *okhdém* sive *okhdâo*, dictum, Anq. p. 471. compositum esse videtur. Similiter composita est vox *Jâtokhté*, magica verba pronuncians i. e. Maleficus. Anq. p. 466. cujus simplex est nomen *Jâto*, magus, Pl. *Jâthvanm* p. 467.

4. *Âh*, hic, ille. Anq. p. 473. pro articulo usurpari, ante accusativos inprimis, ad minorem Darii inscriptionem jam animadverti: hinc quoque in tertia scriptura omittitur. *Ôoêo* ab *ôoo* vix differt, quod in laudata modo inscriptione vidimus: in secunda sane scriptura non differunt.

5. *Vûhôho* (ita enim legendum videtur, si vocem 41. conferas) est accusativus vocis *vû* sive *vohou*, quam modo explicui. *Ôoêo vûhôho* itaque constellationem sanctam h. e. diem egregium, significat.

6. *Êdê* h. l. inter plurium accusativorum seriem toties repetitur, ut conjunctionem copulativam non possimus non agnoscere. Secundum Anquetil. p. 433. *edé* quidem *si* significat, sed si voces *edenanm* ibid. *ethé* p. 437. *ad* sive *aad* p. 473. compares, plures ejus significationes invenies. *Ed*; *ad*, *âdâd* qua copulativa conjunctio occurrunt Anq. I. 2. p. 121. 152. II. 227. Oppositum est ei *noûed*, neque p. 457. quod etiam *needa*, *neda*, *nedé*, scribitur. Kleuk. Anh. I. 1. p. 138. not. e. 139. not. g. 117. not. c.

7. *Âh êero âsmêtscho* (ita enim legendum videtur) iterum casu quarto sunt posita, et *hunc diem coelestem* significant. *Eïeré* s. *eeré* Anq. p. 435. per *diem*, et *schmeha* (asman) in pehlavico vocabulario per *coelum* redditur: unde *âsmetsch*, coelestis, derivo.

8. *Êdê âh ormôho êdê âh schôhêtôo*, et illum sublatum lumineque fulgentem h. e. defunctum beatumque regem Darium. Literas V. et O. inter se confundi, supra jam monui: hinc *ormôh* a *vérédé*, pehlavice *varam* (tollo) derivo, Anq. p. 460. *Scheeto* Anq. p. 449. sive *khscheétô* Anq. p. 442. fulgens lumine, beatus vertitur.

9. *Êdê ormôhâhê âh Khschhêrschêo,* et defuncti (scil. filium) hunc Xerxem. His vocibus et ultima prioris vocabuli litera Nieb. inscriptio A. incipit, cui ergo initium desse negari nequit.

10. *Khschêhiôho êzûtschûsch,* regem florentem. Posteriore vocabulo minor inscriptio Darii finitur, ubi illud ab *iezeté* derivatum per *divinum* interpretatus sum: at merito Vir Ill. O. G. Tychsen, licet cetera, quae monuit, non concedam, interpretationem istam reprehendit. Derivo nunc vocabulum ab *ezâedé* Anq. p. 433. quod, si vocis *ozïô*, Anq. p. 472. versionem pehlavicam compares, *bene valere*, significat. Ejusdem originis vocem *azieantem* puto, quam Anq. Mem. de l'Acad. d. inscr. T. XXXI. p. 355. idem designare affirmat, quod *zend* in Pehlavica dialecto, h. e. vivus. *Êzûtschûsch* ex *êzûtschoesch* contractum et accusativus vocis *êzûtsch* h. e florens, adjecta syllaba determinativa *esch*, esse videtur.

11. *Êôeo pschûtschâo Khschêhiôho êôeo pschûtschâo* omnium maximum, regem omnium maximum. *Êôe* cum accusativi flexione *o* interpretor ex *eoûestâtem*, Anq. p. 436. summus est, et *pschû* cum flexione genitivi plural. ex *pschïê*, Anq. p. 470. quidquam, qualecunque sit, vel e pehlavico *besch*, multum, ibidem. cf. Kl. II. p. 203. n. c.

12. *Froêtâro*, ut etiam in secundo scripturae cuneiformis genere scriptum est, verbum esse conjicio, a quo antecedentes omnes accusativi pendeant, quodque *amplificet* seu *celebret* convertere non dubito: sunt enim permulta Zendica vocabula similia, in quibus amplitudinis vel celebritatis notio latet. Conferas, ut nonnulla saltem indicem, quae sequuntur: *fréthém, frethemtscha,* qui amplificat. Anq. p. 450. *fréoûêrâné*, celebro, Anq. I. 2. p. 80.

Pars altera.

13. *Êdo* sine dubio principem vel dominum significat, quum in inscript. Nieb. H. lin. 20 et 21. voces *êdo êdohêtschâo* occurrant, quarum sensum a vocibus *Khschêhiôh Khschêhiôhêtschâo* haud differre puto. An *adûânem* stellae fixae Kl. I. p. 178. n. 2. vocis istius pluralis sit, dijudicare non ausim, sed vocem istam novae periodi esse initium, ex eo liquet, quod inscriptionem Nieb. I. aperiat, cujus prima periodus ejusdem est sensus, ad Darium vero Hystaspis pertinet. Vocabula, quae sequuntur, e minoribus inscr. jam novimus.

14. *Pschûe-otschêschâo*, (purorum quicunque sit) idem significare puto, quod voces in laudata modo inscriptione Nieb. I. obviae, lin. 3 sq. *mhôschâo-pschûtschâo. Pschûe* in secundae scripturae versione non differt a *pschûtschâo*; quum autem in primae scripturae genere flexio genitivi plur. desit, cum sequenti voce lineola qua-

dam illud conjunxi. *Otschê*, si ad usum ejus in Nieb. H. respiciamus, eadem est vox, quae apud Anq. p. 462. *ketsché* sive *hetscheté* scribitur et purum designat. Eundem fere sensum habet vocabulum *mhôschâo*: *môscho* enim (cf. Nieb. H. lin. 1.) secundum Anquet. p. 455. et T. I. 2. p. 178. not. 2 *ardentem* h. e. religiosum significat.

15. *Khschêhiôh êâ(ô)hêhê vûhôhê eghréêhê*, rex coetus puri probique. *Êâôhêhe* in secunda scriptura iisdem signis translatum est, quibus vocabulum *ôoéo* inscriptionis hujus quintum: hinc *collegium* seu *coetum* hac voce designari puto. Num primitivum ejus sit *céoûo*, unus, Anq. p. 436. ut designetur quasi *unio*, non liquet: ceterum flexio *êhê* et *ôhê* in hac et sequentibus vocibus flexio genit. sing. feminini generis esse videtur, ut *âhê* in masculino genere.

16. *Zârôh êpôh*, cujus vis est maxima. Ita interpretor e *zâoûeré* pehlavice *zour*, vis, robur, Anq. p. 447. et *epe*, pehlavice *méh*, maximus p. 485. Reliqua hujus periodi vocabula e minoribus inscriptionibus nota sunt: vocem vero *Jêmôh* ab *Jemo*, pehlavice *Djem* Anq. p. 465. derivare non dubito. Anquetilio teste I. 2. p. 278. nomen Djemschidis compositum est e *djem* et *sched*, lumen, fulgor.

Pars tertia.

Hac in parte duae nostrae inscriptiones post tria priora verba: *Khschhêrschê Khschêhiôh eghré* (Xerxes rex fortis) differunt; utriusque igitur vocabula separatim mihi explicanda sunt.

A. ex inscriptione Bruinii, n. 131.

1. *eschtschê êûroghdêâê* (ita enim legendum est, si Nieb. H. lin. 4. et 9. I. lin. 6 et 7.. conferas) accusativos plur. puto: ceterum voces *esché*, Anq. I. 2. p. 145. *eschôesch*, I. 2. p. 88. *eschehé* et *eschémtscha*, II. p. 434. purum, sanctum, significant.

2. *Khschno*, ut ad literam *o* ex inscr. Nieb. H. lin. 3. supplevi, ex Anquetilii *Khschnota*, favorabilis p. 442. per vocem *foveat*, reddidi.

3. *âpôsch*, si recte vocem legi, in Pehlavica dialecto idem, quod Zendicum *aad*, Anq. p. 473 i. e. nunc, significat.

4. *otschê*, (reliquas voces ut notas jam omitto) hoc loco non per *hetscheté*, purum, ut supra, sed per *hetscheeté*, cum, per, super, Anq. p. 462. cf. interpretationem Kleukeri Anh. II. p. 2. p. 18. v. 31. explicandum puto.

5. *bômê* hoc loco legendum et, ut Pehlavicum *boman*, per *filium* vertendum esse, vox paullo infra occurrens *bôn* docet, quae in secunda versione iisdem literis scribitur.

6. *mêo êûroghdê*, magnus Oromasdis cultor, (mâé, mâo, pehlavice *mah*, *méh*, Anq. p. 455. magnus redditur) nominativus est,

itaque supplendum *qui est*, ut saepius fit in Zendico sermone. cf. Kleukeri interpr. Anh. II. 2. p. 18. v. 5.

7. *Pêthûe* participium verbi *pâté*, transit, hinc *degit*, Anq. p. 471. esse videtur, unde nomen *pethô* p. 470. *pethanm.* Kl. I. p. 159. n. 1. et *péethvá.* ibid. p. 179. n. 4. h. e. via, originem trahit.

8. *Âdê* ablativum puto pronominis *a* sive *ad* hic, Anq. p. 473. Anquetil enim affirmat Kl. II. p. 53. per literam D. ablativum plerumque signari, quamvis sint aliae quoque terminationes. Huc refero terminationem *ôh* v. c. *zurôh êpôh*, et *vôsch* v. c. *gôiôvôsch vûôvôsch.* Nieb. H. lin. 14. 15.

9. *Vûôvôsch* a voce *vû* originem suam ducere, ex vocum similitudine in secunda scriptura apparet.

10. *Ûmê* ab *oné*, iste, Anq. p. 472. haud differre puto: nam literas N. et M. inter se permutari, voces *ehmâé* et *enïé*, hic, Anq. p. 434. docent.

11. *Mhoôh* ablativum nominis puto, quod a *mâo*, magnus, derivo.

12. *Érmo* sive *érm*, quae vox fenestrarum inscriptiones claudit, et in prima mea relatione falso per *servit* est reddita, iisdem signis in secunda scriptura exprimi solet, quibus vocabulum *ezûtschûsch* exprimitur. Itaque *érmo* per *floreat* verto, et inscriptiones supra fenestras ita jam interpretor: „Ard coelesti elevato Darii regis anima vivat“.

13. Reliquis vocibus jam explicitis, vocabulum *êeschôôh* restat, quod ablativum nominis puto, ab *esché*, purus, derivati, ut *mhoôh*, a *mâo*, magnus.

B. ex inscriptione Niebuhrii A.

Pauca illa vocabula, quae adhuc explicanda supersunt, sunt haec:

1. *Mhêo otschê*, legendum esse, e Nieb. H. lin. 7. apparet. *Mhêo* a voce *mêo* vix differt, *otschê* supra jam interpretatus sum.

2. *Ôôê* cum voce *ôho* Nieb. H. lin. 6. cognatum esse videtur, quam singularem puto nominum *otâ* vel *ové* Anq. p. 471. sq. omnes duo. Hanc igitur vocem per *omnis* et illam per *omni tempore, usque* interpretor, ut *ieoé*, Anq. p. 465.

3. *Aptro* a *peter* (pater) Kl. II. p. 52. derivo et *paternus* verto.

4. *Êeschôôeo* si vera est lectio, ex *êeschô*, sanctitas et *êôe*, summus, compositum videtur.

5. *Eschtschê êûroghdêâê* (ultimam literam Niebuhr omisit) e Bruiniana inscriptione nota sunt: *êzûtscheo*, accusativus plur. vocis *êzûtschûsch* mihi videtur. Reliqua verba jam sunt explicata.

II. Inscriptionum Niebuhrianarum H. et I. initia.

Inscriptiones istae partim tot tantasque lacunas habent, partim tam corrupte a Niebuhrio perscriptae sunt, ut ad interpretandum majore quam Oedipodis opus sit ingenio. Quum praeterea fidis ceterarum scripturarum versionibus careant, omnibus fere subsidiis destituti sumus, quae interpreti lucem aliquam praeferant. Attamen ut ostendam argumentum earum non multum differre ab reliquis inscriptionibus majoribus, nisi quod ad Darium Hystaspis pertineant: inscriptionem I. eatenus saltem interpretabor, quatenus inscriptioni K. respondet. Quibus cum inscriptionis H. principium adjecero, omnia equidem praestitero, quae praestare potui.

A. Initium inscriptionis Niebuhrianae I.

Êdo. *Dârheûsch.* *Khschêhiôh.* *eghré.* *Khschêhiôh.*
Dominus (est) Darius. rex. fortis. rex.
Khschêhiôhêtschâo. *Khschêhiôh.* *dâhûtschâo.*
regum. rex. populorum.
mhôschâo. *pschûtschâo.* *Gôschtâspâhê.* *bûn.*
ardentium. omnium. Hystaspis (filius.) stirps.
âkhêotschôschôh. *Jêmôh.*
mundi rectoris. Djemschidis.

Hancce periodum inscriptionis I. tanto libentius hic apposui, quod cum alteri periodo inscriptionis A. respondeat, veram partium ejus distributionem et interpretationem me docuerit. Cetera vero ne vertam, partim inscriptione K. prohibeor, quae non ultra respondet, partim corruptelis lacunisque tam frequentibus, ut vel lecturus eam omnem operam et oleum perdat.

B. Initium inscriptionis Niebuhrianae H.

Êûroghdê. *eghré.* *âh.* *mhôscho.* *vûêtschâo.* *âûe*[1]).
Oromasdis cultor. probus. hunc. ardentem. purorum. principem.
Dârheûo. *Khschêhiôho.* *êdê.* *âûschôh.*[1]) *khschno.*
Darium. regem. et. imperatorem. foveat!
Frêvr.[2]) *eschtschê.* *êûroghdêâê.* *Dârheûsch.* *Khschêhiôh.*
Celebris (est inter) puros. Oromasdis cultores. Darius. rex.
Jêmôh. *Dârheûsch.* *Khschehioh.* *ôho.*
Djemschidis (proles) Darius. rex (et) omnis.
dâhêûsch. *Pârs.* *mhêo.* *otschê.* *euroghdê.*
populus. Persicus (est) magnus. purus. Oromasdis cultor.

Frêvr.[2]) *âhê.*[3]) *tschôvê.*[4]) *ûespê.*[5]) *ûormôhê.*[6]) *eschtschê.*
(at) celebris (est inter) haec germina. omnia. mortalitatis. (inter) puros.
êûroghdêâê. *otschôê.*[6]) *Dârheûûsch.* *Khschêhiôhâhê*
Oromasdis cultores. sanctitas. Darii. regis.
âôê[1]) *êtschôtschâ.*[4]) *tschôh.*[4]) *mreôh.*[7]) *Jêmôh.*
(qui est) princeps. germinationis. germen. mortale. Djemschidis (proles).

In sequenti periodo lacunae jam incipiunt, ut nimiam proderem arrogantiam, si ultra vertere conarer. Restat igitur, ut de illis vocabulis, quae in prioribus inscriptionibus non occurrunt, interpretationis argumenta proferam.

1. *Ahu* regem significat, Kl. II. p. 217. not. 6. Anh. I. 1. p. 152. Inde et simplicia *âôê*, *âûe*, et compositum *âûschôh*, derivo.

2. *Frêvr* interpretor e *frêouêrâne*, celebro Anq. I. 2. p. 80.

3. *Âhê* est plur. pronominis *âh*, *hic*.

4. *Tschôvê* est plur. nominis *tschôh*, germen, cujus forma aequivoca *tschethré* apud Anq. p. 467. Sic et *schôh* atque *schâthrâo* p. 449. imperator; *khschêiô* atque *khschethrô*, rex p. 442. et alia sunt formae aequivocae. A voce *tschôh* derivatur *êtschôh*, genit. *êtschôhtschâ*, germinatio, quemadmodum *êeschôh*, sanctitas a nomine *eschê*, sanctus. Nam vocalem *ê* non semper vim privativam habere, multa docent exempla, e. g. *asman* a *schmeha*, coelum; *abider* a *peter*, pater; *apêrênâeokênanm*, a *pérénaeonanm* irruptae puellae.

5. *ûespê* non differt a *vêspé*, *vespetché*, omnis. Anq. p. 460.

6. *ûoruôh*, gen. ûormôhe, mortalis, ab ormôh, defunctus, derivo, quemadmodum *otschôê*, sanctitas, ab *otschê*, purus.

7. *mreôh* formam aequivocam adjectivi *mereté*, *mreté*, mortalis. Anq. p. 453. seq. puto.

— — Si quid novisti rectius istis,
Candidus imperti; si non, his utere mecum.
Horat.

Inhalt von Nr. 14:

W. *Meyer*, G. Fr. Grotefend's erste Nachricht von seiner Entzifferung der Keilschrift.

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

1. November. № 15. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 10. Juni.

C. Fr. Gauss.

De integratione formulae differentialis $(1+n\cos\varphi)^{\nu}\cdot d\varphi$.

Herausgegeben von **E. Schering.**

Diese von Herrn Prof. WILHELM MEYER in den Acten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen gefundene Schrift trägt nicht den Namen des Verfassers, nicht den Ort und keine Zeit der Abfassung. Die Handschrift ist aber der von GAUSS gebrauchten so ähnlich, dass über den Schreiber kein Zweifel bestehen kann. Die am Schlusse genannte Abhandlung von KLÜGEL ist die dritte unter den fünf, welche die mathematischen Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis ad a. 1793 et 1794 des im Jahre 1796 ausgegebenen Bandes XII ausmachen. Hiernach ist also die Vermuthung zulässig, daß diese Schrift in GAUSS' Göttinger Studienzeit, von 1795 bis 1798, dem Mitgliede der Gesellschaft, KAESTNER, übergeben worden ist. Mit dem in diesem Aufsatze behandelten Gegenstande findet sich in dem übrigen handschriftlichen Nachlasse von GAUSS kein Berührungspunkt.

Prooemium. Maxima pars Calculi, qui Integralis vocatur, serierum evolutione et tractatione absolvitur. Unica nimirum methodus, quam in illo praeter tentamina et differentiatione in memoriam revocato, invenies, hoc agit ut, data quantitas differentialis in seriem expandatur terminorum, quorum singulus quilibet facile ad integrationem perducitur. In serie finita hoc modo ad expressionem omnibus numeris absolutam pervenitur; series infinita, licet incognitarum relationem quaesitam minus perfecte exhibeat, modo ita procedat at adproximationi locus detur, et quod plurimis casibus apta tractatione obtinebitur, ad vulgares usus sufficere, et aequationi, si qua talis revera inter variabiles propositas detur, aequipollere recte censetur. Est autem plerumque, propter terminorum seriem ingredientium prolixitatem et adparentem anomaliam arduum sane negotium legem istarum expressione generali circumscribere, circumscriptam demonstratione munire; utrumque imminens erroris, irrepentis ex sola coniectura producto calculo ad verisimilitatem elata, periculum, et scientia dignitas postulant. Exemplum eiusmodi disquisitionis sistet dissertatiuncula proposita, quae in formulae $d\varphi(1 + n\cos\varphi)^{\nu}$, existentibus n et ν numeris definitis pro lubitu adsumtis, integratione per series absolvenda versatur. Formula haec, cuius eximius est in Astronomia physica usus, adeo gravis Ill. Eulero visa fuit, ut illi integrum Institutionum Calculi Integralis caput*) dicare nullus dubitaverit. Legem ibi, licet non summa generalitate, expressam, signis concinnioribus circumscribere, et ex genuino fonte rigida demonstratione derivare, operae pretium mihi visum est.

Praemonenda autem ante omnia quaedam, de novo signo in exhibendis serierum terminis generalibus utilissimo, brevibus exponam. In seriebus nimirum, inprimis complicatioribus saepe accidit, ut aliam termini impares, aliam pares legem sequi videantur, et tunc in binas, a se invicem seiunctas dirimi soleat. Quod, cum non sine prolixitate fieri possit, et, ut ita dicam, unitatem expressionis, qua sola tractabilis redditur series indefinita, tollat, nisi aliqua ratione medela adferatur, serierum usum arctis circumscribet limitibus. Sponte autem ex methodo, qua simplicissima quae dari potest inter terminos seriei pares et impares discrepantia, ut nimirum alteri positivi, alteri negativi sint, in ipsum terminum generalem infertur, generalior ista, quam nunc proponere conor, sese offerre videtur. Sit terminus seriei alicuius generalis $m^{\text{tus}} = Q$; si illum positivum velis existente m pari, negativum m

*) Cap. VI T. I.

impari, hoc praefixo factore $(-1)^m$; sin contrario ordine procedere signa malis, praeposito $(-1)^{m+1}$ exhibeo *). Simili ratione, sit expressio generalis termini m^{ti} existente m pari $= P$, existente impari $= Q$, ita, ut P aliam prorsus, quam Q legem sequatur. Dico fore generatim terminum m^{tum} $\frac{1-(-1)^m}{2} Q + \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} P$. Ex hac enim expressione, si fuerit m numerus par, ob $(-1)^m = 1$, evadente $\frac{1-(-1)^m}{2} = 0$, et ob $(-1)^{m+1} = -1$, evadente $\frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = 1$, eliditur pars prima, fitque altera uti fas est $= P$. Sin vero m fuerit impar, cum sit $(-1)^{m+1} = 1$, adeoque $\frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = 0$, et simul $(-1)^m = -1$ et inde, $\frac{1-(-1)^m}{2} = 1$, evanescente parte posteriore restat prior ut assumta fuit $= Q$. Ut unicum tantum exemplum adferam, ex quo notae utilitas elucescat; sumam, quod infra demonstrabitur, posse potestatem indefinitam cosinus dati cuiusdam anguli v. g. $\cos\varphi^n$ semper in seriem secundum cosinus multiplorum eiusdem anguli expandi, ea tamen lege, ut ista, existente n pari, secundum multipla paria procedat, sitque adeo terminus illius r^{tus}, misso coefficiente, $\cos 2r\varphi$; existente autem n impari secundum multipla imparia, sitque tunc terminus eiusdem $r^{tus} = \cos(2r+1)\varphi$. Tunc expressio generalis sic adornari potest: fore seriei in quam $\cos\varphi^n$ evolvitur, terminum generalem $r^{tum} = \cos\left(2r + \frac{1-(-1)^n}{2}\right)\varphi$. Manifesto enim existente n pari contrahitur haec forma in $\cos 2r\varphi$, existente impari abit in $\cos(2r+1)\varphi$.

In dissertatiuncula ipsa generalem hunc notandi modum nonnisi in formula finitima (§ 11) adhibui. Licet enim iam in disquisitionibus quibus ad istam pervenitur cum fructu adplicari possit, abstinendum ipso censui, ne propter addenda quaedam de transmutationibus eiusmodi signorum, si in calculos ipsos ingrediantur, ad nimiam prolixitatem abreptus, dissertatiunculae limites excederem. Satius mihi visum est, notarum eiusmodi tractationem, si calculos subeant prolixos termini, quos adficiunt, et artificia, quibus ad servandam in illis concinnitatem opus est, singulari disquisitione complecti.

---

*) Adsensum huic signo non recusare dignatus est, quem ipsi de illo proponerem, Ill. KAESTNERUS. Qua auctoritate fretus saepius iam in disquisitionibus analyticis idem illud adhibui.

§ 1. Formulae propositae integratio initio quidem facillime perfici posse videtur. Potest enim quantitas data $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ secundum theorema binomiale in seriem, per successivas ipsius $\cos\varphi$ potestates integras procedentem converti. Quo facto singuli eius termini, in $d\varphi$ ducti, et ad integrationem revocati, quaesitum exhibebunt. Recte hoc quidem, verum hac via incedendo ad expressiones complicatissimas deducimur; quaelibet enim quaesitae integralis particula serie continebitur haud parum prolixa. Praestat igitur aliam sequi rationem, in ea fundatam, quod ex Trigonometriae analyticae praeceptis quaelibet ipsius $\cos\varphi$ potestas exponentis integri positivi possit in seriem valde concinnam, per terminos qui solum modo cosinus multiplorum ipsius φ continent, progredientem evolvi. Ita igitur absolvetur negotium propositum, ut primo quidem $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ per seriem, secundum potestates ipsius $\cos\varphi$ procedentem, exhibeatur, mox vero, ex lege generali, antea stabilita, quilibet eius terminus in seriem novam, per cosinus multiplorum progredientem mutetur, atque colligantur demum ex omnibus hisce seriebus membra, qui eiusdem anguli cosinum continent. Series nova, eaque rite ordinata, quae, peractis hisce laboribus exsurgit, in $d\varphi$ ducta statim ad integrationem poterit perduci.

2. Ante omnia igitur lex, qua potestas aliqua cosinus dati per angulorum multiplorum cosinus exhibetur, scrutanda erit. Huic disquisitioni fundamento est formula trigonometrica elementaris*), esse $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a-b)+\frac{1}{2}\cos(a+b)$.

Sumatur iam $\cos\varphi$, quae, in $\cos\varphi$ ducta, dabit $\cos\varphi\cdot\cos\varphi$, quod productum tum, si revera multiplicemus, per $\cos\varphi^2$, tum si per formulam modo expositam in summam solvamus, per $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$ exhibebitur. Est igitur $\cos\varphi^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$. Simili ratione ad potestates altiores provecti, sensim formulas eruimus sequentes

$$\cos\varphi^3 = \tfrac{3}{4}\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi;$$

$$\cos\varphi^4 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{8}\cos 4\varphi;$$

$$\cos\varphi^5 = \tfrac{10}{16}\cos\varphi + \tfrac{5}{16}\cos 3\varphi + \tfrac{1}{16}\cos 5\varphi;$$

$$\cos\varphi^6 = \tfrac{10}{32} + \tfrac{15}{32}\cos 2\varphi + \tfrac{6}{32}\cos 4\varphi + \tfrac{1}{32}\cos 6\varphi;$$

$$\cos\varphi^7 = \tfrac{35}{64}\cos\varphi + \tfrac{21}{64}\cos 3\varphi + \tfrac{7}{64}\cos 5\varphi + \tfrac{1}{64}\cos 7\varphi;$$

$$\cos\varphi^8 = \tfrac{35}{128} + \tfrac{56}{128}\cos 2\varphi + \tfrac{28}{120}\cos 4\varphi + \tfrac{8}{128}\cos 6\varphi + \tfrac{1}{128}\cos 8\varphi.$$

Facile ex his calculis lex generalis eruitur. In potestatibus $\cos\varphi$ paribus non nisi parium ipsius φ multiplorum, quorum maximum

*) Kaestners Astron. Abh. I, II, 10.

dato exponente definitur, cosinus adparent, in imparibus eadem lege multiplorum imparium cosinus. Sed pares non eandem omnino quam impares legem sequuntur.

α. Terminus initialis in paribus, in $\cos 0\varphi = 1$ ductus, coefficiente gaudet cuius denominator, ut ceterorum omnium est ipsius 2 potestas, cuius exponens unitate exceditur ab exponente propositae potestatis. Numerator est fere coefficiens binomialis ad potestatem propositam pertinens, et quidem, si illos suo ordine evolutos concipias, mediorum inter illos dimidius. Cetera membra, multiplum ipsius φ, indicis membri duplum, in coefficiente adiecto eundem quem initiale denominatorem, pro numeratore autem coefficientem binomialem eiusdem potestatis, illo quem initiale gerit tot gradibus posteriorum, quot index membri indicat, continent. Quae lex ita generatim exponi potest: fore $\cos\varphi^{2m}$ seriem, cuius

terminus initialis *) $\quad \dfrac{1}{2^{2m-1}}\cdot\dfrac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2}$,

terminus generalis r^{tus} $\quad = \dfrac{1}{2^{2m-1}}\;{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cdot\cos 2r\varphi$.

β. Potestates impares eidem legi subiectae inveniuntur nisi quod terminus initialis in numeratore, coefficientium binomialium, ad potestatem datam pertinentium medium posteriorem (quippe bini in exponente impari occurrunt et medii et aequales) totum contineat. Lex seriei generalis igitur haec erit: esse $\cos\varphi^{2m-1}$ seriem, cuius

terminus initialis $\quad = \dfrac{1}{2^{2m-2}}\;{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi$

terminus generalis r^{tus} $= \dfrac{1}{2^{2m-2}}\;{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+1)\varphi$.

3. Sumamus igitur primo loco legem propositam in indefinita aliqua potestate impari, v. g. $2m-1^{\text{ta}}$ valere, adeoque esse

---

*) Expressio legis huius EULERIANA, ad coefficientes binomiales non revocata cum proposita si ipsa congruit, sed non aeque concinna videtur.

Ceterum coefficientes binomiales a me semper more HINDENBURGIANO notari, et serierum terminos, duce Ill. KAESTNERO, semper in initialem et sequentes distingui, vix est quod moneam.

[Es ist nemlich ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(\mu)} = \dfrac{\nu(\nu-1)\cdot\cdot(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot\mu}$ gesetzt. SCH.]

$$(\cos\varphi)^{2m-1} = \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 3\varphi$$
$$+\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+2)}\cos 5\varphi \text{ etc.}$$

obtinebitur potestas par unitate maior, utramque aequationis partem per $\cos\varphi$ multiplicando. Quodlibet serie membrum hoc pacto productum binorum cosinuum continet, nec difficulter ex theoremate noto in summam binorum cosinuum solvetur. Sic fiet

$$\cos\varphi^{2m} = \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi\cdot\cos\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 3\varphi\cos\varphi$$
$$+\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+2)}\cos 5\varphi\cdot\cos\varphi + \cdot$$

Evadet igitur quia

$$\cos\varphi\cos\varphi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^{2m-2}}\cdot{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\frac{\cos 2\varphi}{2},$$

eademque lege terminus primus

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cdot\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\frac{\cos 4\varphi}{2}.$$

Initio patet ex solo termino initiali in summam soluto eventurum terminum in $\cos 0\varphi = 1$ ductum, h. e. novae seriei terminum initialem; ceteri enim termini in utraque summae ex illis provenientis parte cosinum multipli alicuius paris ipsius φ continent. Est igitur novae seriei terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\cdot\tfrac{1}{2}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)} = \frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}.$$

Haec vero expressio, quum sit hic coefficiens binomialis inter ceteros suae potestatis mediorum posterior, adeoque cum altero mediorum, cui aequalis est, addendo iunctus potestatis uno gradu altioris coefficientem eiusdem indicis producat, sitque haec ratione

$${}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cdot 2 = {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)},$$

sic poterit exhiberi: esse terminum initialem

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2}.$$

Ad legem terminorum reliquorum generalem enodandam sumatur $\cos\varphi^{2m-1}\cdot\cos\varphi$ terminus generalis r^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+1)\varphi\cdot\cos\varphi.$$

Hic, quum sit

$$\cos(2r+1)\varphi\cdot\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\cos 2r\varphi+\tfrac{1}{2}\cos(2r+2)\varphi,$$

solvetur in partes:

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi+\frac{1}{2^{2m-2}}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+2)\varphi.$$

Ex quo adparet, ex quolibet multiplo impari hac transformatione bina paria, alterum proxime maius, alterum proxime minus dato impari enasci. Sic nonnisi cosinus multiplorum parium in nova serie occurrunt, quorum quilibet coefficientem ex binis seriei adsumtae coefficientibus contiguis conflatum obtinebit. Patet enim ex transformatione in termino r^{to} ipsius

$$\cos\varphi^{2m-1}\cdot\cos\varphi$$

instituta, non solum huius partem primam, quae tam ante inventa fuit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi,$$

sed quoque antecedentis $r-1^{\text{ti}}$ posteriorem

$$=\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r-1)}\cos 2r\varphi,$$

esse in $\cos 2r\varphi$ ductam, ex ceteris terminis vero multipla aut minora aut maiora proficisci. Iunctis igitur terminis hisce habebitur novae seriei pro $\cos\varphi^{2m}$ terminus generalis r^{tus}, qui, quum sit

$${}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}+{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r-1)}={}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}$$

induet formam

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cdot\cos 2r\varphi.$$

Haec expressio legi infra pro potestatibus paribus adsumtae prorsus consentanea est, ex quo sequitur, valituram illam pro potestati pari, simulac impari proxime minori demonstrata fuerit.

4. Denuo igitur derivata modo pro $\cos\varphi^{2m}$ series:

$$\cos\varphi^{2m}=\frac{1}{2^{2m-1}}\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2}+\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 2\varphi+\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+2)}\cos 4\varphi\cdots$$
$$+\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi+\cdots$$

in $\cos\varphi$ ducatur, ut habeatur ex una parte $\cos\varphi^{2m+1}$ ex altera, excepto initiali in quolibet termino binorum cosinuum productum, ut antea in binas partes dirimendum. Dabit sic terminus primus

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 2\varphi\cos\varphi$$

partes

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)}\tfrac{1}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)}\tfrac{1}{2}\cos 3\varphi.$$

Pars eius prima, cum unica, quam terminus initialis praebet

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2}\cos\varphi$$

in summam collecta, dabit novae seriei initialem

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos\varphi.$$

Terminus generalis r^{tus}

$$=\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\,\varphi\cos\varphi,$$

in partes diremtus, dabit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cdot\tfrac{1}{2}\cos(2r-1)\varphi+\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cdot\tfrac{1}{2}\cos(2r+1)\,\varphi.$$

Igitur sola multipla imparia hic occurrunt, quorum bina contigua ex quolibet datae seriei termino generantur. Si igitur velim novae seriei terminum $(r-1)^{\text{tum}}$, quem in $\cos(2r-1)\varphi$ ductum fore adparet, ex evolutae seriei termino $r-1^{\text{to}}$ partem posteriorem

$$=\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r-1)}\cos(2r-1)\varphi,$$

ex r^{to} autem partem priorem

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r-1)\,\varphi$$

iungendo, obtinerem:

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r-1)\varphi.$$

Sic evadet ipsius $\cos\varphi^{2m+1}$ terminus generalis $r-1^{\text{tus}}$ qualis hic propositus est, aut, si malis, pro r substituendo $r+1$, terminus r^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+1+r)}\cos(2r+1)\varphi$$

Atque iam adparet hanc legem, ipsius $\cos\varphi^{2m+1}$ terminum r^{tum} sistentem, cum adsumta illa pro $\cos\varphi^{2m-1}$ termino r^{to}

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+1)\varphi,$$

ita congruere, ut, simulac in hac, loco m substituatur $m+1$, illa sponte prodeat.

Esse igitur legem tam pro paribus quam pro imparibus ipsius $\cos\varphi$ potestatibus generalem, hoc progressu indefinito demonstratione munito, per se patet.

5. Quamvis ad disquisitionem propositam haud pertineat, liceat hoc loco monere, ex lege, pro cosinuum potestatibus per dati anguli multiplos exhibitis similem pro sinuum potestatibus statim exsurgere, idque sola observatione esse $\cos(90^\circ-\varphi) = \sin\varphi$.

Quum sit igitur $\cos\varphi^{2m-1}$ series cuius terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi,$$

erit, substituendo $90^\circ-\varphi$ in locum ipsius φ, $\sin\varphi^{2m-1}$

terminus initialis $\qquad \dfrac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\sin\varphi$

et generatim, eadem substitutione $\sin\varphi^{2m-1}$

terminus r^{tus} $\quad = \dfrac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+1)(90^\circ-\varphi)$.

Est autem

$$\cos(2r+1)(90^\circ-\varphi) = \cos((2r+1)90^\circ-(2r+1)\varphi)$$
$$= \cos(2r+1)90^\circ\cos(2r+1)\varphi+\sin(2r+1)90^\circ\sin(2r+1)\varphi.$$

Iam vero, cum sit

$$\sin(2r+1)90^\circ = (-1)^r, \quad \cos(2r+1)90^\circ = 0$$

fiet haec quantitas

$$= (-1)^r\sin(2r+1)\varphi,$$

et terminus ipsius $\sin\varphi^{2m-1}$ generalis r^{tus}

$$= \frac{(-1)^r}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\sin(2r+1)\varphi.$$

Si vero in serie $\cos\varphi^{2m}$ exhibente in locum ipsius φ substituas $90^0-\varphi$, terminus initialis non afficitur, generalis r^{tus} qui est

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi$$

mutatur ita, ut

$$\begin{aligned}\cos 2r(90^0-\varphi) &= \cos(2r\,90^0-2r\,\varphi)\\ &= \cos 2r\cdot 90^0\cdot\cos 2r\varphi+\sin 2r\cdot 90^0\cdot\sin 2r\varphi\end{aligned}$$

contineat. Est autem

$$\sin 2r\cdot 90^0 = 0,\qquad \cos 2r\cdot 90^0 = (-1)^r,$$

qua re mutatur ista expressio in $(-1)^r\cos 2r\varphi$, fitque ipsius $\sin\varphi^{2m}$ terminus r^{tus}

$$\frac{(-1)^r}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi.$$

6. Nunc sine mora ad finem propositum accedere licet. Nimirum evolvatur per theorema binomiale $(1+n\cos\varphi)^v$ in seriem per potestates ipsius $\cos\varphi$ progredientem, solvatur deinde quodlibet huius seriei membrum in novam seriem secundum cosinus multiplorum anguli dati procedentem, seligantur ex his seriebus termini in eiusdem anguli cosinum ducti, hique in unum terminum cogantur. Cognita terminorum sic provenientium lege totum negotium tantum non perfectum erit. In serie fundamentali

$$\begin{aligned}(1+n\cos\varphi)^v = 1+{}^v\mathfrak{B}^{(1)}n\cos\varphi+{}^v\mathfrak{B}^{(2)}n^2\cos\varphi^2+{}^v\mathfrak{B}^{(3)}n^3\cos\varphi^3\cdots\\ +{}^v\mathfrak{B}^{(q)}n^q\cos\varphi^q\cdots\end{aligned}$$

omnes ipsius $\cos\varphi$ potestates ex ordine occurrunt, pares et impares. Ex paribus, si evolvantur nonnisi cosinus multiplorum parium, ex imparibus nonnisi imparium prodeunt, quare ad hos, si de cosinu multipli imparis ad illos si de cosinu multipli paris agitur, recurrendum est.

A) Habebitur seriei quaesitae terminus initialis, si ex omnibus propositae terminis, illorum, qui evoluti a $\cos 0\varphi = 1$ ordiuntur, initialia membra ordine suo servato uniantur. Sunt vero solae potestates ipsius $\cos\varphi$ pares, quae evolutae eiusmodi membrum initiale praebeant. Quaelibet harum partem huc pertinentem praebet; h^{ta} igitur pars, ex seriei fundamentalis termino $2h^{to}$, qui est ${}^v\mathfrak{B}^{(2h)}n^{2h}\cos\varphi^{2h}$ proficiscitur. Est autem $\cos\varphi^{2h}$ terminus initialis, qui solus huc pertinet

$$=\frac{1}{2^{2h-1}}\frac{{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}}{2}=\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)};$$

adeoque adiecto ipsius $\cos\varphi^{2h}$ coefficiente pars h^{ta} seriei in $\cos 0\varphi=1$ ductae

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\cdot{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}n^{2h}.$$

Sic inventus est terminus generalis h^{tus} seriei, quae terminum initialem eius constituit, quam $(1+n\cos\varphi)^\nu$ secundum cosinus angulorum multiplorum evolvendo adipiscimur. Esse terminum eius initialem $=1$ per se patet. Quod si ponamus esse

$$(1+n\cos\varphi)^\nu = A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \cdots$$

erit

$$A = 1+\frac{1}{2^2}\,{}^{2}\mathfrak{B}^{(1)}\cdot{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2)}n^2+\frac{1}{2^4}\,{}^{4}\mathfrak{B}^{(2)}\cdot{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(4)}n^4\cdots+\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\cdot{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}n^{2h}+$$

sive

$$A = 1+\frac{1}{2}\,\frac{\nu\cdot\nu-1}{1\cdot 2}n^2+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu\cdot\nu-1\cdot\nu-2\cdot\nu-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}n^4+\text{etc.}$$

B) Quaeramus iam generatim legem coefficientis quam cosinus multipli alicuius imparis v. g. $\cos(2q-1)\varphi$ nanciscitur. Inter terminos seriei $(1+n\cos\varphi)^\nu$ secundum potestates ipsius $\cos\varphi$ procedentis primus ille, qui $\cos\varphi^{2q-1}$ continet, secundum cosinus multiplorum evolutus, in termino suo $q-1^{to}$ multiplum requisitum continet. Est nimirum ex lege antea $(2,\beta)$ exposita, ipsius $\cos\varphi^{2q-1}$ terminus $q-1^{tus}$

$$=\frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{2q-1}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\cos(2q-1)\varphi,$$

sive, quum sit

$${}^{2q-1}\mathfrak{B}^{(2q-1)}=1,\quad \frac{1}{2^{2q-2}}\cos(2q-1)\varphi.$$

Erat autem in serie fundamentali terminus $\cos\varphi^{2q-1}$ continens, ductus in ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)}n^{2q-1}$. Quo factore adiecto habebitur pars prima coefficientis qui ad $\cos(2q-1)\varphi$ pertinet, sive terminus initialis seriei, qua coefficiens ille exhibetur

$$=\frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)}n^{2q-1}.$$

Iam vero quaelibet ipsius $\cos\varphi$ potestas impar, cuius exponens $2q-1$ excedit, si per cosinus multiplorum exprimatur, praebebit terminum in $\cos(2q-1)$ ductum; estque horum h^{tus} qui ex h^{ta} post $\cos\varphi^{2q-1}$ potestate impari, cuius igitur exponens est $2q+2h-1$, originem trahit. Sumitur autem ex quantitate

$${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)}n^{2q+2h-1}\cos\varphi^{2q+2h-1}$$

secundum cosinus multiplorum evoluto terminus $q-1^{tus}$; fit autem ille (cum sit ex lege cognita, ipsius $\cos\varphi^{2q+2h-1}$

terminus $q-1^{\text{tus}}$ $= \dfrac{1}{2^{2q+2\lambda-2}}\,{}^{2q+2\lambda-1}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda-1)}\cos(2q-1))$

$$= \frac{1}{2^{2q+2\lambda-2}}\,{}^{2q+2\lambda-1}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda-1)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda-1)}\,n^{2q+2\lambda-1}\cos(2q-1)\,\varphi.$$

Huius igitur quantitatis coefficiens est h^{tus} illorum, quos ex successiva partium seriei fundamentalis evolutione adsumta $\cos(2q-1)\varphi$ sortitur. Quare si, uti fas est, in nova seriei condenda istarum partium summam pro uno habeamus coefficiente, fiet ipsius $\cos(2q-1)\varphi$ coefficiens seriei aequalis, cuius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\,n^{2q-1}$$

et generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2\lambda-2}}\,{}^{2q+2\lambda-1}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda-1)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda-1)}\,n^{2q+2\lambda-1}.$$

C) Eadem ratione lex coefficientis in cosinum multipli alicuius paris cadentis v. g. in $\cos 2q\varphi$, eruitur. In solis enim potestatibus ipsius $\cos\varphi$ paribus, inde ab illa cuius exponens est $2q$, eiusmodi multipli cosinus occurrit. Quare seriei, qua coefficiens ipsius $\cos 2q\varphi$ exprimitur terminus initialis ex eo seriei fundamentalis membro, quo $\cos\varphi^{2q}$ continetur, i. e. ex ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}\,n^{2q}\cos\varphi^{2q}$, et quidem ex huius termino q^{to} sumetur, fietque (cum sit $\cos\varphi^{2q}$ term. q^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q-1}}\,{}^{2q}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\cos 2q\varphi = \frac{1}{2^{2q-1}}\cos 2q\varphi) \quad = \frac{1}{2^{2q-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}\,n^{2q}.$$

Generatim ex h^{to} post hoc primum, seriei fundamentalis membro pari, adeoque ex quantitate ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda)}\,n^{2q+2\lambda}\cos\varphi^{2q+2\lambda}$ proveniet coefficientis, ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis, pars h^{ta}. Est autem ipsius $\cos\varphi^{2q+2\lambda}$, si evolvatur, terminus q^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2\lambda-1}}\,{}^{2q+2\lambda}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda)}\cos 2q\,\varphi.$$

Sic igitur provenit coefficientis, ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis terminus post primum h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2\lambda-1}}\,{}^{2q+2\lambda}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda)}\,n^{2q+2\lambda}.$$

D) Perfectum revera est negotium propositum. Non solum enim seriei ex $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$, dum pro quavis potestate series cosinuum multiplorum substituitur, rite ordinatae terminus initialis,

(cf. A) verum etiam pro utroque genere terminorum, qui in illa occurre possunt, quorum alteri continent cosinum multipli alicuius imparis, $\cos(2q-1)\varphi$ (cf. B), alteri cosinum multipli alicuius paris $\cos 2q\varphi$, (conf. C) debiti coefficientis terminus initialis et generalis rite exhibitus est. Sed haec delineatio legis inventae contrahitur observatione prorsus eandem esse legem quae in coefficientibus cosinuum parium, et quae in imparium valet. Quod sic perspicitur. Erat coefficientis ad $\cos(2q-1)\varphi$ pertinentis terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{r}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\,n^{2q-1},$$

terminus generali h^{tus}

$$\frac{1}{2^{2q+2\lambda-2}}\,{}^{2q+2\lambda-1}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda-1)}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda-1)}\,n^{2q+2\lambda-1}.$$

Sit in hac expressione $(2q-1)=r$, habebimus hac substitutione ipsius $\cos r\varphi$ (existente r impari), coefficientem ita constitutum, ut sit eius terminus initialis

$$=\frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{r}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r}$$

terminus h^{tus}

$$=\frac{1}{2^{r+2\lambda-1}}\,{}^{r+2\lambda}\mathfrak{B}^{(r+\lambda)}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{(r+2\lambda)}\,n^{r+2\lambda}.$$

Erat porro coefficientis ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis terminus

initialis $\quad\frac{1}{2^{2q-1}}\,{}^{r}\mathfrak{B}^{(2q)}\,n^{2q}$; $\quad h^{\text{tus}}=\frac{1}{2^{2q+2\lambda-1}}\,{}^{2q+2\lambda}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda)}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda)}\,n^{2q+2\lambda}$.

Sit eadem ratione $2q=r$, veniet hac substitutione pro coefficiente ipsius $\cos r\varphi$ (existente r pari, expressio ita comparata, ut sit eius terminus initialis

$$=\frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{r}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r},$$

generalis h^{tus}

$$=\frac{1}{2^{r+2\lambda-1}}\,{}^{r+2\lambda}\mathfrak{B}^{(r+\lambda)}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{(r+2\lambda)}\,n^{r+2\lambda}.$$

Identitas expressionum quas sive par sit sive impar assumtus r, pro coefficiente ipsius $\cos r\varphi$ adipiscimur, identitatem legis arguit, quam igitur, pro omnibus ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ terminis unam eandemque, concinnius finitima hac formula designabimus.

Est igitur quantitas nostra $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ seriei aequalis, quae sic procedit, ut sit

$$A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi \cdots\cdot + A^{(r)}\cos r\varphi \cdots\cdot \text{ etc.}$$

ea coefficientium lege, ut initialis A, aequetur seriei, cuius terminus initialis $= 1$, generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,n^{2h},$$

cuius coefficiens indefinitus r^{tus} $A^{(r)}$ contineatur seriei cuius, terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r};$$

coefficiens termini in eadem serie h^{ti}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\cdot{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)}\,n^{r+2h}\ {}^{*)}.$$

Sic per coefficientes binomiales brevissime exprimi posse videtur lex complicatissima. Licet enim, evolutis, ut fieri potest in producta his coefficientibus, factores alterius nonnulli, tollantur ab alterius factoribus, tamen expressio finitima longe prolixior fit, ac prior fuerat. Sic enim, ut facto rei veritas comprobetur, brevissime exhibetur illa ratione coefficientis indefiniti r^{ti} terminus generalis h^{tus}

$$\frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-(r+2h-1))}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots\qquad h^2}\cdot\frac{1}{h+1\cdot h+2\cdots r+h}\,\frac{1}{2^{r+2h-1}}\,n^{r+2h}\ {}^{**)}$$

Adnotatio. Eiusmodi formulam sortietur, qui ex seriebus pro coefficientibus aliquot initialibus ab Eulero***) propositis, legem generalem abstrahere velit. Licet via, quam ad scrutandam legem istam, indicat Auctor Illustris, ad obtinendas series iamiam

---

*) [Diese Formel bildet die zweite Art der Darstellung der Reihe für

$$(aa+bb-2ab\cos\varphi)^{-n}$$

in der Abhandlung von Gauss „Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdots\cdot$$

act. 6. Gauss' Werke B. III S. 129 . . Sch.].

**) [Die Handschrift hat den Nenner $1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots r^2$ statt $1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots h^2$. Sch.]

***) Euler. l. c. Probl. 36.

expositas minus directa ac facilis videatur; alio tamen respectu praeclara, et minime negligenda videtur. Omne artificium in eo consistit, ut ficta pro quantitate $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ serie

$$A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi+\cdots$$

per differentiationem eruatur scala recursionis, qua istius coefficientes a se invicem pendent. Quae, cum tantummodo tripartita sit, per binos quosvis antecedentes coefficientem quemvis exhibet, ut igitur, modo priores bini finiti fuerint, ceteri omnes forma finita exhiberi queant. Quae mutua coefficientium relatio, licet ex seriebus iamiam inventis erui possit, facilius tamen artificio EULERIANO evincitur.

7. Sit, ut antea

$$(1+n\cos\varphi)^{\nu}=A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi\cdots\cdot+A^{(h)}\cos h\varphi+\cdots$$

Sumtis ab utraque parte logarithmorum differentialibus, habebitur, remoto divisione ipso $d\varphi$

$$\frac{\nu n\sin\varphi}{1+n\cos\varphi}=\frac{A^{(1)}\sin\varphi+2A^{(2)}\sin 2\varphi+3A^{(3)}\sin 3\varphi\cdots+hA^{(h)}\cos h\varphi}{A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi\cdots+A^{(h)}\cos h\varphi+\text{etc.}\cdots}$$

α) Sublatis multiplicando utrimque divisoribus habetur ex una parte

$$\nu n\sin\varphi\big(A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi\cdots\cdot+A^{h}\cos h\varphi+A^{(h+1)}\cos(h+1)\varphi$$
$$+A^{(h+2)}\cos(h+2)\varphi+\cdot\cdot\big)$$

Quae series, ducta in factorem praefixum, ex formula nota, esse

$$\sin\varphi\cos\lambda\varphi=\tfrac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi-\tfrac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

solvetur in terminos, secundum sinus multiplorum procedentem. Quodlibet membrum, praeter initiale et primum in bina sic dirimitur quorum alterum, multiplum proxime minus, alterum vero multiplum proxime maius, quam illud, cuius cosinum continet, quod dirimitur, sortietur. Sic v. g. membrum

$$\nu n\cdot\sin\varphi A^{(2)}\cos 2\varphi$$

praebet

$$-\nu\frac{nA^{(2)}}{2}\sin\varphi+\nu\frac{nA^{(2)}}{2}\sin 3\varphi;$$

quorum primum, adiectum illi quod ex initiali gignitur $nA\sin\varphi$, praebet seriei evolutae terminum initialem

$$=\left(\nu nA-\nu\frac{nA^{(2)}}{2}\right)\sin\varphi.$$

Generatim si quaeram, coefficientem, quem in seriei evoluta nanciscitur $\sin(h+1)\varphi$; soli sunt in data termini $\nu n A^{(h)} \sin\varphi \cos h\varphi$ (eiusque evoluti

pars prior $+\nu\dfrac{nA^{(h)}}{2}\sin(h+1)\varphi$) ac $\nu n\cdot A^{(h+2)}\sin\varphi\cos(h+2)\varphi$

(huius vero evoluti pars posterior

$$-\nu\frac{nA^{(h+2)}}{2}\sin(h+1)\varphi),$$

ex quibus membra, requisitum continentia ipsius φ multiplum, oriri queant, estque adeo in hac serie ipsius $\sin(h+1)\varphi$ coefficiens completus

$$=\nu\frac{n\cdot A^{(h)}}{2}-\nu\frac{nA^{(h+2)}}{2}.$$

β) Ex altera vero parte habebitur

$$(1+n\cos\varphi)(A^{(1)}\sin\varphi+2A^{(2)}\sin 2\varphi\cdots+hA^{(h)}\sin h\varphi\cdots\cdots)$$

ex qua forma, si explicetur duplex series originem trahit. Altera est

$$A^{(1)}\sin\varphi+2A^{(2)}\sin 2\varphi\cdots\cdots+(h+1)A^{(h+1)}\sin(h+1)\varphi\cdots\cdot$$

nullo negotio prodiens.

Altera vero,

$$n\cos\varphi\big(A^{(1)}\sin\varphi+2A^{(2)}\sin 2\varphi\cdots$$
$$+hA^{(h)}\sin h\varphi+(h+1)A^{(h+1)}\sin(h+1)\varphi+\cdots\big)$$

ut cum priori in unam summam conflari posset, cum in singulis terminis productum ex $\cos\varphi$ in sinum multipli alicuius ipsius φ contineat, ex nota formula

$$\cos\varphi\sin\lambda\varphi=\tfrac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

mutationem subeat necesse est. Sic in ista membrum, quo $\sin\varphi$ contineatur, ex termino

$$n\cos\varphi\cdot 2A^{(2)}\sin 2\varphi$$

procedens, fit $n\cdot A^{(2)}\sin\varphi$. Si generatim ex illa quaesiveris membra, quibus $\sin(h+1)\varphi$ contineatur, sumendus terminus

$$hA^{(h)}\sin h\varphi\cdot n\cos\varphi$$

(eiusque pars prior

$$\frac{nhA^{(h)}}{2}\sin(h+1)\varphi)$$

cum termino

$$(h+2)A^{(h+2)}\sin(h+2)\varphi\cdot n\cos\varphi$$

(ex hoc autem evoluto pars posterior

$$\frac{n(h+2)A^{(h+2)}}{2}\sin(h+1)\varphi);$$

quo facto evadit ipsius $\sin(h+1)\varphi$ in serie quaesita coefficiens

$$\frac{nhA^{(h)}}{2}+\frac{n(h+2)A^{h+2}}{2}$$

γ) Iam vero, cum series ab una parte (α) aequalis sit seriebus ab altera positis (β), coefficientes homologi, i. e. hoc loco in eiusdem anguli sinum ducti aequales sint oportet. Sic est ex una parte ipsius $\sin\varphi$ coefficiens

$$=nA-\frac{nA^{(2)}}{2}$$

ex altera autem $A^{(1)}+nA^{(2)}$. Quibus aequatis habebitur:

$$\nu nA-\nu\frac{nA^{(2)}}{2}=A^{(1)}+nA^{(2)},\quad\text{unde}\quad A^{(2)}=\frac{2(\nu nA-A^{(1)})}{(\nu+2)n}.$$

Generalibus via etiam hic iam strata est. Si enim ab utraque parte, quae in $\sin(h+1)\varphi$ ducta reperiuntur, aequalia, uti fas est, ponantur, eveniet:

$$\frac{\nu nA^{(h)}}{2}-\frac{\nu n}{2}A^{(h+2)}=(h+1)A^{(h+1)}+\frac{nhA^{(h)}}{2}+\frac{n(h+2)A^{(h+2)}}{2}.$$

Soluta aequatione habebitur

$$A^{(h+2)}=\frac{n(\nu-h)A^{(h)}-2(h+1)A^{(h+1)}}{n(\nu+h+2)}$$

qua formula generali, excepto, quod veniret pro $h=0$, $A^{(2)}$, antea iam singulari disquisitione inventa, continetur lex cuiuslibet coefficientis in serie nostra fictitia, quatenus nimirum ille per binos antecedentes facili eruitur calculo. Sic, ut exemplum adsit

$$A^{(2)}=\frac{2(\nu nA-A^{(1)})}{(\nu+2)n};\quad A^{(3)}=\frac{n(\nu-1)A^{(1)}-4A^{(2)}}{n(\nu+3)};$$

$$A^{(4)}=\frac{n(\nu-2)A^{(2)}-6A^{(3)}}{n(\nu+4)}\quad\text{etc.}$$

δ) Fieri autem potest, existente ν numero aliquo negativo,

ut coefficiens aliquis, evanescente denominatore, non definiatur, tunc ad series infinitas, ante exhibitas recurrendum est. Idem hoc fieri oportet in coefficientibus binis prioribus A et $A^{(1)}$, quos ut cognitos scala recursionis iamiam supponit. Potest vero singulari artificio $A^{(1)}$ per A exhiberi. Erat enim

$$A \;= 1 + \cdots\cdots \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h}$$

$$A^{(1)} = {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(1)} n + \cdots \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)} \cdot {}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)}\, n^{2h+1}$$

Est, si sumamus $2nA + A^{(1)}$ huius seriei terminus initialis

$$= ({}^{\nu}\mathfrak{B}^{(1)} + 2)\,n = (\nu + 2)\,n;$$

generalis h^{tus}

$$2n \cdot \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h} + \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)} \cdot {}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)}\, n^{2h+1},$$

qui, cum sit

$${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)} = {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot \frac{\nu - 2h}{2h+1}, \quad \text{et} \quad {}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)} = {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \cdot \frac{2h+1}{h+1},$$

sic contrahitur

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \left(2 + \frac{\nu - 2h}{2h+1} \cdot \frac{2h+1}{h+1}\right) n^{2h+1}$$

sive brevius

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, \frac{(\nu+2)}{h+1}\, n^{2h+1}.$$

Sumatur porro, posita n variabili, $\int A n\, dn$, cuius terminus initialis $= \frac{1}{2} nn$; terminus generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, \frac{1}{2h+2}\, n^{2h+2}.$$

Quae nova series si per

$$\frac{2(\nu+2)}{n}$$

multiplicetur, dabit initialem $= (\nu+2)\,n$, generalem h^{tum}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, \frac{(\nu+2)}{h+1}\, n^{2h+1}.$$

Consentientibus igitur ab utraque parte terminis, fit

$$2n\cdot A + A^{(1)} = \frac{2\cdot(\nu+2)}{n}\int A n\, dn,$$

sumto sine addita constante integrali. Fluit inde, esse

$$A^{(1)} = \frac{2\cdot(\nu+2)}{n}\int A n\, dn - 2n\cdot A.$$

Hac igitur formula $A^{(1)}$ ad inventam A reducitur, atque haec sola restat ex genesi seriei ipsius, ut antea factum est, derivanda.

8. Confectis quae in problemate generalissime proposito sperari poterant, superest, ut ad casus speciales animum advertamus, in illis enim contrahere formulas universales nonnunquam licet. Cuius rei exemplum praebet casus, quo est ν numerus integer positivus. Tunc enim quaelibet serierum, antea ad coefficientes ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ exprimendos inventarum, quum coefficientes binomiales ad exponentem ν pertinentes, suo ordine quilibet, contineant abrumpatur necesse est, et finita evadit pro quavis expressio. Simili ratione eo casu, quo ν est numerus integer negativus ad expressiones finitas singulorum coefficientium pervenire licet. Quum ad hunc casum formulae usus plurimum revocetur, e re erit in illo enucleando paulum morari. Artificium, quo in hac disquisitione opus est, duabus absolvitur partibus; prima, ut pro coefficientibus, existente $\nu = -1$, eruantur expressiones finitae; altera, ut via monstretur, qua, concessis ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ coefficientibus, potestatis uno gradu inferioris $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ coefficientes derivari queant. Sic enim ab ipsa $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ transire licebit ad potestates negativas altiores, vitatis seriebus pro singulo coefficiente infinitis.

α) Ad scrutandam, cui subiecta est, posito $\nu = -1$, coefficiens initialis A, legem, in expressione indefinita termini eiusdem h^{ti} ponamus $\nu = -1$, provenietque, ob

$${}^{-1}\mathfrak{B}^{(2h)} = 1, \text{ ille } = \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h}.$$

Est autem

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} = \frac{1}{2^{2h}}\,\frac{2h\cdot(2h-1)\cdot\cdots\cdot h+1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot h}$$

$$= \frac{1}{2^{2h}}\cdot\frac{2h\cdot(2h-1)\cdot\cdots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot h}\cdot\frac{1}{h\cdot(h-1)\cdots 1}$$

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,\frac{(2h-1)(2h-3)\cdot\cdots\cdot 1}{1\cdot 2\cdots h}\cdot\frac{2h\cdot(2h-2)\cdots 2}{h\cdot(h-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

$$= \frac{1}{2^{h}}\cdot\frac{(2h-1)(2h-3)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot h},$$

fitque his transformationibus terminus ille h^{tus}

$$= \frac{1}{2^h}\frac{(2h-1)\cdot(2h-3)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots\cdot h}\cdot n^{2h}.$$

Quare, cum haec expressio sit manifesto quantitatis $(1-nn)^{-\frac{1}{2}}$, in seriem evolutae terminus h^{tus}, sequitur, fore ipsam A, casu quo

$$v = -1, \quad = (1-nn)^{-\frac{1}{2}}$$

β) Coefficiens post initialem primus $A^{(1)}$ definitur relatione ante demonstrata (7 δ)

$$A^{(1} = \frac{2\cdot(v+2)}{n}\int An\,\mathrm{d}n - 2n\cdot A$$

quae hic, ob $v = -1$, mutatur in

$$A^{(1)} = \frac{2}{n}\int An\mathrm{d}n - 2nA = \frac{2}{n}\int(1-nn)^{-\frac{1}{2}}n\mathrm{d}n - 2n(1-nn)^{-\frac{1}{2}}.$$

Peracta integratione (sic instituenda, ut cum n, et integrale evanescat) habebitur

$$A^{(1)} = -\frac{2}{n}(1-nn)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{n} - 2n(1-nn)^{-\frac{1}{2}},$$

sive brevius

$$A^{(1)} = \frac{2}{n}\left(1-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

γ) His praecognitis facile coefficientium reliquorum expressiones finitae per scalam recursionis ante erutam deducuntur. Erat illa

$$A^{(h+2)} = \frac{n(v-h)A^{(h)} - 2(h+1)A^{(h+1)}}{n(v+h+2)}$$

adeoque h. l. ob $v = -1$,

$$A^{(h+2)} = \frac{-n(h+1)A^{(h)} - 2(h+1)A^{(h+1)}}{n(h+1)}$$

sive

$$A^{(h+2)} = -\left(A^{(h)} + \frac{2}{n}A^{(h+1)}\right)$$

Si per hanc scalam calculos instituas, occurret lex simplicissima*), fore

*) Falsa est, vitio forsan typothetae, legis huius apud EULERUM l. c. § 275 expressio.

[Auch in dieser Handschrift findet sich ein Fehler, es ist nemlich in

$$A^{(\lambda)} = (-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^\lambda$$

Ut illa demonstratione firmetur, sumamus valere ipsam pro coefficientibus usque ad h^{tum}, eritque per scalam recursionis

$$A^{(\lambda+1)} = (-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda-1} + (-1)^{\lambda+1}\frac{2}{n}\frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^\lambda$$

sive, separato factore communi

$$(-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda-1}\left\{1-\frac{2}{n}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)\right\}$$

Est factor, uncinis inclusus

$$= \frac{nn-2+2\sqrt{(1-nn)}}{nn} = -\frac{(1-nn)-2\sqrt{(1-nn)}+1}{nn} = -\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2$$

quo adiecto habebitur

$$A^{(\lambda+1)} = (-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda-1} \cdot -\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2 = (-1)^{\lambda+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda+1}$$

unde legis universalitas perspicitur.

---

dieser Formel für $A^{(\lambda)}$ und in den beiden folgenden für $A^{(\lambda+1)}$ der hier im Drucke hinzugefügte Factor $\frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}$ ausgelassen, dieser wird aber durch die besondere Gleichung

$$A^{(2)} = -2\left(A+\frac{1}{n}A^{(1)}\right)$$

gefordert. Die hier gefundene Entwickelung bildet den besonderen Fall der Reihe für $(aa+bb-2ab\cos\varphi)^{-1}$,

nach der **ersten** Art der von GAUSS in seiner 1812 veröffentlichten Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdot\cdot$$

gegebenen Darstellung. GAUSS' Werke III Seite 128. SCH.]

Pars prima negotii propositi confecta est, circumscriptis formula finita ipsius $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ coefficientibus. Restat altera, ut videamus qua ratione a potestatis alicuius coefficientibus datis transire liceat ad quaesitos potestatis proxime inferioris.

δ) Facillime hoc negotium ita perficitur, ut in expressionibus quibus tum coefficiens seriei indefinitae pro $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ initialis, tum generalis exhibentur, in locum ipsius ν, substituatur $\nu-1$, et tunc eliciatur resultantium cum anterioribus relatio.

I. Erat (6) ipsius coefficientis initialis A, in seriem evoluti, terminus initialis 1, qui igitur substitutione non adficitur. Erat generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\cdot{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,n^{2h}$$

qui, substituendo $\nu-1$ loco ν, mutatur in:

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(2h)}\cdot{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,n^{2h}.$$

Manifesto igitur nascetur ex priori posterior, si in

$$\frac{\nu-2h}{\nu} = \left(1-\frac{2h}{\nu}\right)$$

ducatur ille; adeoque, cum idem sit, terminum generalem ipsius A, h^{tum} in $\dfrac{2h}{\nu}$ ducere, ac eundem, secundum n differentiatum, per $\nu\,dn$ dividere, et per n multiplicare, habebimus, si vocetur B ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ terminus initialis, generatim

$$B = A-\frac{n\,dA}{\nu\,dn}.$$

II. Erat coefficientis indefiniti ad $(1+n\cos)^{\nu}$ pertinentis $A^{(r)}$ terminus initialis

$$\frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r},$$

fit itaque, si vocetur $B^{(r)}$ qui, ad $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ pertinens, elicitur substiendo in istum $\nu-1$ loco ν, huius terminus initialis

$$\frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r}.$$

Hic vero, cum obtineatur, illum per $\dfrac{\nu-r}{\nu}$ multiplicando, sive, quod idem est, per $\left(1-\dfrac{r}{\nu}\right)$, et multiplicatio per $\dfrac{r}{\nu}$ ita confici possit, ut

ille, secundum n differentiatus, denuo in n ducatur, et per $\nu\,dn$ dividatur, relationem sequentem praebet: esse $B^{(r)}$ term. init.

$$= A^{(r)}\,\text{term. init.} - \frac{n\,{}^{*}dA^{(r)}\,\text{term. init.}}{\nu\,dn}.$$

Prorsus eadem est relatio, quae in terminis generalibus obtinet. Est nimirum ipsius $A^{(r)}$ terminus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{P}^{(r+h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{P}^{(r+2h)}\,n^{r+2h}.$$

Fit igitur, mutato ν in $\nu-1$, ipsius $B^{(r)}$ terminus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{P}^{(r+h)}\,.\,{}^{\nu-1}\mathfrak{P}^{(r+2h)}\,n^{r+2h},$$

qui solo factore

$$\frac{\nu-(r+2h)}{\nu} = \left(1-\frac{r+2h}{\nu}\right)$$

ad priorem expressionem adiecto, ex ista sponte procedit. Quum autem idem sit, ipsius $A^{(r)}$ terminum h^{tum} per $\frac{r+2h}{\nu}$ multiplicare, ac eundem, secundum n differentiatum per $\nu\,dn$ dividere, et in n denuo ducere, habebimus

$$B^{(r)}\,\text{term.}\,h = A^{(r)}\,\text{term.}\,h - \frac{n\,dA^{(r)}\,\text{term.}\,h}{\nu\,dn};$$

quae relatio quum pro omnibus sine discrimine membris obtineat, praebet aequationem

$$B^{(r)} = A^{(r)} - \frac{n\,dA^{(r)}}{\nu\,dn}.$$

ε) Per hanc igitur scalam relationis $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$, ad $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ ita reducitur, ut ex istius coefficientibus, qui in hanc expressionem cadant, differentiatione facillime eliciantur. Licet adeo, cum ipsius $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ coefficientes, formulis finitis circumscripti, in potestate sint, ad exponentes negativos maiores sensim adscendere, eoque omnino potestates negativas easque integras coefficientibus finitis exhibere.

Non tamen series infinitae, pro coefficientibus hisce ante inventae, inutiles sunt. Est iis locus, simulac ν fuerit numerus fractus, quo casu, ex EULERI iudicio, in his speculationibus gravissimo, formulae finitae nulla ratione sperari possunt. Tunc igi-

tur necessarium est, ut sit n numerus fractus, isque verus, an minus series omnes, cum divergant, usu prorsus destituuntur.

9. Hucusque, in sola evolutione seriei $(1+n\cos\varphi)^\nu$ morati, integrationem formulae propositae $d\varphi(1+n\cos\varphi)^\nu$ negleximus. Illa autem, inventa serie ipsa, nullo absolvitur negotio. Si enim fuerit:

$$(1+n\cos\varphi)^\nu = A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi \cdots + A^{(r)}\cos r\varphi \cdots$$

fiet

$$\int d\varphi(1+n\cos\varphi)^\nu = A\varphi + A^{(1)}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}A^{(2)}\sin 2\varphi \cdots + \tfrac{1}{r}A^{(r)}\sin r\varphi$$

cuius seriei coefficientes ex praecedentibus noti sunt.

10. Subiunxit in fine Cap. VI Eulerus integrationem formulae $d\varphi\log(1+n\cos\varphi)$, quam, ut priorem ita perficit, ut peculiari artificio $\log(1+n\cos\varphi)$ in seriem secundum cosinus angulorum multiplorum evolvat, antequam integrationem ipsam adgrediatur. Revera autem haec series, ut casus specialis, iam in illa continetur, quam pro $(1+n\cos\varphi)^\nu$ invenimus. Opus est in hoc negotio nota propositione: esse

$$\log(1+x) = \frac{(1+x)^0-1}{0}$$

cui consentienter

$$\log(1+n\cos\varphi) = \frac{(1+n\cos\varphi)^0-1}{0}.$$

In expressione igitur generali pro $(1+n\cos\varphi)^\nu$ coefficiens initialis unitate mulctetur, dein in illo et ceteris omnibus ponatur $\nu = 0$, et dividatur quivis per ipsam 0.

α) Est ipsius A, coefficientis initialis ad seriem $(1+n\cos\varphi)^\nu$ pertinentis, et termino suo initiali qui est $=1$, iamiam mulctati, generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{h} \cdot {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} n^{2h}.$$

Quodsi in illo ponatur $\nu = 0$, fiet

$$\frac{1}{2^{2h}} \cdot \frac{0\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots-(2h-1)}{1\cdot 2\cdots 2h} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} n^{2h}$$

quo, per 0 diviso restat

$$\frac{1}{2^{2h}}(-1)^{2h-1}\frac{1\cdot 2\cdots 2h-1}{1\cdot 2\cdots\ 2h}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} n^{2h} = (-1)^{2h-1}\frac{1}{2^{2h}}\cdot\frac{1}{2h}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} n^{2h}$$

$$= \frac{1}{2^{2h}}(-1)^{2h-1}\cdot\frac{2h-1\cdot 2h-2\cdots h+1}{1\cdots h}\,n^{2h}$$

$$= \frac{1}{2^h}(-1)^{2h-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2h-1}{1\cdot 2\cdot\cdot 3\cdots\cdot h\cdot}\frac{n^{2h}}{2h},$$

sive cum $(-1)^{2h-1}$, quidquid fuerit h, sit negativum

$$= -\frac{1}{2^h}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2h-1}{1\cdots\cdot h}\frac{n^{2h}}{2h}.$$

Differentiata hac expressione secundum n, provenit, abiecto $\mathrm{d}n$,

$$\frac{-1}{2^h}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot 2h-1}{1\cdots\cdot h}n^{2h-1},$$

quae est manifesto quantitatis

$$\frac{-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}}{n}$$

terminus h^{tus}. Quasecum hic non adsit, qui in illa terminus initialis $\frac{-1}{n}$, illa mulctata formulae nostrae aequalis fiet, adeoque si ponatur ipsius $\log(1+n\cos\varphi)$ coefficiens initialis $= C$ habebitur

$$\frac{n\ {}^{n}\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} = -(1-nn)^{-\frac{1}{2}}+1.$$

Qua aequatione, sic expressa

$${}^{n}\mathrm{d}C = \frac{\mathrm{d}n}{n}\left(1-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

fit integrando

$$C = \log n - \log\frac{1-(1-nn)^{+\frac{1}{2}}}{n} + \text{const};$$

est vero cum evanescere debeat posito $n = 0$, expressio, const. $= \log\frac{1}{2}$. Quare

$$C = \log\left(\frac{nn}{(1-\sqrt{1-nn})\,2}\right),$$

aut, si malis,

$$C = -\log\left(\frac{2(1-\sqrt{1-nn})}{nn}\right).$$

β) Coefficiens qui initialem excipit, $C^{(1)}$ socemus, ex scala relationis, antea tradita invenire potest. Est nimirum

$$C^{(1)}\cdot n = -2\int nn\,\mathrm{d}C + nn,$$

quo substito, et ad calculos revocato, fit

$$C^{(1)}n = 2(1-(1-nn)^{\frac{1}{2}}),$$

adeoque

$$C^{(1)} = +2\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}.$$

γ) Ceteros coeffientes ex scala relationis ante evicta una formula generali circumscribere licet, quae sic enuntiari potest, fore, si ipsius $l(1+n\cos\varphi)$ in seriem evolutae coefficiens $h^{\text{tus}} = C^{(h)}$ hunc

$$= (-1)^{h+1}\frac{2}{h}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^h.$$

Sumamus, legem valere pro h primis, erit tunc ex scala generali, posito $\nu = 0$, (7, γ)

$$C^{(h+1)} = \frac{-n(h-1)C^{(h-1)}-2h\cdot C^{(h)}}{n(h+1)},$$

fit substituendo debitos valores

$$C^{(h+1)} = -\frac{n\cdot(h-1)(-1)^h\frac{2}{h-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^{h-1}+2h(-1)^{h+1}\frac{2}{h}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^h}{n\cdot(h+1)}$$

sive, separato factore communi

$$C^{(h+1)} = -\frac{(-1)^h 2\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^{h-1}}{n(h+1)}\left(n-\frac{2(1-\sqrt{1-nn})}{n}\right).$$

Est vero factor uncinis inclusus

$$= \frac{nn-2+2\sqrt{1-nn}}{n} = -\frac{(1-\sqrt{(1-nn)})^2}{n}.$$

Si igitur alter per illum revera multiplicetur, fit

$$C^{(h+1)} = (-1)^{h+2}\frac{2}{h+1}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{h+1},$$

unde perspicitur legis generalitas.

δ) Est igitur, si ponatur

$$\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right) = a,$$

$$\log(1+n\cos\varphi) = -\log\frac{2a}{n}+\tfrac{2}{1}a\cos\varphi-\tfrac{2}{2}a^2\cos 2\varphi+$$
$$+\tfrac{2}{3}a^3\cos 3\varphi+\cdots(-1)^{h+1}\tfrac{2}{h}a^h\cos h\varphi+\cdots$$

Adnotatio. Formula haec, ad functionum trigonometricarum logarithmos obtinendos summi usus est*).

Sit enim $n=1$, fiet $a=1$, et habebitur

$$\log(1+\cos\varphi) = -\log 2+\tfrac{2}{1}\cos\varphi-\tfrac{2}{2}\cos 2\varphi+\tfrac{2}{3}\cos 3\varphi-\tfrac{2}{4}\cos 4\varphi \text{ etc.}\cdots$$

quae series, cum sit $1+\cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$, dat quoque

$$\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi = -\log 2+\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\cos 3\varphi-\tfrac{1}{4}\cos 4\varphi\cdots$$

adeoque, substituendo 2φ in locum ipsius φ

$$\log\cos\varphi = -\log 2+\cos 2\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 4\varphi+\tfrac{1}{3}\cos 6\varphi-\tfrac{1}{4}\cos 8\varphi\cdots$$

Similiter, si ponatur $n=-1$, ut fiat $a=-1$, habebitur

$$\log(1-\cos\varphi) = -\log 2-\tfrac{2}{1}\cos\varphi-\tfrac{2}{2}\cos 2\varphi-\tfrac{2}{3}\cos 3\varphi-\tfrac{2}{4}\cos 4\varphi\cdots$$

adeoque cum sit $1-\cos\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi = -\log 2-\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi-\tfrac{1}{3}\cos 3\varphi-\tfrac{1}{4}\cos 4\varphi\cdots$$

aut, ut antea 2φ in locum ipsius φ substituendo

$$\log\sin\varphi = -\log 2-\cos 2\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 4\varphi-\tfrac{1}{3}\cos 6\varphi-\tfrac{1}{4}\cos 8\varphi\cdots$$

Sequitur ex his, cum sit $\log\operatorname{tang}\varphi = \log\sin\varphi - \log\cos\varphi$

$$\log\operatorname{tang}\varphi = -2(\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\cos 6\varphi+\tfrac{1}{5}\cos 10\varphi+\tfrac{1}{7}\cos 14\varphi\cdots)$$

et ex eodem fonte ceterarum functionum trigonometricarum logarithmi, licet per series non celeriter convergentes, habebuntur.

ε) Cum sit

$$\log(1+n\cos\varphi) = -\log\frac{2a}{m}+\tfrac{2}{1}a\cos\varphi-\tfrac{2}{2}a^2\cos 2\varphi+\tfrac{2}{3}a^3\cos 3\varphi+\cdots$$

integratio formulae $\log(1+n\cos\varphi)\cdot d\varphi$ in aperto est, fitque

$$\int d\varphi\log(1+n\cos\varphi) = -\left(\log\frac{2a}{m}\right)\varphi+\tfrac{2}{1}a\sin\varphi-\tfrac{2}{4}a^2\sin 2\varphi+\tfrac{2}{9}a^3\sin 3\varphi+$$

Confectum est igitur, quatenus per series fieri potuit, negotium propositum.

Cognata est disquisitio quam ILL. KLÜGEL (de functione potentiali $(1-2x\cos\varphi+xx)^{-m}$ in Commentat. Societatis huius Tom. XII)

*) [Die vorstehende Entwickelung setzt $|n|<1$ voraus. SCH.]

exhibuit. Forma, quam ille contemplatus est, abludit quidem ab illa, quae ducente EULERO in hac dissertatiuncula in censum vocata fuit, verum difficile non foret, alteram ex altera deducere. Ne igitur acta omnino egisse videar, moneam, omnem disquisitionem eum in finem a me institutam, ut serierum infinitarum tractationem per terminos generales nulla difficultate laborare, et facilius saepe, ac artificia singularia ad eruendas leges generales perducere, exemplo aliquo ostenderem. Non igitur in principali dissertatiunculae parte usus sum via, qua VV. Ill. EULERUS et KLÜGEL incessere; in ceteris omnia ad expressiones generales revocare, et demonstratione ubicunque munire conatus.

Carollarium.

11. Occurrere in Analysi altiori series, sive finitas, sive infinitas, quarum termini non unam eandemque legem primo obtutu sequi videntur, imprimis eiusmodi, in quibus termini indicis paris aliter ac imparis constructi sunt, notissimum est. Solent tunc singulari lege hi, singulari illi circumscribi. Praeter prolixitatem autem eiusmodi definitionum, inest illis aliquid contra naturam ac vim Analyseos. In eo enim ipso huius consistit dignitas, ut valores unius quantitatis, si eiusmodi fuerint, diversissimos sub una expressione generali comprehendat, et ex hac expressione cunctos derivare doceat. Sic, si in problemate aliquo geometrico solvendo plures una quantitate solutionem praestent, hae omnes in aequatione qua datarum cum quaesita relationem circumscribimus involutae reperiuntur. Simile quid ab expressionibus quibus serierum termini generales sistuntur postulari potest. Si fuerit igitur inter terminos pares et impares aliqua diversitas, ita comparata sit oportet, si perfecta fuerit, termini generalis formula, ut alios valores sumto pro termini indice numero indefinito pari, alios pro impari praebeat. Quod qua ratione praestari possit, iam in prooemio dissertatiunculae exposui. Est nimirum $(-1)^m$ existente m pari $= +1$, existente impari $= -1$; estque adeo

$\frac{1-(-1)^m}{2}$ existente m pari $= 0$, existente impari $= 1$

$\frac{1-(-1)^{m+1}}{2}$ — — $= 1$, — — $= 0$

et sic per eiusmodi factorem adiectum quaesitum semper praestari poterit.

Luculentum in quo adplicari potuisset hoc notandi genus exemplum dissertatio ipsa praebet. Si nimirum potestates aliqua

cosinus dati per cosinus multiplorum exhibenda sit, notum est aliam legem in serie pro potestatibus paribus, aliam pro imparibus servari. Videamus igitur qua ratione haec discrepantia sub formulam unam generalem cogi queat.

Lex pro potestatibus paribus v. g. $\cos\varphi^{2m}$, ut antea demonstratum est, ita se habet, ut seriei, secundum cosinus multiplorum parium procedentis, terminus initialis, sit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2};$$

terminus generalis h^{tus}

$$=\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos 2h\,\varphi.$$

Lex potestatum imparium, quarum termini solis multiplis imparibus adficiuntur, ita constituta est, ut sit seriei pro $\cos\varphi^{2m-1}$ terminus initialis

$$=\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi;$$

terminus generalis h^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos(2h+1)\,\varphi.$$

His expressionibus consentietur, si erit seriei pro $\cos\varphi^{r}$ (ubi r sine discrimine numerus par imparve esse potest) terminus initialis

$$\left(1-\frac{1-(-1)^{r+1}}{4}\right)\frac{1}{2^{r-1}}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^{r}}{4}\right)}\cos\frac{1-(-1)^{r}}{2}\,\varphi.$$

Sit enim $r=2m$, fiet

$$\frac{1}{2^{r-1}}=\frac{1}{2^{2m-1}},$$

atque cum sit index coefficientis binomialis

$$\tfrac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^{r}}{4}=m,\qquad {}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^{r}}{4}\right)}\cos\frac{1-(-1)^{r}}{2}\,\varphi={}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)};$$

ut antea.

Sit $r=2m-1$; fiet

$$\frac{1}{2^{r-1}}=\frac{1}{2^{2m-2}},$$

et ob

$$\frac{1-(-1)^{r}}{4}=\frac{1-(-1)^{2m-1}}{4}=+\tfrac{1}{2},$$

$${}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^{r}}{4}\right)}={}^{2m-1}\mathfrak{B}^{\frac{1}{2}(2m-1)+\frac{1}{2}}={}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)},$$

tandem

$$\cos\frac{1-(-1)^r}{2}\varphi = \cos\frac{1-(-1)^{2m-1}}{2}\varphi = \cos\varphi.$$

Tandem factor praefixus fit, existente r numero impari, $= 1$, existente pari, $= 1-\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ uti fas est.

Similiter, dico fore ipsius $\cos\varphi^r$ terminum indefinitum h^{tum}

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r + \frac{1-(-1)^r}{4} + h\right)}\cos\left(2h + \frac{1-(-1)^r}{2}\right)\varphi.$$

Existente enim r pari $= 2m$, ob

$$\frac{1-(-1)^r}{2} = 0,$$

fit expressio

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos 2h\,\varphi;$$

existente impari $= 2m-1$, cum sit tunc

$$\frac{1-(-1)^{2m-1}}{2} = 1,$$

fiet eadem

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos(2h+1)\,\varphi,$$

ut oportet.

Ad vitandam in scribendo molestiam pro quantitate simplici

$$\frac{1-(-1)^r}{2}$$

signum unicum v. g. $= \alpha$, ut in analysi solet fieri, usurpari posset. Haberetur tunc, contracta expressione

$$\cos\varphi^r = (1+\alpha)\frac{1}{2^r}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}(r+\alpha)\right)}\cos\alpha\varphi + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}(r+\alpha)+h\right)}\cos(2h+\alpha)\,\varphi.$$

atque sic binae series, quae primo adspectu diversissimae videbantur, sub una expressione, eaque satis simplici, comprehendi possunt*).

*) [Eine andere für gerade und ungerade r geltende Formel ist

$$2^r\cos\varphi^r = \Sigma\frac{1+(-1)^{r+s}}{2}\,\frac{\Pi(r)}{\Pi\left(\frac{r+s}{2}\right)\Pi\left(\frac{r-s}{2}\right)}\cos s\varphi$$

worin Π die von Euler eingeführte Bedeutung hat, Gauss' Werke Band III Seite 146 und 200, und worin bei der Summation Σ für s die Werthe $0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm\infty$ zu setzen sind. Sch.]

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1893.

(Fortsetzung.)

The Journal of Comparative Neurology. Vol. III. March 1893. Pages 1—34. Granville. Ohio
University Studies publ. by the University of Nebraska. Vol. 1. Juli 1892. N. IV, Lincoln. Nebr.
Smithonian Institution:
Circular concerning the Hodgkins Fund prices. Washington 1893.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. XII. N. 105. Baltimore 1893.
(Argentinien).
La Sociedad Cientifica Argentina:
Anales. Enero de 1893. Entrega 1. Tomo XXXV. Buenos Aires 1893.
(Chili).
La Société Scientifique du Chili:
Actes. Deuxième Année. Procès-Verbaux. Feuilles P—V.
Notes et Mémoires. Feuilles 38—47. Santjago 1893.
(Japan).
The College of Science Imp. University Japan:
Journal. Vol. VI. Part 1. Tokyo 1893.

Nachträge.

Akademie der Wissensch. in Krakau:
Anzeiger. 1893. April.
Leopoldina. Heft XXIX. N. 7—8. April 1893. Halle a. S. 1893.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XXII. Jahrg. 1890. Heft 2. Berlin 1893.
Naturwissensch.-medicinischer Verein zu Heidelberg:
Verhandlungen. Neue Folge. 5. Band. 1. Heft. Heidelberg 1893.

Juni 1893.

(Deutschland).
Leopoldina. H. XXIX. No. 9—10.
Zeitschrift d. deutsch. morgenländ. Ges. Bd. 47. H. 1. 1893.
77. Jahresbericht der naturf. Gesellsch. in Emden für 1891/92. Emden 1893.
O. Janson, Versuch einer Uebersicht über die Rotatorien-Familie der Philodinaea. M. 5 Taf. Bremen 1893. 8°. Beilage zum Bd. XII der Abhdlg. d. natw. Ver. in Bremen.
F. Beilstein, Handbuch d. organ. Chemie. Aufl. 3. Lief. 21. Hamburg u. Leipzig 1893.
F. R. Helmert, Die europäische Längengradmessung im 52. Grad Breite. Heft 1. M. 2 Taf. Berlin 1893. Fol. Veröffentlich. d. kgl. preuss. geodät. Instit. u. Centralbureaus d. internationalen Erdmessung.
L. Frd. Freih. von Eberstein, Abriss d. urkundl. Geschichte d. reichsritterl. Geschlechtes Eberstein von Eberstein auf der Rhön. Dresden 1893. Fol.
A. v. Kölliker, Die Nerven der Milz u. die Gallencapillaren. (A. d. Sitzgber. d. würzbrg. phys. med. Ges. 1893.) 8.

(Oesterreich-Ungarn).
Ed. Suess, Bericht d. kais. Akad. d. Wiss. und der math.-naturw. Classe. Wien 1893.
Eröffnungsrede d. hohen Curators d. kais. Akad. d. Wissensch. d. durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Rainer am 31. Mai 1893.
Meteorologische Zeitschrift. 1893. Hft. 6. Juni. Wien. Fol.
Anzeiger d. Akademie d. Wissenschaften in Krakau. 1893. Mai. 8°.
Wladisl. Wislocki, Acta rectoralia almae universitatis studii cracoviensis. T. I. fasc. 1. Cracoviae 1893.
Rozprawy Akademii umiejętności. Wydział filologiczny. Ser. II. T. II. III. Wydział matematyazno-przyrodniczy T. IV. Krakowie 1893.
Zbiór wiadomości do antropologii krajowej. T. XVI. Kraków 1892. 8°.
Bolesl. Ulanowski. Trzy broszary prawne zr. 1607 i. 1612. Krakowie 1893.
Stef. Rambult, Słownik języka pomorskiego. Krakowie 1893.
Karl Hunrich, Ungarische Revue. 1893. V. Heft. Mai. Budapest.
Veštnik čejk. Akademie cesaře Františka Josefa. Ročnik 1. Cisl. 1—12. V. Praze 1891. 1892. 8°.
Almanach české Akademie. Ročnik I. II. III. V. Praze 1891. 1892. 1893. 8°.
Rozpravy. cěske. Akad. čes. Františka Josefa. Třida I. Ročn 1. Cisl. 1—4. 1892. — Třida II. Ročn 1. Cislo 1—33. 35—44. 1891. 1892. — Třida III. Ročn 1. Cisl. 1—5. 1892.
Bohusl. Rieger, Zřizení krajské v. čechách. II, 1. V. Praze 1892. (Cesk. Akad. Fr. Josef. Trida 1.)
Ferdinand Tadra, Soudni Akta konsistoře pražské. Cást I. V. Praze 1893. (Historický Archiv. čes. Akad. Fr. Josef. I.) 8°.
Jos. Solin, Theorie planostěných nosníků obloukových o dvou opěrách. V. Praze. 1892. (Csesk. Akad. Fr. Jos. Trida II.) 8°.
Felip Počta, O. Mechovkách z. koryoanských Vvstev. V. Praze 1892. 4°. Cesk. Akad. cés. Frant. Jos. Trida II.)
Jaroslav Perner, Foraminifery českého cenomany. V. Praze 1892. 4°. (Cesk. Akad. cés. Frant. Jos. Trida II.)
Václav Voudrák, Glagolita clozůo. V. Praze 1893. 4°. (Cesk. Akad. cés. Frant. Jos. Trida III.)
V. E. Mourek, Kronika dalimilova. V. Praze 1892. 8°.
V. Strouhal, O životě a působení Dra A. Seydlera. V. Praze 1892. 8°.
Mappy staré Prahy. Složel W. Wladiwoj Tomek (Cesk. Akad. čes. Frant. Josef.) V. Praze 1892. qu. fol.

(Schweiz.)
XXII. Jahresbericht d. hist.-antiq. Gesellsch. von Graubünden. Thurgau 1892. Chur. 8°.

(Frankreich).
Bulletin d. l. Soc. mathémat. de France. T. XXI. No. 4. Paris. 8°.

(Belgien).
Bulletin de l'Acad. roy. d. sciences . . . de Belgique. 63. année, 3. série. t. 25. No. 4. Bruxelles 1893. 8°.

(England).
Transactions of the zoolog. Soc. of London. Vol. XIII. Pt. 6. London. June 1893. 4°.
Proceedings . . . of the zoolog. Soc. of London. 1893. Pt. I. London. 8°.
Nature. 48. 1232. 1233. 1234. 1235.
Proceedings of the royal Society. Vol. LIII. No. 322. 323.
Journal of the roy. microscopical Soc. 1893. Pt. 3. June. London. 8°.
Monthly notices of the roy. astronomical Soc. Vol. LIII. No. 7. May 1893.

(Fortsetzung folgt).

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

8. November. № 16. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Beiträge zur molekularen Theorie der Piëzoelectricität.

Von

W. Voigt.

Herr E. Riecke[1]) hat unlängst unter Benutzung und Erweiterung einer zuerst von W. Thomson ausgesprochenen Vorstellung eine molekulare Theorie der Erscheinungen der Piëzo- und Pyroelectricität gegeben, welche diese Vorgänge im Wesentlichen auf die einfacheren der diëlectrischen Polarisation zurückführt. Die Moleküle der Krystalle werden als diëlectrisch polarisirbar und von einem fest mit jedem einzelnen verbundenen System electrischer Pole umgeben gedacht, deren Anordnung den Symmetrieverhältnissen der Krystallform entspricht. Diese Polsysteme er-

1) E. Riecke, Moleculartheorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen. Abh. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Bd. 38, 1892. Wied. Ann. 49, 559, 1893.

geben unter Umständen schon im undeformirten Zustande des Krystalles innerhalb der Moleküle eine electromotorische Kraft, die eine Polarisation bewirken muß; aber deren Wirkung wird für äussere Punkte durch eine auf der Oberfläche des Krystalles inducirte Belegung compensirt. Bei der Deformation ändert sich diese Kraft, und die durch ihre Aenderung bewirkte Aenderung des inducirten Momentes ist der Gegenstand der Beobachtung, also auch der Theorie.

I. Ich möchte mir erlauben, im Folgenden zunächst zu den Entwicklungen meines verehrten Freundes einige Erweiterungen zu geben, die mir im Interesse der Einfachheit und Allgemeinheit seiner Theorie wünschenswerth erscheinen. Sie beziehen sich in erster Linie auf folgenden Punkt.

Herr Riecke geht für die Berechnung der electromotorischen Kräfte von der Annahme ganz bestimmter einfachster Polsysteme aus; er zeigt, daß man durch die Combination von nur fünf Typen derselben electromotorische Kräfte erhalten kann, welche die sämmtlichen Gesetze der electrischen Momente liefern, die ich früher nach bloßen Symmetriebetrachtungen als die allgemeinst möglichen gefunden habe [1]). Aber so interessant und anschaulich dieses Resultat ist, so hat die Bevorzugung gewisser Polsysteme unter der unendlichen Zahl der nach den Symmetrieverhältnissen möglichen etwas Willkürliches, um so mehr, wenn man in Betracht zieht, daß mehrere von ihnen eine wesentlich höhere Symmetrie besitzen, als die Krystallform, der sie entsprechen sollen; hier liegt erst in der Uebereinstimmung der Endformeln mit meinen allgemeinsten Ansätzen die Begründung der Berechtigung zu ihrer Benutzung. Ein Beispiel liefern die hemimorph-hemiëdrischen Gruppen des monoklinen, rhombischen, tetragonalen und hexagonalen Systems, welche durch zwei-, vier- und sechszählige Symmetrieaxen characterisirt sind, während das benutzte Polsystem — ein electrischer Doppelpunkt, dessen Axe in die Symmetrieaxe fällt — eine unendlichzählige Axe besitzt.

Da man aber rationeller Weise die Moleküle als unter der Wechselwirkung ihrer Polsysteme im Gleichgewicht befindlich ansehen muß, so ist nicht recht verständlich, wie aus Polsystemen mit höherer Symmetrie Krystallindividuen von niedrigerer und zwar mehrere von ganz verschiedener Symmetrie entstehen können.

Ueberhaupt scheint es mir practischer, das Hauptgewicht nicht

---

1) W. Voigt, Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen. Abh. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Bd. XXXVI. 1890.

auf die Symmetrieverhältnisse der die Moleküle umgebenden Polsysteme, sondern auf diejenigen des Potentiales ihrer Wirkung zu legen; denn streng genommen giebt nur über diese die Krystallform einen Aufschluß, und es liegen Fälle vor, wo das Potential eine höhere Symmetrie besitzt, als das Polsystem, von dem es herrührt, wo also die Benutzung jenes Polsystems eine unnöthige Specialisirung des Problems enthält.

Hiernach schien es mir wünschenswerth, von der Einführung bestimmter Polsysteme ganz abzusehen und ebenso, wie ich es bei Entwickelung meiner allgemeinen molekularen Elasticitätstheorie[1]) gethan habe, nur mit den durch die Krystallform vorgeschriebenen Symmetrieeigenschaften ihres Potentiales zu rechnen. Man wird sehen, daß hierdurch auch ein großer Aufwand an Rechnung erspart wird, und sonach durch die vorgeschlagene Abänderung zugleich die Allgemeinheit und die Einfachheit der Riecke'schen Theorie gewinnt.

Außer diesen Punkt betreffen die von mir gegebenen Erweiterungen gewisse nothwendige Folgerungen aus den gemachten Voraussetzungen, welche Herr Riecke nicht gezogen hat, und welche für die Vollständigkeit der Theorie nothwendig sind. Sie sind unten in den Formeln (6) und (17) enthalten. —

Für die Componenten Ξ', H', Z' der electromotorischen Kräfte, welche durch die Translation der Moleküle erzeugt werden, erhält Herr Riecke folgende noch ganz allgemeine Werthe:

$$\begin{aligned}
\Xi' &= a_{11}A_{11}+a_{22}B_{21}+a_{33}C_{31}+a_{23}(C_{12}+B_{13})+a_{31}(A_{13}+C_{11})+a_{12}(B_{11}+A_{12})\\
H' &= a_{11}A_{12}+a_{22}B_{22}+a_{33}C_{23}+a_{23}(C_{22}+B_{23})+a_{31}(A_{23}+C_{12})+a_{12}(B_{12}+A_{22}) \quad 1)\\
Z' &= a_{11}A_{13}+a_{22}B_{23}+a_{33}C_{33}+a_{23}(C_{32}+B_{33})+a_{31}(A_{33}+C_{13})+a_{12}(B_{13}+A_{32}).
\end{aligned}$$

Hierin sind

$$a_{11} = x_x,\ a_{22} = y_y,\ a_{33} = z_z,\ 2a_{23} = y_z,\ 2a_{31} = z_x,\ 2a_{12} = x_y \quad 2)$$

die Deformationsgrößen; die

$$A_{hk} = A_{kh},\ B_{hk} = B_{kh},\ C_{hk} = C_{kh}$$

bezeichnen für die Krystallsubstanz bei dem zu Grunde gelegten Coordinatensystem individuelle Constanten, welche durch das Potential P der Wirkung der Pole eines Moleküles auf einen electrischen Punkt $+1$ definirt sind.

Es ist nämlich

1) W. Voigt, Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle; Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. in Göttingen, Bd. 34, 1887.

$$
3)\quad
\begin{aligned}
A_{11} &= \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} x_1, \; A_{12} = \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial y_1} x_1, \; A_{13} = \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial z_1} x_1, \ldots \\
B_{11} &= \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} y_1, \; B_{12} = \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial y_1} y_1, \; B_{13} = \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial z_1} y_1, \ldots \\
C_{11} &= \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} z_1, \; C_{12} = \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial y_1} z_1, \; C_{13} = \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial z_1} z_1, \ldots
\end{aligned}
$$

und dabei können — etwas abweichend von der ursprünglich durch Herrn Riecke gegebenen Definition — die Summen erstreckt gedacht werden über die Wirkungen eines im Coordinatenanfang gelegenen Moleküles auf Massen $+1$, die in den Mittelpunkten x_1, y_1, z_1 aller übrigen Moleküle angebracht sind.

Für die Componenten Ξ'', H'', Z'' der durch Drehung der Moleküle erzeugten electromotorischen Kräfte erhält Herr Riecke ebenso allgemein:

$$
4)\quad
\begin{aligned}
\Xi'' &= l(C_{12} - B_{13}) + m(A_{13} - C_{11} + C) + n(B_{11} - A_{12} - B), \\
H'' &= l(C_{22} - B_{23} - C) + m(A_{23} - C_{12}) + n(B_{12} - A_{22} + A), \\
Z'' &= l(C_{23} - B_{33} + B) + m(A_{33} - C_{13} - A) + n(B_{13} - A_{23}).
\end{aligned}
$$

Hierin sind

$$l, \; m, \; n$$

die Drehungswinkel des Moleküles um die Coordinatenaxen, und es gilt

$$
5)\qquad A = \Sigma \frac{\partial P}{\partial x_1}, \; B = \Sigma \frac{\partial P}{\partial y_1}, \; C = \Sigma \frac{\partial P}{\partial z_1};
$$

diese Summen sind ebenso erstreckt, wie die früheren.

Meines Erachtens muß zu diesen zwei Gattungen von Componenten noch eine dritte gefügt werden, die Wirkung des im Coordinatenanfang befindlichen Moleküles auf seinen eigenen diëlectrisch polarisirbaren Kern bei eintretender Rotation enthaltend; bezeichnen A_0, B_0, C_0 die mittleren Werthe der Componenten dieser electromotorischen Kraft im ursprünglichen Zustande, so muß gelten:

$$
6)\quad \Xi''' = m C_0 - n B_0, \; H''' = -l C_0 + n A_0, \; Z''' = l B_0 - m A_0.
$$

Diese Antheile können je nach der Anordnung der Pole um den Kern ganz verschiedene Größenordnung haben und selbst unmerklich sein; sie sondern sich indeß schließlich nicht von den im System (4) mit A, B, C multiplicirten Gliedern.

Die gesammten electromotorischen Kräfte sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\Xi &= \Xi' + \Xi'' + \Xi''',\\ H &= H' + H'' + H'''\\ Z &= Z' + Z'' + Z'''.\end{aligned} \qquad 7)$$

Die Rotationscomponenten l, m, n sind lineäre Functionen der Deformationsgrößen, und zwar setzen wir mit Herrn Riecke

$$\begin{aligned}l &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{33} + \lambda_4 a_{23} + \lambda_5 a_{31} + \lambda_6 a_{12},\\ m &= \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{22} + \mu_3 a_{33} + \mu_4 a_{23} + \mu_5 a_{31} + \mu_6 a_{12},\\ n &= \nu_1 a_{11} + \nu_2 a_{22} + \nu_3 a_{33} + \nu_4 a_{23} + \nu_5 a_{31} + \nu_6 a_{12}.\end{aligned}$$

Alle diese Formeln beziehen sich auf ein mit dem Volumenelement fest verbundenes, also mit ihm verschobenes und gedrehtes Coordinatensystem.

Um nun die Wirkung der verschiedenen Symmetrieelemente auf die Summen A, B, C, A_{hk}, B_{hk}, C_{hk} zu studiren, ist zu bedenken, daß, wenn die Anordnung der Moleküle im Raume durch die Wechselwirkungen zwischen den Molekülen bestimmt ist, sie jedenfalls nicht von niedrigerer Symmetrie sein kann, als das Potential der Wechselwirkung selbst.

Hieraus ergiebt sich der folgende Weg für die Ableitung der, gewissen Symmetrien entsprechenden, Relationen zwischen den A_{hk}, B_{hk}, C_{hk}.

Ist ein Coordinatensystem X', Y', Z' mit dem ursprünglichen gleichwerthig, so transformirt man jene Summen auf das neue System; man erhält sie dadurch als lineäre Functionen neuer Ausdrücke

$$A'_{11} = \sum \frac{\partial^2 P}{\partial x'^2} x', \; A'_{12} = \sum \frac{\partial^2 P}{\partial x' \partial y'} x', \; \ldots \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aus der Gleichwerthigkeit der Coordinatensysteme ergiebt sich aber

$$A_{hk} = A'_{hk}, \; B_{hk} = B'_{hk}, \; C_{hk} = C'_{hk},$$

und somit ein System lineärer Beziehungen zwischen den betrachteten Constanten.

Gleiches gilt für die A, B, C und A_0, B_0, C_0.

Die Rechnung ist außerordentlich einfach; ich beschränke mich demnach auf die Mittheilung der Resultate.

Ist die Z-Axe eine zweizählige Symmetrieaxe, so findet sich:

$$\begin{aligned}A_{11} = A_{12} = A_2 = A_{33} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{33} = C_{13} = C_{23}\\ = A = B = A_0 = B_0 = 0,\end{aligned}$$

$$
\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_6 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_6 = \nu_4 = \nu_5 =
$$

$$
9)\quad
\begin{aligned}
\Xi &= a_{23}[C_{12} + B_{13} + \lambda_4 (C_{12} - B_{13}) + \mu_4 (A_{13} - C_{11} + C + C_0)] \\
&\quad + a_{31}[A_{13} + C_{11} + \lambda_5 (C_{12} - B_{13}) + \mu_5 (A_{13} - C_{11} + C + C_0)] \\
H &= a_{23}[C_{22} + B_{23} + \lambda_4 (C_{22} - B_{23} - C - C_0) + \mu_4 (A_{23} - C_{12})] \\
&\quad + a_{31}[A_{23} + C_{12} + \lambda_5 (C_{22} - B_{23} - C - C_0) + \mu_5 (A_{23} - C_{12})], \\
Z &= a_{11}[A_{13} + \nu_1 (B_{13} - A_{23})] + a_{22}[B_{23} + \nu_2 (B_{13} - A_{23})] \\
&\quad + a_{33}[C_{33} + \nu_3 (B_{13} - A_{23})] + a_{12}[B_{13} + A_{23} + \nu_6 (B_{13} - A_{23})].
\end{aligned}
$$

Ist die Z-Axe eine dreizählige Symmetrieaxe so gilt:

$$
A_{11}+A_{22} = B_{11}+B_{22} = A_{12}-B_{11} = B_{12}-A_{22} = A_{23}+B_{13} = A_{13}-B_{23} = 0,
$$

$$
A_{33} = B_{33} = C_{13} = C_{23} = C_{11}-C_{22} = C_{12} = A = B = A_0 = B_0 = 0,
$$

die λ_h, μ_h, ν_h verschwinden mit Ausnahme von

$$
\lambda_4 = \varkappa, \quad \mu_5 = -\varkappa;
$$

$$
10)\quad
\begin{aligned}
\Xi &= (a_{11}-a_{22})A_{11} + a_{23}[B_{13} - \varkappa B_{13}] + a_{31}[A_{13} + C_{11} - \varkappa(A_{13} - C_{11} + C + C_0)] - 2a_{12}B_{11}, \\
H &= -(a_{11}-a_{22})B_{22} + a_{23}[A_{13} + C_{11} - \varkappa(A_{13} - C_{11} + C + C_0)] - a_{31}[B_{13} - \varkappa B_{13}] - 2a_{12}A_{11}, \\
Z &= (a_{11}+a_{22})A_{13} + a_{33}C_{33}.
\end{aligned}
$$

Ist die Z-Axe eine vier- oder sechszählige Symmetrieaxe, so kommt zu den vorigen Bedingungen noch hinzu

$$
A_{11} = B_{22} = C_{11} = 0,
$$

und es gilt demgemäß

$$
11)\quad
\begin{aligned}
\Xi &= a_{23}B_{13}(1-\varkappa) + a_{31}[A_{13}(1-\varkappa) - \varkappa(C + C_0)], \\
H &= a_{23}[A_{13}(1-\varkappa) - \varkappa(C + C_0)] - a_{31}B_{13}(1-\varkappa), \\
Z &= (a_{11} + a_{22}) A_{13} + a_{33} C_{33}.
\end{aligned}
$$

Ist die Z-Axe eine vierzählige Drehspiegelaxe[1]), so kommt zu den Bedingungen für die zweizählige Symmetrieaxe noch hinzu

$$
C_{11} + C_{22} = A_{13} + B_{23} = A_{23} - B_{13} = C_{33} = C = C_0 = 0
$$

und die λ, μ, ν reduciren sich auf

$$
\lambda_4 = \varkappa, \quad \mu_5 = -\varkappa;
$$

daher wird

1) S. dazu S. 660, Anm. 1.

$$\begin{aligned} \Xi &= a_{23}[B_{13}+C_{12}-\varkappa(B_{13}-C_{12})]+a_{31}[A_{13}+C_{11}-\varkappa(A_{13}-C_{11})], \\ H &= -a_{23}[A_{13}+C_{11}-\varkappa(A_{13}-C_{11})]+a_{31}[B_{13}+C_{12}-\varkappa(B_{13}-C_{12})], \\ Z &= (a_{11}-a_{22})A_{13}+2a_{12}B_{13}. \end{aligned} \tag{12}$$

Liegt normal zur Z-Axe eine Symmetrieebene, so ist

$$A_{13} = A_{23} = B_{13} = B_{23} = C_{11} = C_{12} = C_{22} = C = C_0 = 0,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_6 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_6 = \nu_4 = \nu_5 = 0,$$

und es gilt demgemäß

$$\begin{aligned} \Xi &= a_{11}[A_{11}+\nu_1(B_{11}-A_{12}-B-B_0)]+a_{22}[B_{12}+\nu_2(B_{11}-A_{12}-B-B_0)] \\ &\quad + a_{33}[C_{13}+\nu_3(B_{11}-A_{12}-B-B_0)]+a_{12}[B_{11}+A_{12}+\nu_6(B_{11}-A_{12}-B-B_0)], \\ H &= a_{11}[A_{12}+\nu_1(B_{12}-A_{22}+A+A_0)]+a_{22}[B_{22}+\nu_2(B_{12}-A_{22}+A+A_0)] \\ &\quad + a_{33}[C_{23}+\nu_3(B_{12}-A_{22}+A+A_0)]+a_{12}[B_{12}+A_{22}+\nu_6(B_{12}-A_{22}+A+A_0)], \\ Z &= a_{23}[C_{22}+B_{33}+\lambda_4(C_{23}-B_{33}+B+B_0)+\mu_4(A_{33}-C_{13}-A-A_0)] \\ &\quad + a_{31}[A_{33}+C_{13}+\lambda_5(C_{23}-B_{33}+B+B_0)+\mu_5(A_{33}-C_{13}-A-A_0)]. \end{aligned} \tag{13}$$

In allen diesen Systemen ist die Z-Axe als ausgezeichnete gewählt; man gewinnt die entsprechenden Formeln für die X- resp. Y-Axe aus ihnen leicht durch geeignete cyklische Vertauschungen.

Ist endlich ein Centrum der Symmetrie vorhanden, so sind alle

$$A_{hk} = B_{hk} = C_{hk} = 0,$$

ferner $A = B = C = A_0 = B_0 = C_0 = 0$, woraus auch

$$\Xi = H = Z = 0 \tag{14}$$

folgt.

Um aus den electromotorischen Kräften die inducirten electrischen Momente a', b', c' der Volumeneinheit zu erhalten, betrachtet Herr Riecke die Moleküle der Einfachheit halber als isotrope Kugeln, wodurch a', b', c' mit Ξ, H, Z proportional werden. Indeß ist es wohl besser, um dem naheliegenden Einwand zu entgehen, daß nach dieser Annahme die Krystalle sich im electrischen Felde isotrop verhalten müßten, den allgemeinsten Ansatz

$$\begin{aligned} a' &= k_{11}\Xi+k_{12}H+k_{13}Z, \\ b' &= k_{21}\Xi+k_{22}H+k_{23}Z, \\ c' &= k_{31}\Xi+k_{32}H+k_{33}Z, \end{aligned} \tag{15}$$

zu machen, und die Constanten $k_{hk} = k_{kh}$ nach den Symmetrieverhältnissen zu specialisiren.

Allerdings bleibt da ein gewisser Zweifel, ob man hierbei den Zustand vor der Deformation als maßgebend ansehen kann, da sich ja die Moleküle im Allgemeinen in Folge der Deformation gegen das Coordinatensystem drehen. Derselbe erledigt sich aber, wenn man, wie gewöhnlich, die Deformationen und demgemäß auch die Rotationen als unendlich klein erster Ordnung betrachtet; man erkennt dann leicht, daß die Berücksichtigung jener Rotation bei der Berechnung der a', b', c nur Glieder zweiter Ordnung liefern würde, also unterbleiben darf.

Ist die Z-Axe zweizählige Symmetrieaxe, so folgt

$$16)\quad k_{13} = k_{23} = 0,\ \text{also}\ a' = k_{11}\Xi + k_{12}H,\ b' = k_{21}\Xi + k_{22}H,\ c' = k_{33}Z;$$

ist sie eine drei-, vier- oder sechszählige Symmetrieaxe oder eine vier- oder sechszählige Drehspiegelaxe, so gilt außerdem

$$16')\quad k_{11} = k_{22},\ k_{12} = 0;\ \text{also}\ a' = k_{11}\Xi,\ b' = k_{11}H,\ c' = k_{33}Z;$$

liegt normal zur Z-Axe eine Symmetrieebene, so ist nur

$$16'')\quad k_{13} = k_{23} = 0,\ \text{also}\ a' = k_{11}\Xi + k_{12}H,\ b' = k_{21}\Xi + k_{22}H,\ c' = k_{33}Z.$$

Diese Formeln sind mit den obigen Werthen für Ξ, H, Z zu verbinden, um die nach den Symmetrieverhältnissen vereinfachten Werthe der inducirten electrischen Momente zu erhalten.

Aber diese inducirten Momente sind noch nicht die ganzen überhaupt erregten und zur Wahrnehmung gelangenden. Denn in allen den Fällen, wo die um das Molekül gruppirten Polsysteme ein von Null verschiedenes Gesammtmoment besitzen, geben sie sowohl bei der Deformation des Volumenelementes, als bei der Drehung der Moleküle gegen jenes ganz ohne Induction eine Veränderung der Momente der Volumeneinheit des Krystalles.

Werden die Componenten des ursprünglichen Momentes der Pole in der Volumeneinheit mit a_0, b_0, c_0, die durch Deformation des Volumenelementes, resp. durch Drehung der Moleküle, bewirkten Zuwachse mit a'', b'', c'' resp. a''', b''', c''' bezeichnet und bedeuten l, m, n, wie früher, die Drehungscomponenten der Moleküle, so gilt:

$$17)\quad \begin{aligned} a'' &= -a_0(a_{11} + a_{22} + a_{33}),\\ b'' &= -b_0(a_{11} + a_{22} + a_{33}),\\ c'' &= -c_0(a_{11} + a_{22} + a_{33})\\ a''' &= mc_0 - nb_0,\\ b''' &= na_0 - lc_0,\\ c''' &= lb_0 - ma_0. \end{aligned}$$

Bei den ersten drei Formeln ist benutzt, daß die Deformation mit einer Vergrößerung der Volumeneinheit um $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ verbunden ist.

Die Momente a_0, b_0, c_0 specialisiren sich für die verschiedenen Krystallgruppen wie die electromotorischen Kräfte A_0, B_0, C_0.

Die gesammten erregten Momente der Volumeneinheit a, b, c folgen aus den obigen Werthen gemäß

$$a = a' + a'' + a''', \quad b = b' + b'' + b''', \quad c = c' + c'' + c'''. \tag{18}$$

Durch bloße Symmetriebetrachtungen habe ich dagegen[1]) aus dem allgemeinen Ansatz

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{11} a_{11} + \varepsilon_{12} a_{22} + \varepsilon_{13} a_{33} + 2\varepsilon_{14} a_{23} + 2\varepsilon_{15} a_{31} + 2\varepsilon_{16} a_{12}, \\ b &= \varepsilon_{21} a_{11} + \varepsilon_{22} a_{22} + \varepsilon_{23} a_{33} + 2\varepsilon_{24} a_{23} + 2\varepsilon_{25} a_{31} + 2\varepsilon_{26} a_{12}, \\ c &= \varepsilon_{31} a_{11} + \varepsilon_{32} a_{22} + \varepsilon_{33} a_{33} + 2\varepsilon_{34} a_{23} + 2\varepsilon_{35} a_{31} + 2\varepsilon_{36} a_{12}, \end{aligned} \tag{19}$$

folgende Resultate erhalten.

Ist die Z-Axe zweizählige Symmetrieaxe, so gilt

$$\begin{gathered} a = 2\varepsilon_{14} a_{23} + 2\varepsilon_{15} a_{31}, \quad b = 2\varepsilon_{24} a_{23} + 2\varepsilon_{25} a_{31}, \\ c = \varepsilon_{31} a_{11} + \varepsilon_{32} a_{22} + \varepsilon_{33} a_{33} + 2\varepsilon_{36} a_{12}; \end{gathered} \tag{20}$$

ist die Z-Axe dreizählige Symmetrieaxe, so gilt

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{11}(a_{11} - a_{22}) + 2\varepsilon_{14} a_{23} + 2\varepsilon_{15} a_{31} - 2\varepsilon_{22} a_{12}, \\ b &= -\varepsilon_{22}(a_{11} - a_{22}) + 2\varepsilon_{15} a_{23} - 2\varepsilon_{14} a_{31} - 2\varepsilon_{11} a_{12}, \\ c &= \varepsilon_{31}(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33} a_{33}; \end{aligned} \tag{21}$$

ist die Z-Axe vier- oder sechszählige Symmetrieaxe, so ist

$$\begin{gathered} a = 2\varepsilon_{14} a_{23} + 2\varepsilon_{15} a_{31}, \quad b = 2\varepsilon_{15} a_{23} - 2\varepsilon_{14} a_{31}, \\ c = \varepsilon_{31}(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33} a_{33}; \end{gathered} \tag{22}$$

ist die Z-Axe vierzählige Drehspiegelaxe, so gilt

$$\begin{gathered} a = 2\varepsilon_{14} a_{23} + 2\varepsilon_{15} a_{31}, \quad b = -2\varepsilon_{15} a_{23} + 2\varepsilon_{14} a_{31}, \\ c = \varepsilon_{31}(a_{11} - a_{22}) + 2\varepsilon_{36} a_{12}; \end{gathered} \tag{23}$$

steht normal zur Z-Axe eine Symmetrieebene, so gilt

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{11} a_{11} + \varepsilon_{12} a_{22} + \varepsilon_{13} a_{33} + 2\varepsilon_{16} a_{12}, \\ b &= \varepsilon_{21} a_{11} + \varepsilon_{22} a_{22} + \varepsilon_{23} a_{33} + 2\varepsilon_{26} a_{12}, \\ c &= 2\varepsilon_{34} a \quad + 2\varepsilon_{35} a_{31}; \end{aligned} \tag{24}$$

1) W. Voigt, Allgemeine Theorie etc. p. 11 u.f.

existirt endlich ein Symmetriecentrum, so ist

$$a = b = c = 0.$$

Vergleicht man diese Formeln mit den Resultaten der obigen Entwickelungen, wobei man passend die Theile a' und $(a'' + a''')$, b' und $(b'' + b''')$, c' und $(c'' + c''')$ gesondert betrachtet, so findet man vollständige Uebereinstimmung, und hierdurch ist gezeigt, daß auch bei denkbar allgemeinster Annahme der mit den Molekülen verbundenen Polsysteme die Riecke'sche Betrachtungsweise dieselben Resultate liefert, wie der von mir gegebene allgemeine Ansatz. Jede der piëzoelectrischen Constanten ε_{hk} ist durch das Potential P, die Constanten λ_h, μ_h, ν_h, von denen die Molekulardrehungen abhängen, und die diëlectrischen Constanten k_{hk} ausgedrückt, und es ist nach den oben zusammengestellten Resultaten leicht, die Vereinfachungen anzugeben, die ihre Werthe in Folge der vorhandenen Symmetrieelemente der Krystallform erleiden.

II. Durch den im Vorstehenden eingeschlagenen Weg ist zwar jede specielle Annahme über die Configuration des Polsystems, soweit es sich um Ableitung der Grundformeln der Piëzoelectricität aus den Riecke'schen Grundhypothesen handelt, überflüssig geworden, aber die Aufsuchung von Polsystemen mit bestimmten Symmetrieverhältnissen hat doch soviel eigenes Interesse und vermag vielleicht gar noch einst in Verbindung mit den chemischen Constitutionsformeln Aufschlüsse über die Anordnung der Atome im Molekül der Krystalle zu geben, daß ich es nicht für überflüssig gehalten habe, dieser Frage näher zu treten. Doch habe ich sie aus den oben (S. 650) erörterten Gründen specieller auf die Aufsuchung von Potentialen zugespitzt, welche bestimmte Symmetrieeigenschaften besitzen; die Ansätze, welche ich für die Potentiale gebe, gestatten jederzeit sogleich die Construction der zugehörigen Polsysteme.

Bezeichnet V das Potential eines Systemes S irgendwie vertheilter electrischer Massen, so giebt bekanntlich

$$\lambda \frac{\partial V}{\partial l}$$

das Potential eines Systems S', welches dadurch erhalten wird, daß man S parallel mit sich selbst aus seiner ursprünglichen Po-

1) Statt a', b', c' kann man auch die oben direct gegebenen Ξ, H, Z in Betracht ziehen, da der Bau der Werthe der ersteren, wie man leicht sieht, genau dem der letzteren gleich ist.

sition um $\lambda/2$ in der Richtung $+l$ verschiebt und mit ihm dasjenige System combinirt, welches S, um $\lambda/2$ in der Richtung $-l$ verschoben und mit entgegengesetzten Ladungen versehen, liefert.

Behandelt man das neue System S' in ähnlicher Weise, so kann man aus V höhere Moleküle mannigfaltiger Art ableiten.

Um kurz zu reden, mag

$$\mu \frac{\partial^n V}{\partial l^n}$$

das Potential des in der Richtung l ver-n-fachten Systems S heißen.

Ich betrachte ausschließlich Punktsysteme, die aus einem einzelnen Pol durch Multiplication nach verschiedenen Richtungen erhalten werden. Ihr allgemeines Potential hat die Form

$$P = \varkappa \frac{\partial^\nu \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a^\alpha \partial b^\beta \partial c^\gamma \ldots} \tag{26}$$

wobei $\nu = \alpha + \beta + \gamma \ldots$ ist. Wir nennen α, β, $\gamma \ldots$ den Grad der einzelnen, ν den Grad der gesammten Multiplication.

Diese Potentiale umfassen keineswegs alle überhaupt möglichen, wie denn in der That einige der von Herrn Riecke benutzten nicht unter diese Form fallen; sie haben aber immerhin einen sehr allgemeinen Charakter und außerdem den Vorzug, sich durch ein einziges Glied auszudrücken, welches ihre Symmetrie mit Leichtigkeit zu beurtheilen gestattet. Dasselbe gilt von den auf einen Einheitspunkt ausgeübten Componenten, wie auch von dem Potential und den Componenten der Wechselwirkung zwischen zwei gleichen Polsystemen.

Eine einfache Ueberlegung ergiebt folgende Sätze.

Multiplicationsrichtungen von geradem Grade kann man einzeln, solche von ungeradem paarweise mit den entgegengesetzten vertauschen, ohne den Werth des Potentiales zu ändern; die letzteren einzeln umgekehrt, ändern nur das Vorzeichen des Potentiales, aber nicht seine Symmetrieeigenschaften.

Das Potential P hat ein Centrum der Symmetrie, wenn sein Gesammtgrad ν eine gerade Zahl ist.

Das Potential P hat eine Symmetrieebene E, wenn die Multiplicationsrichtungen zu jener Ebene symmetrisch liegen oder gelegt werden können und auch die Grade der einzelnen Multiplicationen dieser Symmetrie entsprechen.

Das Potential P hat eine n-zählige Symmetrieaxe A, wenn die Multiplicationsrichtungen zu je n von gleichem Grade auf einem

Rotationskegel um A in gleichem Winkelabstand liegen. Multiplicationen parallel A stören diese Symmetrie nicht.

Außerdem ist A eine zweizählige Symmetrieaxe auch dann, wenn in der Ebene normal zu A Multiplicationsrichtungen liegen, deren Gesammtgrad gerade ist; Multiplicationen nach der Richtung von A, sowie solche, die für sich A zu einer geradzähligen Symmetrieaxe machen, stören diese Symmetrie nicht.

Endlich ist D eine $2m$-zählige Drehspiegelaxe[1]), wenn senkrecht zu D $2m$ gleiche um $\pi/2m$ gegeneinander geneigte Multiplicationsrichtungen von ungeradem Grade liegen und parallel D eine Multiplication von gleichfalls ungeradem Grade stattfindet. Multiplicationen, welche für sich D zu einer $4m$-zähligen Symmetrieaxe machen, stören diese Symmetrie nicht.

Unter Benutzung dieser Sätze kann man leicht Potentiale bilden, welche verlangte Symmetrieelemente besitzen. Im Folgenden sind für die Symmetrieverhältnisse der 32 Krystallgruppen Potentiale zusammengestellt, welche, wie mir scheint, den niedrigst möglichen Gesammtgrad ν besitzen; es giebt, sie aufzufinden, keine systematische Methode, daher ist denkbar, daß in dem einen oder anderen Falle noch ein Multiplicationssystem niedrigeren Grades gebildet werden kann; im Ganzen glaube ich, daß die gegebenen die gewünschte Eigenschaft wirklich besitzen.

Die Anordnung der Gruppen ist nach dem beachtenswerthen Schema von Herrn Schönflies[2]) vorgenommen, welches die Gesetzmäßigkeiten der einzelnen Systeme am schönsten hervortreten läßt; auch die Bezeichnung ist die von ihm vorgeschlagene. In Klammern sind die Zahlen beigefügt, mit welchen Herr Riecke a. a. O. die resp. Gruppen bezeichnet.

Neben dem Namen der Gruppe findet sich die symbolische Angabe der von einander unabhängigen, für die Gruppe characteristischen Symmetrieelemente.

C bezeichnet die Existenz eines Symmetriecentrums,
E_r diejenige einer Symmetrieebene normal zur Richtung r;
A_p^q bedeutet, daß die Richtung p eine q-zählige Symmetrieaxe,
D_s^t daß die Richtung s eine t-zählige Drehspiegelaxe ist,
$A_x^n \sim A_y^n \sim A_z^n$ bezeichnet, daß die X-, Y-, Z-Axe gleichwerthige Symmetrieaxen sind.

---

1) Eine $2m$-zählige Drehspiegelaxe besitzt eine Krystallform bekanntlich dann, wenn sie durch Drehung um $\pi/2m$ um jene Axe und durch Spiegelung in der zu ihr normalen Ebene mit sich selbst zur Deckung gelangt.

2) A. Schönflies, Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig, 1891, p. 555.

Eine kleine Figur erläutert jedesmal die Vertheilung der Multiplicationsrichtungen auf einer Kugelfläche; Punkte mit beigesetzten Buchstaben markiren die einzelnen Richtungen, welche im Hinblick auf ihre Umkehrbarkeit stets so gelegt werden konnten, daß die ihnen entsprechenden Marken sämmtlich auf der sichtbaren vorderen Halbkugel liegen. Nach dem auf S. 659 Gesagten gehören zu demselben Potential unendlich viele, aber allerdings in einer gewissen Hinsicht verwandte Polsysteme. Denn die einzelnen Beträge der bei den Multiplicationen vorzunehmenden Verschiebungen λ kommen in dem Ausdruck (26) für das Potential P gar nicht vor, bleiben also ganz beliebig. Hieraus erhellt die Wahrheit der oben gemachten Bemerkung, daß unter Umständen das Potential eine viel höhere Symmetrie besitzt, als das entsprechende Polsystem, dem man durch Benutzung von lauter verschiedenen Längen λ viele von den Symmetrieelementen nehmen kann, welche das Potential characterisiren. Um die Gesetzmäßigkeit der Polsysteme am leichtesten zu übersehen, wird man bei ihrer Construction stets Längen λ, die gleichberechtigten Multiplicationsrichtungen entsprechen, auch gleich wählen; hierdurch erhält man dann das dem gegebenen Potential zugehörige System höchster Symmetrie.

Da jede Multiplication die Anzahl der vorhandenen Pole verdoppelt, so erkennt man, daß zu einem Potential ν-ten Grades ein System von $N = 2^\nu$ Polen gehört; aber diese oft sehr große Anzahl kann sich durch das Zusammenfallen verschiedener Pole erheblich reduciren.

Zwei Beispiele von allgemeinerem Interesse mögen dies belegen.

Eine specielle Art s e c h s z ä h l i g e r S y m m e t r i e a x e n erhält man, wenn man für P den sechsten Differentialquotienten von $1/r$ nach sechs Richtungen nimmt, welche in einer Ebene liegen und um 60^0 gegen einander geneigt sind; dies giebt $\nu = 6$, $N = 64$. Das zugehörige Polsystem giebt für lauter gleiche λ folgendes Bild. Man zeichne zwei concentrische regelmäßige Sechsecke mit parallelen Seiten, das äußere von doppelter lineärer Größe. Im Centrum bringe man die Masse $+6$, in den Ecken des kleineren Sechseckes je die Massen -2, in den Ecken des größeren je die Massen -1, in seinen Seitenmitten je die Massen $+2$ an. Die Gesammtzahl aller Pole ist $= 19$.

Eine einfache Multiplication nach der Normalen auf der Ebene dieses Systemes S liefert ein neues S', das ein Beispiel giebt für den Fall, daß das Polsystem kein Moment besitzt, aber trotzdem eine electromotorische Kraft auf seinen Mittelpunkt ausübt.

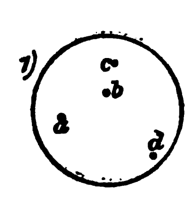
Eine s e c h s z ä h l i g e D r e h s p i e g e l a x e besitzt ein Poten-

tial, das entsteht, wenn man $1/r$ erst nach sechs um 30° gegeneinander geneigten Richtungen einer Ebene und dann nach deren Normale je ein Mal differentiirt; hier ist $\nu = 7$, $N = 128$. Das entsprechende Polsystem liegt auf zwei Paar concentrischen in zwei parallelen Ebenen liegenden Kreisen. Auf jedem Kreis liegen sechs Pole $+1$ und sechs Pole -1 abwechselnd im Abstand von 30° und zwar in jeder Ebene auf jedem Radius immer zwei gleichartige, hingegen auf parallelen Radien in beiden Ebenen verschiedene. Die Gesammtzahl der Pole (die hier, wie gesagt, alle einfach sind) beträgt 48.

Nach dem soeben Gesagten ist also die Gesammtzahl $N = 2^\nu$ der überhaupt bei gegebenem ν möglichen Pole keineswegs immer vorhanden.

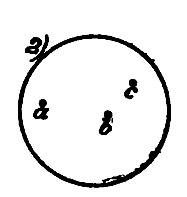
I. Triklines System.

1) Holoëdrische Gruppe, C.



Das einfachste Potential enthält vier Multiplicationsrichtungen a, b, c, d vom ersten Grade, die keine solche relative Lage haben dürfen, daß eine Symmetrieaxe oder -ebene, resp. eine Drehspiegelaxe entsteht. Zwei von diesen Richtungen können zusammenfallen. Der niedrigste mit der Symmetrie verträgliche Grad des Potentiales ist also $\nu = 4$, die kleinste Polzahl $N = 16$.

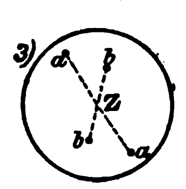
2) Hemiëdrische Gruppe (1), kein Symmetrieelement.



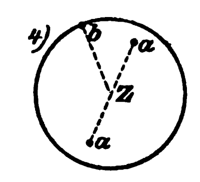
Drei Multiplicationsrichtungen a, b, c vom ersten Grade, die den obigen Bedingungen genügen müssen; $\nu = 3$, $N = 8$.

II. Monoklines System.

3) Holoëdrische Gruppe, CA_2^z oder CE_z.

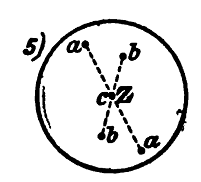


Zwei Multiplicationsrichtungen a und zwei b vom ersten Grade, die je in einer Ebene durch die Z-Axe symmetrisch zu dieser liegen; $\angle a, z$ muß dabei von $\angle b, z$, und der Winkel zwischen beiden Meridianebenen von 0 und $\pi/2$ verschieden sein; $\nu = 4$, $N = 16$.



4) Hemiëdrische Gruppe (3), E_z.

Zwei zur Z-Axe symmetrische Multiplicationsrichtungen a und außerdem eine normal zur Z-Axe liegende b vom ersten Grade. Der Winkel zwischen b und der Ebene durch beide a muß von 0 und $\pi/2$ verschieden sein; $\nu = 3$, $N = 8$.



5) Hemimorphe Gruppe (2), A_z^2.

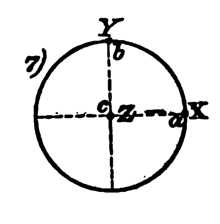
Zu den Multiplicationsrichtungen unter 3) tritt noch eine fünfte c vom ersten Grade parallel der Z-Axe; $\nu = 5$, $N = 32$.

III. Rhombisches System.

6) Holoëdrische Gruppe; $CA_z^2 A_x^2$ oder $CA_z^2 E_z$.

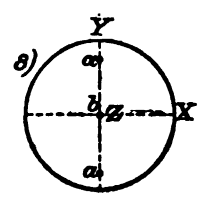
Das einfachste Potential dieser Gruppe besitzt zwei in einer Hauptebene zu einer Coordinatenaxe symmetrisch liegende Multiplicationsrichtungen a vom ersten Grade; $\nu = 2$, $N = 4$.

Eine Erweiterung, die vielleicht naturgemäß erscheint, da jenes Potential einem ganz in einer Ebene liegenden Polsystem entspricht, erhält man, indem man noch zwei Multiplicationsrichtungen ersten Grades b in der ZX-, und zwei c in der XY-Ebene hinzunimmt, die symmetrisch resp. zur Z- und Y-Axe liegen, aber andere Winkel einschließen, als die a, sodaß die drei Coordinatenaxen ungleichwerthig, aber von verwandtem Character sind; $\nu = 6$, $N = 64$.



7) Hemiëdrische Gruppe (5), $A_z^2 A_x^2$.

Drei Multiplicationsrichtungen a, b, c parallel den Coordinatenaxen, von ungeradem, aber verschiedenem Grade. Die kleinsten Werthe für α, β, γ würden also 1, 3, 5, für ν daher 9 sein; $\alpha = \beta = \gamma = 1$ würde die drei Axen gleichwerthig machen und ist also im rhombischen System nicht zulässig.

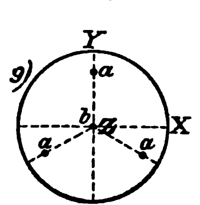


8) Hemimorphe Gruppe (4), $A_z^2 E_x$.

Eine Multiplicationsrichtung b in der Z-Axe, zwei dazu symmetrische a in der YZ- oder XZ-Ebene, alle vom ersten Grade; $\nu = 3$, $N = 8$. Erweiterung wie bei 6).

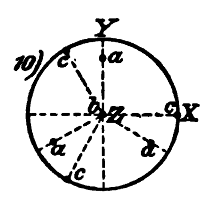
IV. Rhomboëdrisches System.

9) Holoëdrische Gruppe, $CA_z^3A_x^2$ oder $CA_z^3E_x$.



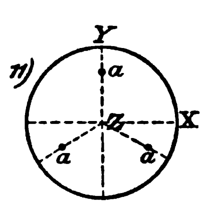
Drei Multiplicationsrichtungen *a* in drei um 120° gegen einander geneigten Meridianebenen unter gleichen Winkeln gegen die *Z*-Axe, eine parallel der *Z*-Axe, alle vom ersten Grade; $\nu = 4$, $N = 16$.

10) Enantiomorph-hemiëdrische Gruppe (17), $A_z^3A_x^2$.



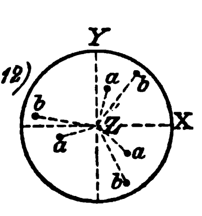
Zu den vorigen sind noch drei zu den resp. *a* und *b* normale Multiplicationsrichtungen *c* vom ersten Grade hinzuzunehmen; $\nu = 7$, $N = 128$.

11) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (14), $A_z^3E_x$.



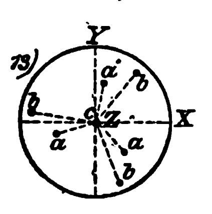
Das System 9) ohne die Multiplicationsrichtung *b* parallel der Hauptaxe; $\nu = 3$, $N = 8$.

12) Paramorph-hemiëdrische Gruppe, CA_z^3.



Zwei Systeme *a* und *b* der vorigen Art, von verschiedenem Oeffnungswinkel und gegeneinander um einen Winkel zwischen 0° und 60° gedreht; $\nu = 6$, $N = 64$.

13) Tetartoëdrische Gruppe (18), A_z^3.

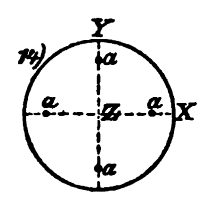


Zu dem vorigen System kommt noch eine Multiplicationsrichtung parallel der *Z*-Axe vom ersten Grade; $\nu = 7$, $N = 128$.

V. Tetragonales System.

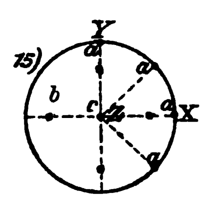
14) Holoëdrische Gruppe, $CA_z^4A_z^2$ oder $CA_z^4E_z$.

Vier Multiplicationsrichtungen in den Hauptebenen, um gleiche Winkel gegen die Z-Axe geneigt, sämmtlich vom ersten Grade; $\nu = 4$, $N = 16$.



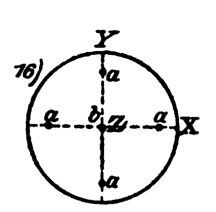
15) Enantiomorph-hemiëdrische Gruppe (8), $A_z^4A_z^2$.

Vier Multiplicationsrichtungen a ersten Grades, um 45° gegen einander geneigt in der XY-Ebene, vier desgleichen b angeordnet wie in (14), eine c parallel der Z-Axe; $\nu = 9$, $N = 512$.



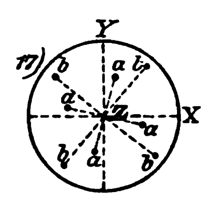
16) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (6), $A_z^4E_z$.

Das System 14), ergänzt durch eine Multiplicationsrichtung ersten Grades parallel der Z-Axe; $\nu = 5$, $N = 32$.



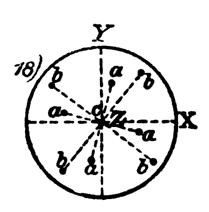
17) Paramorph-hemiëdrische Gruppe, CA_z^4.

Zwei Systeme der Art 14) mit verschiedenen Neigungswinkeln und um einen Winkel zwischen 0° und 45° gegeneinander gedreht; $\nu = 8$, $N = 256$.

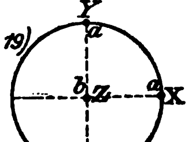


18) Tetartoëdrische Gruppe (9), A_z^4.

Das vorige System, nur ergänzt durch eine Multiplicationsrichtung c ersten Grades in der Z-Axe; $\nu = 9$, $N = 512$.

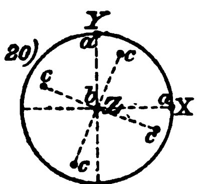


19) Hemiëdrische Gruppe mit zweizähliger Spiegeldrehungsaxe (7) $D_z^2 A_z^2$.



Zwei Multiplicationsrichtungen a gleichen und zwar ungeraden Grades parallel X und Y, eine b mit davon verschiedenem ungeradem Grade parallel Z. Die kleinsten möglichen Grade sind $\alpha = 1$, $\beta = 3$, daher $\nu = 5$, $N = 32$.

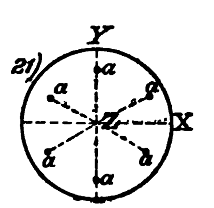
20) Tetartoëdrische Gruppe mit Drehspiegelaxe (10), D_z^2.



Das vorige System, ergänzt durch 14) in um einen Winkel zwischen 0° und 45° gedrehter Lage. β kann hier $= 1$ sein, also $\nu = 7$, $N = 128$.

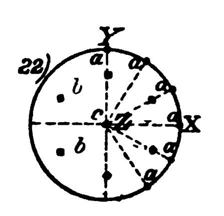
VI. Hexagonales System.

21) Holoëdrische Gruppe, $CA_z^6 A_z^2$ oder $CA_z^6 E_z$.



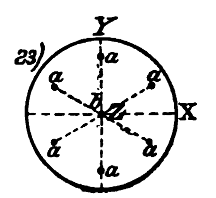
Sechs Multiplicationsrichtungen a ersten Grades, die in einem Kreiskegel um die Z-Axe gleichmäßig vertheilt sind; $\nu = 6$, $N = 64$.

22) Enantiomorph-hemiëdrische Gruppe (13), $A_z^6 A_z^2$.



Sechs Multiplicationsrichtungen a in der XY-Ebene, um 30° gegen einander geneigt, sechs b angeordnet wie in (21), eine c parallel der Z-Axe, alle vom ersten Grade; $\nu = 13$, $N = 8192$.

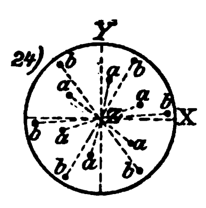
23) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (11), $A_z^6 E_z$.



Das System 21), ergänzt durch eine Multiplication ersten Grades nach der Z-Axe; $\nu = 7$, $N = 128$.

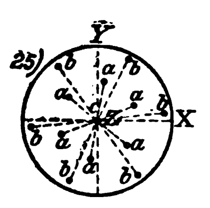
24) Paramorph-hemiëdrische Grupre, CA_{z}^{6}.

Zwei Systeme der Gattung 21) von verschiedenem Oeffnungswinkel und um einen Winkel zwischen 0^0 und 30^0 gegen einander gedreht; $\nu = 12$, $N = 4096$.



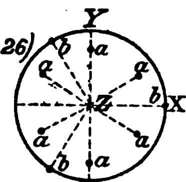
25) Tetartoëdrische Gruppe (16), A_{z}^{6}.

Das vorige System durch eine Multiplication c ersten Grades nach der Z-Axe ergänzt; $\nu = 13$, $N = 8192$.



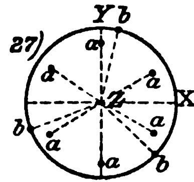
26) Hemiëdrische Gruppe mit dreizähliger Symmetrieaxe (12), $A_{z}^{3} E_{x} A_{x}^{2}$.

Sechs Multiplicationsrichtungen a ersten Grades, wie in 21), und drei in der XY-Ebene um 120^0 gegen einander geneigte und zu drei der ersteren normale b vom ersten Grade; $\nu = 9$, $N = 512$.



27) Tetartoëdrische Gruppe mit dreizähliger Symmetrieaxe (15), $A_{z}^{3} E_{z}$.

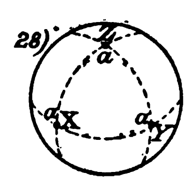
Das vorige System, nur halbiren die b nicht die Winkel zwischen den Ebenen der a, dürfen aber auch nicht in diese Ebenen fallen; $\nu = 9$, $N = 512$.



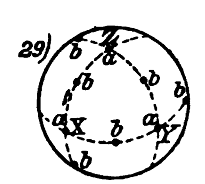
VII. Reguläres System.

28) Holoëdrische Gruppe, $CA_{z}^{4} A_{y}^{4}$.

Drei Multiplicationsrichtungen a zweiten Grades nach den Hauptaxen, $\nu = 6$, $N = 64$.

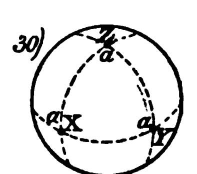


29) Enantiomorph-hemiëdrische Gruppe (21), $A_x^4 A_y^4$.



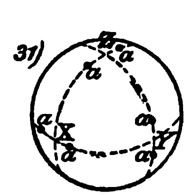
Neun Multiplicationsrichtungen ersten Grades, davon drei a in den Hauptaxen, die sechs übrigen b in den Hauptebenen um 45° dagegen geneigt und so angeordnet, daß die drei Hauptaxen gleichwerthig sind; $\nu = 9$, $N = 512$.

30) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (19), $D_x^4 D_y^4$.



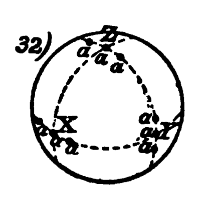
Drei Multiplicationsrichtungen a ersten Grades in den Hauptaxen; $\nu = 3$, $N = 8$.

31) Paramorph-hemiëdrische Gruppe $C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2$.



Sechs Multiplicationsrichtungen a ersten Grades in der YZ-, ZX-, XY-Ebene symmetrisch zu einer darin befindlichen Hauptaxe gelegen unter einem zwischen 0° und 45° liegenden Neigungswinkel; $\nu = 6$, $N = 64$.

32) Tetartoëdrische Gruppe (20), $A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2$.



Combination des Systems 30) und 31); $\nu = 9$, $N = 592$.

Unter den vorstehenden 32 Potentialen und den entsprechenden Polsystemen findet man von den fünf Fundamental-Typen, welche Herr Riecke benutzt, nur zwei. Sein „einaxiges Polsystem" kann nicht auftreten wegen dessen unendlichzähliger Symmetrieaxe, sein „ditetragonales" und sein „dihexagonales Polsystem" sind durch die hier zum Grunde gelegte Operation der successiven Multiplication überhaupt nicht zu erhalten, sondern nur die ihnen nahe verwandten 15) und 22). Dagegen tritt sein „tetraëdrisches Polsystem" in 30) ganz rein, sein „trigonales Polsystem" in 11) allerdings etwas verallgemeinert auf.

Einen wichtigen principiellen Unterschied zwischen den Riecke'schen und den vorstehenden Punktsystemen will ich nicht übergehen, weil er neben der der Krystallform genau entsprechenden Symmetrie am meisten in Betracht kommt. Während die Riecke'schen Systeme zu nicht geringem Theil ein von Null verschiedenes Moment zeigen, sind die Momente aller obigen gleich Null; denn es gilt der leicht erkennbare Satz, daß für jedes Polsystem, welches durch successive Multiplication aus einem Punkt gebildet ist, und dessen Grad gleich oder größer als zwei ist, das Moment verschwindet. Hierdurch vereinfacht sich die Theorie erheblich, denn die oben mit a'', a''', b'', b''', c'', c''', bezeichneten Antheile von den erregten Momenten kommen in Wegfall.

Ich lege hierauf einigen Werth, weil jenen Gliedern gewisse Erscheinungen entsprechen würden, die in der Praxis noch nicht beobachtet sind.

III. Die gemeinsamen Beobachtungen über Piëzoelectricität hatten in mir gleichzeitig mit meinem Freund Riecke den Gedanken an eine molekulare Theorie dieser Erscheinungen erweckt. Andere Arbeiten drängten damals jenen Plan in den Hintergrund; die vorstehenden Untersuchungen haben mich aber zur Wiederaufnahme meiner ursprünglichen Gedanken geführt, und ich erlaube mir im Nachstehenden kurz noch eine andere Auffassungsweise des Phänomens der Piëzoelectricität mitzutheilen, die mir vor der Riecke'schen in mancher Hinsicht den Vorzug größerer Einfachheit zu haben scheint.

Herr Riecke stellt sich die Moleküle vor als diëlectrisch polarisirbare Körper, um welche sich ein unveränderliches System von electrischen Polen gruppirt; ich betrachte dagegen die Moleküle als diëlectrisch nicht polarisirbar, aber die in ihnen befindlichen, etwa an den einzelnen Atomen haftenden Pole als gegen einander verschiebbar. Die Erscheinungen im electrischen Felde, wie bei Einwirkung von Deformationen, sind dann nur Folge und Ausdruck von innermolekularen Umlagerungen. Daß solche in beiden Fällen eintreten müssen, ergibt sich von selbst, wenn man die electrisch geladenen Theile als unter ihrer Wechselwirkung und etwaigen äußeren electrischen Kräften im Gleichgewicht befindlich annimmt.

Allerdings scheint sich dieser Auffassung sogleich eine große Schwierigkeit entgegenzustellen, da ein Molekül, welches im natürlichen Zustand kein electrisches Moment besitzt, dergleichen auch bei einer gleichförmigen Deformation nicht erhält, und eines, welches ursprünglich ein Moment nach irgend einer Richtung hat,

jenes durch dieselbe Ursache auch nur in sehr specieller Weise ändert.

Indessen würde die Annahme, daß bei gleichförmiger Dilatation des Volumenelementes — welche bekanntlich stets stattfindet — auch das einzelne Molekül sich gleichförmig dilatirt, eine ganz willkürlich specielle sein, die voraussetzen würde, daß das Molekül lauter gleichwerthig gelegene Atome enthält. Solche specielle Anordnung ist aber überhaupt nur bei ganz besonders einfacher Symmetrie (z. B. in Gruppe 30) möglich, und auch da keineswegs nothwendig; daher ist jene Schwierigkeit in Wirklichkeit wohl nur eine scheinbare.

Benutzt man das Beobachtungsresultat, daß die piëzoelectrischen Erregungen den ausgeübten Drucken anscheinend in weiten Grenzen proportional sind, so gelangt man dazu, daß auch die den einzelnen Molekülen ertheilten Momente diesen Größen oder aber den Deformationen des Volumenelementes proportional sein müssen. Damit ist zugleich die Möglichkeit der Zerlegung der erregten Molekularmomente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in die Antheile, welche von der Drehung, von der gleichförmigen und von der ungleichförmigen Dilatation herrühren, geliefert.

Die ersten beiden Theile sind durch die Formeln (17) gegeben; sie werden aber ganz vernachlässigt werden können, wenn man die Vorstellung faßt, daß in irgend einem Zustande des Volumenelementes, z. B. unter dem Drucke und der Temperatur, bei welcher der Krystall sich bildete, die einzelnen Moleküle kein Moment besaßen. Die in II gegebene Zusammenstellung zeigt, daß man für jede Krystallgruppe Polsysteme angeben kann, welche dieser Anforderung genügen. Dann sind die in einem andern, für die Untersuchung als Ausgangs- (oder natürlicher) Zustand bezeichneten, die Momente $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ von der Ordnung der Deformationsgrößen, welche das Volumenelement beim Uebergang in diesen Zustand erfahren hât, also unendlich klein erster Ordnung, und daher ihre Veränderung durch weitere Deformationen nur von zweiter Ordnung. Wir wollen dies der Einfachheit halber annehmen und bleiben damit gerade innerhalb jenes Systemes von Annahmen, das ich meiner früheren Arbeit zum Grunde gelegt habe und dessen Consequenzen bisher überall mit der Beobachtung im Einklang gefunden sind.

Die Ableitung der Grundformeln für die erregten Momente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ des Moleküles kann dann in derselben Weise unter alleiniger Benutzung der Symmetrieverhältnisse geschehen, wie ich das früher für die Momente a, b, c der Volumeneinheit gezeigt habe;

man kann aber auch an Stelle jener Rechnungen rein geometrische Betrachtungen setzen, welche vor jenen den Vorzug größerer Anschaulichkeit besitzen. Dabei ist es dann vortheilhaft, wie vorher die g e s a m m t e n $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so jetzt den allein in Betracht zu ziehenden Rest zu zerlegen, und zwar in je sechs Theile, welche den sechs Deformationsgrößen entsprechen, also die jeder einzelnen von ihnen entsprechende ganz specielle Deformation für sich zu betrachten. Ist die Symmetrie des Moleküles eine derartige, daß eine der Coordinatenaxen, z. B. die $+X$-Axe bei Umkehrung des Vorzeichens einer der Deformationsgrößen sich selbst gleichwerthig bleibt, so kann diese Deformation kein Moment parallel dieser Axe erregen. Durch solche und ähnliche Ueberlegungen gelangt man leicht zu den speciellen Werthen der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ für jede Krystallgruppe und erhält aus ihnen die bezüglichen Momente der Volumeneinheit a, b, c durch Multiplication mit der Anzahl der darin befindlichen Moleküle.

Weitergehende specielle Resultate würde man nur durch Einführung specieller Polsysteme und durch Berechnung ihrer Wechselwirkungen erhalten können; aber solche Betrachtungen liegen außerhalb des Rahmens dieser Mittheilung.

Göttingen, im August 1893.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juni 1893.

(Fortsetzung.)

(I t a l i e n).

Atti della r. Accademia dei Lincei. Anno CCXC. 1893. Ser. V. Rendiconti d. sc. fis. matem. e natural. Vol. II. fasc. 8. 9. Roma 1893. 8.

Rendiconto dell' Accadem. d. sc. fis. e matem. Ser. II. Vol. VII. Maggio. Napoli 1893. 8°.

Atti della Soc. toscana di sc. naturali. Proc. verbal. Vol. VIII. Febbr. marz. 1893. 8°.

Bolletino delle publicaz. italiane. 1893. No. 179. 180. Firenze 1893. 8°.

(G r i e c h e n l a n d).

Σιμ. Μπαλανου Λογοδοσια των κατα τοκζ ετος γενομενων. Εν Αθηναις 1893. 8°.

(S c a n d i n a v i e n).

Acta Universitatis Lundensis. T. XXVIII. 1891—1892. Afd. f. Filosofi, Språkvetenskap och Historia. Lund 1891—1892. 4°.

Sveriges offentliga Bibliotek. Accessions-Katalog. 7. 1892. Stockholm 1893. 8°.

(Russland).

Acta Societatis pro fauna et flora fennica. Vol. V. Pars 1a. 2. 1892. Vol. VIII. 1890—1893. Helsingfors. 8°.

Meddelanden af Societas pro fauna et flora fennica. H. 17. 1890—1892. H. 18. 1891—1892. Helsingfors. 8°.

(Amerika. U. S.)

Occasional papers of the California Academy of Sciences. III. Charl. A. Keeler, Evolution of the colors of NA. Land Birds. San Francisco 1893.

The geological and natural history survey of Minnesota. Report XX. Minneapolis 1893. 8°.

Geological and natural history survey of Minnesota. Bull. No. 7. The Manuals of Minnesota by C. L. Herrick. Minneapolis 1892.

Proceedings of the Academy of natural Science of Philadelphia. 1892. Pt. III. October—December. Philadelphia 1892.

Publications of the Washburn Observatory. Vol. VI. Pt. 3. 4. Madison Wis. 1892.

Bulletin of the New York mathemat. Society. Vol. II. No. 9. 1893. New York 1893.

The P. C. P. Alumni Report. Vol. XXIX. No. 9. June 1893. Philadelphia.

E. Vogel, The atomic weights are, under athmospheric pressure, not identical with the specific gravities. Alameda Cal. 1893. 8°.

John Hopkins University Circulars. Vol. XII. No. 106.

(Guatemala).

Demarcacion politica de la republica de Guatemala compilada por la oficina de estadistica 1892. Guatemala 1893. 8°.

Juli 1893.

(Deutschland).

Otto Fischer, Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft d. menschl. Körpers. Abhandl. d. math.-phys. Classe d. K. sächs. Gesellsch. d. W. Bd. XX. No. I. Leipzig 1893.

R. Meister, Die Mimiamben des Herodias. Abhandlg. d. philol.-histor. Cl. d. Kgl. sächs. Ges. d. W. Bd. XIII. No. VII. Leipzig 1893. 8°.

Berichte über d. Verhandlungen d. Kgl. sächs. Gesellsch. d. Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Cl. 1893. II. III. Philol.-histor. Classe. 1893. I.

F. Beilstein, Handbuch der organ. Chemie. 3. Aufl. 22. 23. Lief. Hamburg u. Leipzig 1893. 8°.

Schriften des naturw. Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. X. Heft 1. Kiel 1893.

Jul. Kühn, Berichte aus d. physiol. Laborator. u. d. Versuchsanstalt d. landwirthsch. Instituts d. Universität Halle. Heft 10. Dresden 1893. 8°.

Sitzungsberichte d. Kgl. preuss. Akad. d. W. zu Berlin. 1893. XXIX—XXXII. XXXIII—XXXVI.

XVI. Bericht d. naturf. Gesellsch. in Bamberg. Bamberg 1893. 8°.

Schriften d. physikal.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Jhrg. 33. 1892. Königsberg 1893. 4.

Neunundzwanzigster Bericht d. oberhess. Gesellschaft f. Natur-Heilkunde. Giessen 1893. 8.

Vierteljahrsschrift d. astronomischen Gesellschaft. 28. Jhrg. H. 1 u. 2. Leipzig 1893. 8°.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: E. Ehlers, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

15. November. № 17. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 22. Juli.

Culturversuche mit „ruhenden" Samen.

Von

A. Peter.

Wenn an einer bestimmten Localität mit einer plötzlich eintretenden Veränderung der Bodenoberfläche rasch auch der Charakter ihrer Pflanzendecke wechselt, wenn Arten daselbst auftreten, die früher hier nicht gesehen wurden, oder wenn in sehr großer Individuenmenge bestimmte Pflanzenarten erscheinen, von denen vor Eintritt jener Veränderung nur wenige Exemplare zu beobachten waren, so wird die Frage nach den Ursachen solcher Erscheinungen nicht immer dahin beantwortet, daß die herrschenden Verbreitungsmittel der Pflanzen (Wind, Thiere, Regengüsse etc.) die Samen der in Rede stehenden Gewächse kürzlich erst hieher transportirt hätten. Die meisten Landwirthe und Forstmänner vielmehr wie manche Gelehrte nehmen an, dass der Erdboden selbst die Bedingungen eines raschen Wechsels in der Zusammensetzung seiner Pflanzendecke insofern enthalte, als er die Früchte, Samen, Rhizome, Zwiebeln, Knollen einer ehemals bestandenen Vegetation lange Zeit hindurch im keim- resp. wachsthumsfähigen

Zustande bewahre, auch dann, wenn inzwischen diese Vegetation von einer neuen anders gearteten oder anders zusammengesetzten Pflanzendecke überwuchert worden ist. Träten dann wieder einmal Veränderungen ein, welche günstige Bedingungen für das Aufgehen und Auswachsen der begraben gewesenen Pflanzenkeime schaffen, so erstehe die ehemalige Artengemeinschaft ganz oder theilweise aus ihrem Schlafe, die „ruhenden Samen" würden wieder activ.

Nicht wenige Beobachtungen[1]) in der That sprechen für die Richtigkeit einer solchen Annahme. Die Mittheilungen indessen, welche bisher vorliegen, beschreiben nicht etwa die Verfolgung des Vorganges von Anfang an, sondern sie geben nur die zufällig bemerkten Resultate von Vorgängen, die sich ungesehen in freier Natur bereits abgespielt hatten. Hier aber waren die Oertlichkeiten wie die Pflanzenindividuen unbekannten Einflüssen zugänglich gewesen, die also auch nicht controlirt und mit berücksichtigt werden konnten. Die Schlüsse, welche aus dem plötzlichen Auftreten von Pflanzen an ungewohnter Stelle, nachdem letztere eine Veränderung ihrer Bodendecke erfahren, gezogen wurden, entbehren demnach des Beweises, so daß nicht ohne Grund Bedenken gegen die Erklärungsversuche solcher Vorkommnisse aus der Annahme „ruhender Samen" geäußert worden sind.

Derartige Beweise beizubringen aber erscheint unthunlich, wenn es sich um sehr lange Zeiträume handelt. Man braucht hierbei noch nicht einmal an Mumienweizen und ähnliche Dinge zu denken, bezüglich deren die behaupteten Keimungserfolge sich ja bisher als unrichtig erwiesen haben. Es kann z. B. auch die

---

1) J. C. Arthur in Bot. Gazette VII (1882), 88.

E. Caron in Bull. Soc. bot. de France XXII (1875) Rev. bibl. 110.

A. Ernst in Botan. Zeitung 1876, 33.

Th. v. Heldreich in Atti del Congr. internaz. botan. ten. in Firenze 1874, 137.

J. Hyatt in Proceed. Americ. Assoc. for the Advancement of Science 1875.

F. Ludwig in Biolog. Centralblatt VI (1886), 513.

M. Melsheimer in Corresp.-Blatt d. Naturhist. Vereines d. preuss. Rheinlande und Westfalens XXXIII (1876), 94.

L. Mejer in Jahresber. geograph. Gesellsch. Hannover I (1879), 1.

R. Schomburgk. On the naturalized weeds and other plants in South Australia. 1879.

A. Treichel in Sitzungsber. botan. Vereines Brandenburg 1873, 64; —1876, Sitzungsber. 100; — Tageblatt 53. Naturforscherversammlung in Danzig 1879, 208.

H. Waldner in Irmischia II (1881), 2.

The Gardener's Chronicle XIII (1880), 344.

Pharmac. Journ. and Transact. 3. ser. X (1879/80), 601.

durch Th. von Heldreich bekannt gewordene Beobachtung vom Berge Laurion in Attika auf ihre Ursachen nicht mit aller Sicherheit geprüft werden. (Hier trat bekanntlich plötzlich ein Glaucium auf, welches bis dahin unbekannt gewesen war, zugleich mit ihm in Menge die in Attika noch nicht gefundene Silene Juvenalis Del., als der seit dem Alterthum lagernde 3 m mächtige Minen-Abraum weggeschafft wurde.) Denn Niemand verfügt über Samen von so hohem Alter, in denen man überhaupt noch Keimkraft vermuthen dürfte. Die Forderungen müssen, was das Alter der Sämereien betrifft, ganz erheblich herabgesetzt werden, und es wäre schon ein Fortschritt, wenn wir bezüglich der Bewahrung der Keimfähigkeit unter solchen Verhältnissen, wie sie in der freien Natur gegeben sein können, über die Dauer von ein paar Menschenaltern Aufschluß bekommen würden. Diese Aufgabe werden die botanischen Gärten ohne Zweifel früher oder später ins Auge fassen. Für jetzt aber hat es Interesse durch Versuche zu prüfen, ob der Erdboden thatsächlich vergrabene pflanzliche Keime enthält, ob er die Keimfähigkeit der letzteren auf eine kürzere oder längere Dauer zu conserviren vermag, und welche Arten es sind, deren Samen sich in dieser Weise unverwest längere Zeit hindurch erhalten? Gelingt es mit der hier überhaupt möglichen Sicherheit den Nachweis zu führen, daß derartige Vorkommnisse zu den regelmäßigen Erscheinungen gehören, so gewinnt die Existenz „ruhender“ Samen eine allgemeinere Bedeutung, und sie wird zu einem Factor, mit welchem die Pflanzengeographie dort zu rechnen hat, wo in nicht allzu langsamer Folge bedeutendere Veränderungen der Bodenoberfläche stattfinden, so z. B. bei Ueberschwemmungen, Waldbränden, Vermuhrungen, Dünenwanderung etc., oder bei den durch menschliche Bethätigung herbeigeführten Eingriffen in die Bekleidung des Erdbodens, als: Abholzungen und Aufforstungen, Plaggennutzung, Entwässerungen, Aushebung und Auffüllung von Erdreich, Urbarmachung von Wald, Heide und Unland, Verkoppelungsarbeiten, Meliorationen, Ablagerungen resp. Aufschüttungen von Abfällen, Schlacken, Schutt, Abraum aus Steinbrüchen und Bergwerken u. s. w.

Gelegentliche, schon seit 20 Jahren gemachte Beobachtungen, und einige neuerdings gesehene Vorkommnisse führten mich zur Anstellung einer Reihe von Culturversuchen für den genannten Zweck. Es mußte sich darum handeln, Bodenproben zu untersuchen, an deren Oberfläche schon längere Zeit hindurch keinerlei Vegetation existirt hatte; ferner mußte die Auswahl so getroffen werden, daß es genau bekannt war, ob an diesen Stellen jemals

eine erhebliche Aenderung in der Beschaffenheit der Pflanzendecke stattgefunden habe; endlich waren die Proben so zu entnehmen, daß die Wahrscheinlichkeit der Einschleppung von Sämereien durch Wind, Verschwemmung, Vögel, Mäuse, Weidevieh und Wild aller Art möglichst gering war. Die gegenwärtige Bedeckung der betr. Localitäten mit Wald blieb dabei gleichgiltig, weil etwa aufgehende Waldbaumsamen als solche leicht zu erkennen und zu eliminiren wären. Von der kryptogamischen Vegetation war völlig abzusehen, wegen der uncontrolirbar großen Verbreitungsfähigkeit und Unsichtbarkeit ihrer Sporen. Um allen oben genannten Bedingungen zu entsprechen, schienen mir am besten geeignet vegetationslose Stellen in dichten, künstlich durch Pflanzung aufgeforsteten Waldpartien. Ich wählte hauptsächlich solche Forstorte aus, welche nachweisbar ehemaligen Ackerboden oder größere Weideflächen einnehmen. Zum Vergleich wurden auch einige Proben aus uralten Waldbeständen entnommen, die niemals anderen Zwecken gedient hatten.

Demgemäß habe ich die Versuche in folgender Weise angeordnet und durchgeführt. In sehr dichten Waldbeständen wurden größere Flächen aufgesucht, auf denen entweder überhaupt keine Vegetation vorhanden war oder nur vereinzelte Moosindividuen kümmerlich sich hinfristeten. Mitten aus solchem Fleck heraus wurde eine absolut pflanzenlose quadratische Stelle von 30 cm Seite ausgewählt und aus dieser unter Beobachtung größter Vorsicht der Boden zunächst 8 cm tief ausgehoben. Die so gewonnene Erdmasse wurde sofort in einen neuen dichten Leinwandsack geschüttet und verschlossen nach dem botanischen Garten zu Göttingen gebracht. Dasselbe geschah mit der nächsten 8 cm mächtigen Erdschicht aus dem nämlichen Loch, und meist abermals dasselbe mit einer dritten 8 cm-Schicht, so daß also von der betr. vegetationslosen Waldstelle eine Erdmasse von 30 cm Länge, 30 cm Breite und 24 cm (resp. 16 cm) Höhe entnommen und diese Masse in 3 (resp. 2) gleiche Stockwerke zerlegt worden war. Etwaige kleinere Steine und Wurzeln wurden in der zu cultivirenden Erdprobe belassen, nur ganz große Steine wurden, nachdem die Erde von denselben abgekratzt war, entfernt. — Für die Culturen waren neue flache Holzkästen mit durchlöchertem Boden hergestellt worden (46 cm lang, 25 cm breit, 10 cm tief); der Boden derselben wurde zunächst mit einer Schicht von reinen Topfscherben bedeckt, und auf dieser wurde die Erdprobe gleichmäßig ausgebreitet. Sämmtliche Kästen fanden in einem ausgeräumten kleinen Kalthause nahe unter dem Glase Aufstellung und wurden mit direkt

aus der Leitung entnommenem Wasser begossen. Der Zutritt Unberufener zu den Culturen war verhindert, Anfliegen fremder Sämereien ausgeschlossen. Behufs Controle der aufgegangenen Pflänzchen wurde die Oberfläche eines jeden Kastens durch Ziehen von Fäden je nach Erforderniß in 8 oder 16 Felder eingetheilt. Die Versuchsdauer betrug bis zu 155 Tagen.

Alle Angaben über die frühere Beschaffenheit der Localitäten, an welchen die Bodenproben entnommen wurden, verdanke ich Herrn Oberbürgermeister G. Merkel in Göttingen und dem Forstaufseher Nordemann in Herberhausen; Letzterer hat fast alle hier in Rede stehenden Flächen selbst aufgeforstet.

Die Ergebnisse der Culturen zeigen eine so große Uebereinstimmung, daß sie schon aus diesem Grunde Interesse beanspruchen. Bei jedem Versuch mit ehemaligem Ackerboden ergab sich mindestens eine Mehrzahl, zuweilen selbst ein fast reiner Bestand von Ackerunkräutern, ersteres sowohl was die Arten als auch was die Individuenmenge betrifft; und diese Erscheinung zeigte sich nicht bloß in der obersten Bodenschicht, sondern sie wiederholte sich auch in den tieferen Schichten. Ganz ebenso verhielten sich die Versuche mit Bodenproben von aufgeforsteten früheren Weideflächen. Die zur Controle angestellten Culturen des Erdreiches aus alten Waldbeständen hingegen ergaben ganz überwiegend Arten der Waldflora.

Uebersicht der Culturen.

(In der ersten Columne stehen die Namen der aufgegangenen Pflanzen, in den folgenden Columnen findet sich die Zahl der in den einzelnen Culturen aufgetretenen Exemplare jeder Art und die Gesammtmenge derselben.)

I. Versuch.

Buchenhochwald, etwa 100jährig; Göttinger Wald unweit der „Tuchmacherquelle“. Boden mit starker Laubschicht bedeckt. Hier ist von jeher Buchenwald gewesen. Versuchsdauer 155 Tage.

	obere Schicht	untere Schicht	zusammen
Fragaria vesca	3	2	5
Rubus idaeus	4	4	8
Hypericum perforatum	8	8	16
„ hirsutum	1		1
Betula pubescens		1	1
Galeobdolon luteum	3	1	4
Cirsium arvense	1		1

	obere Schicht	untere Schicht	zusammen
Juncus glaucus	20	12	32
Luzula pilosa	2	4	6
Carex silvatica	6	10	16
Gräser [1])	5	8	13
Gesammtzahl	53	50	103.

Die aufgegangenen Pflanzen sind fast ausschließlich solche, die im Laubholzwalde vorkommen.

II. Versuch.

Buchenwald-Rand. Wald ca. 100jährig wie in Versuch I. Göttinger Wald südöstlich von Herberhausen. An den Waldrand grenzen breite Raine und weiterhin feuchte Aecker. Versuchsdauer 155 Tage.

	untere Schicht	obere Schicht	zusammen
Ranunculus repens	2	2	4
Fragaria vesca	9	3	12
Rubus idaeus	10	12	22
Hypericum perforatum	10	3	13
Epilobium montanum [2])	7	13	20
Betula verrucosa		1	1
Galeobdolon luteum	1		1
Scrophularia nodosa [3])	3	13	16
Atropa Belladonna	3	3	6
Plantago major [4])	7	2	9
Juncus glaucus	34	25	59
Carex silvatica	8	10	18
„ remota	5	5	10
Aira caespitosa	5		5
Gräser		2	2
Gesammtzahl	104	94	198.

Meist Waldpflanzen lichter Bestände, daneben auch einige Rain- und Ackerpflanzen.

1) Die Gräser wurden, da sie fast ohne Ausnahme bis zum Abschluß der Versuche noch nicht zur Blüthe gelangt waren, nicht bestimmt, um Irrthümer zu vermeiden; ebenso meist auch in den folgenden Versuchen.

2) Blüht 82. Tage nach dem Beginn des Versuches, fruchtet reichlich, die Samen keimen vom 100. Tage ab.

3) Blüht vom 97. Tage ab.

4) Blüht vom 92. Tage ab.

III. Versuch.

Fichtenbestand, 32jährig, Reihenpflanzung, sehr dicht und tief schattig, in weiter Ausdehnung fast vegetationslos. Göttinger Wald, bis 1861 Weideland mit einzelnen alten Eichen gewesen, die sog. „Kerstlingeröderfelder Weide." Versuchsdauer 155 Tage.

	obere Schicht	untere Schicht	zusammen
Fragaria vesca	2	1	3
Rubus idaeus		1	1
Potentilla Tormentilla	7	2	9
Trifolium repens[1])	1	2	3
Linum catharticum	|6	9	15
Sagina procumbens	12	17	29
Betula pubescens	1		1
„ verrucosa		1	1
Hieracium Pilosella	1		1
„ Auricula		1	1
Gnaphalium uliginosum		1	1
Veronica serpyllifolia		2	2
Plantago major		1	1
Juncus glaucus	2	1	3
Luzula pilosa	1	1	2
Carex silvatica		1	1
Gräser[2])	34	23	57
Gesammtzahl	67	64	131.

Die weitaus größere Anzahl der aufgegangenen Pflanzen kommt auf geringen Hutweiden vor, wie sie auf den Muschelkalkhügeln der Göttinger Gegend so häufig sind. Einige wenige Waldpflanzen sind beigemischt; dies wird aus der unmittelbaren Nähe sehr grosser alter Waldbestände erklärlich.

IV. Versuch.

Fichtenwald-Rand. Bestand ca. 50jährig. Göttinger Wald, am „Lichten Meer" unweit des Hainholzhofes. An den Waldrand grenzen feuchte Wiesen und Aecker, ehemals ein Sumpf mit Umgebung. Versuchsdauer 155 Tage.

	obere Schicht	untere Schicht	zusammen
Ranunculus repens[3])	22	6	28
Fragaria vesca		1	1

1) Blüht am 109. Tage.
2) Meist Agrostis canina.
3) Wuchert stark, ein Ausläufer blüht 170 Tage nach Beginn des Versuches.

	obere Schicht	untere Schicht	zusammen
Hypericum perforatum	2		2
Nasturtium palustre	2	1	3
Stellaria media.[1])		1	1
Linum catharticum	1	2	3
Gnaphalium uliginosum[2])	1	3	4
Cirsium arvense	1		1
Sonchus arvensis	2		2
Stachys arvensis		1	1
Mentha arvensis		1	1
Gras		1	1
Gesammtzahl	31	17	48.

Fast alle Arten gehören zur Flora feuchterer Aecker, nur einzelne zur Waldflora.

V. Versuch.

Schwarzkieferbestand, 22 jährig. Göttingen, am Hainberge östlich vom Reinsbrunnen. Bis 1871 Acker gewesen. Versuchsdauer 155 Tage.

	obere Schicht	untere Schicht	zusammen
Sinapis arvensis[3])	13	6	19
Cerastium triviale[4])	2		2
Torilis Anthriscus	1		1
Betula pubescens	8	6	14
Euphorbia helioscopia[5])	1	1	2
Myosotis hispida[6])	3	2	5
Polygonum aviculare[7])	1	1	2
„ Convolvulus[8])		1	1
Chenopodium album[9])		1	1
Cirsium arvense	1		1
Sonchus oleraceus[10])	2	4	6
Veronica polita[11])	3	2	5
Convolvulus arvensis	1		1
Anagallis arvensis[12])	1	1	2
Melica nutans	1		1
Gräser (alle gleich)	7	7	14
Gesammtzahl	44	32	76.

Ausgesprochene Ackerflora, nur wenige Waldpflanzen beigemengt.

1) Blüht vom 61. Tage ab, fruchtet, die reichlich ausgestreuten Samen keimen sofort und fructificiren abermals.

2) Blüht vom 87. Tage ab. — 3) Blühte, nachdem alle Exemplare bis auf 2 vorzeitig abgestorben waren, vom 70. resp. 120. Tage ab. — Es blühen 4) vom 134. Tage, 5) vom 80., 6) vom 85., 7) vom 93., 8) vom 81., 9) vom 85., 10) vom 118., 11) vom 154., 12) vom 78. Tage ab.

VI. Versuch.

Fichtenbestand, 22jährig. Göttingen, bis 1871 Acker gewesen (die sog. „Lutzenbreite" östlich vom Reinsbrunnen). Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Papaver Rhoeas			1	1
Sinapis arvensis [1]		1		1
Hypericum perforatum	10	1		11
Stellaria media [2]	1			1
Alchemilla arvensis		1	2	3
Torilis Anthriscus	1			1
Aethusa Cynapium		1		1
Daucus Carota			3	3
Polygonum Convolvulus [3]		1	1	2
Chenopodium album [4]		2	1	3
Betula pubescens	5		1	6
Euphorbia helioscopia			1	1
Leucanthemum vulgare	6		1	7
Galium tricorne	1			1
Myostis hispida [5]	5			5
Linaria vulgaris		1		1
Veronica serpyllifolia	8			8
Gräser	3	2		5
Unbestimmte Sämlinge (ungleiche)	2	4	2	8
Gesammtzahl	42	14	13	69.

Die Ackerpflanzen überwiegen weit.

VII. Versuch.

Buchenbestand, 20jährig, sehr dicht; ehemals bis 1872 sehr steiniger Acker über feuchtem Grunde. Göttingen, in der „Langen Nacht" unter dem Kleperberge. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Ranunculus repens	49	9	5	63
Papaver Rhoeas		1		1
Hypericum perforatum			1	1

1) Blüht nach 61 Tagen.
2) Blüht nach 80 Tagen.
3) Blüht nach 58 Tagen.
4) Blüht nach 39 Tagen.
5) Blüht nach 58 Tagen.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Stellaria media		2		2
Alchemilla arvensis	1			1
Daucus Carota	2			2
Torilis Anthriscus		2		2
Betula pubescens	1			1
Polygonum Convolvulus[1])		1		1
Chenopodium album		1		1
Leucanthemum vulgare			1	1
Galium tricorne	1			1
Linaria vulgaris	1			1
Veronica polita	17	1	2	20
„ agrestis	1	1		2
Myosotis hispida	5	1	2	8
Anagallis arvensis[2])	2	3	3	8
Plantago major		2		2
Campanula rotundifolia		1		1
Gräser	5	5	3	13
Unbestimmte Sämlinge (ungleiche)	23	11	2	36
Gesammtzahl	108	41	19	168.

Es ergiebt sich demnach eine reiche Ackerflora, zu welcher nur vereinzelte Waldpflanzen kommen.

VIII. Versuch.

Fichtenbestand, 22jährig, sehr dicht; ehemals Ackerland und Weidefläche. Göttingen, Kehrwald im Grunde unweit des Hainholzhofes. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Ranunculus repens	17	3	19	39
Thlaspi arvense[3])	3	6	3	12
Capsella bursa pastoris		1		1
Sinapis arvensis			1	1
Stellaria media[4])		1	1	2
Alchemilla arvensis	7	1	1	9
Potentilla Tormentilla	1	2		3
Daucus Carota	2			2
Euphorbia helioscopia[5])	1	2	1	4
Polygonum Convolvulus[6])	1	1		2
Chenopodium album[7])		1		1

1) Blüht vom 78. Tage ab, 2) vom 90. Tage ab, 3) vom 64., 4) vom 80., 5) vom 84., 6) vom 61., 7) vom 82. Tage nach Beginn des Versuches.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Sonchus arvensis	2			2
Leontodon hispidus		1		1
Taraxacum officinale	1	1		2
Picris hieracioides	3		1	4
Galium tricorne		1		1
Stachys palustris	3			3
„ arvensis [1])	3	5		8
Glechoma hederaceum	4	3	3	10
Veronica polita	1			1
Anagallis arvensis	16	8	3	27
Plantago major	29	26	8	63
Gräser	7	3	2	12
Unbestimmte Sämlinge	3			3
Gesammtzahl	104	66	43	213.

Ausschließlich Acker- und Weideflora.

IX. Versuch.

Fichtenbestand, 32jährig, identisch mit III. Ehemals Weideland. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Potentilla Tormentilla	2	1		3
Trifolium repens	2			2
Juncus glaucus	1	3	1	5
Luzula campestris	2	3		5
Carex glauca			1	1
Gräser	7	5	1	13
Gesammtzahl	14	12	3	29.

Im Vergleich mit Versuch III ist wenig aufgegangen; der Charakter der Weideflora erscheint indessen hier eben so wie dort.

X. Versuch.

Fichtenwald, 45jährig, dicht und tief schattig. Göttinger Wald, unter „Rohns Amerika“, tiefere Lage. Bis 1836 gemischter Waldbestand (vorherrschend Fagus silvatica), dann gerodet und bis 1848 als Acker benutzt (je 2mal Weizen und Hafer abwechselnd, darauf 8 Jahre lang Onobrychis viciifolia), seitdem aufgeforstet. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Fragaria vesca	1			1

1) Blüht vom 88. Tage ab.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Linum catharticum			1	1
Sagina procumbens		3	2	5
Betula pubescens	1			1
Gnaphalium uliginosum	4	3		7
Filago minima	2	4		6
Prunella vulgaris	5	1		6
Veronica polita	1	6	1	8
Juncus glaucus	6	60	36	102
Luzula campestris	6	5	1	12
Carex silvatica			2	2
„ glauca			2	2
Gräser	33	19	9	61
Unbestimmte Sämlinge	7	3	7	17
Gesammtzahl	66	104	61	231.

Gemischt aus Waldpflanzen, Weidepflanzen und wenigen Ackerkräutern. Auffallend ist die große Anzahl der aus den tieferen Schichten aufgegangenen Exemplare von Juncus glaucus.

XI. Versuch.

Fichtenbestand, 45 jährig. Göttinger Wald, bei der Ruine von „Rohns Amerika“, höhere Lage. War bis 1836 gemischter (Buchen-) Wald, dann bis 1848 Acker, seitdem durch Pflanzung in die Brache aufgeforstet. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Ranunculus repens	5	1	1	7
Fragaria vesca	3	4	3	10
Rubus idaeus		1		1
Vicia tenuifolia	1			1
Trifolium repens	1			1
„ pratense			1	1
Arenaria serpyllifolia		1		1
Cerastium triviale	1		2	3
Hypericum perforatum	2	1	2	5
Epilobium montanum	5	5	6	16
Sonchus oleraceus	1			1
Gnaphalium uliginosum	4	1		5
Filago minima	1			1
Calamintha Acinos	5			5
Veronica polita	6	1	2	9
„ serpyllifolia		5		5

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Atropa Belladonna		1	1	2
Juncus glaucus	2		2	4
Luzula campestris	5	1	3	9
Gras	9	6	3	18
Unbestimmte Sämlinge		1	3	4
Gesammtzahl	51	29	29	109.

Brachlandflora mit einigen Waldpflanzen.

XII. Versuch.

Lärchenbestand, 46jährig. Göttinger Wald, unterhalb „Rohns Amerika“ unweit Herberhausen. Bis 1847 Ackerland, dann mit Coniferen aufgeforstet. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Ranunculus repens	3	1		4
Sagina procumbens	2	6	1	9
Rubus idaeus	1			1
Trifolium repens	2			2
Hypericum perforatum		1		1
Epilobium montanum	1			1
Gnaphalium uliginosum		1	1	2
Veronica serpyllifolia	2	1	1	4
Plantago major	17			17
Anagallis arvensis	3	4	1	8
Juncus glaucus		1	1	2
Luzula campestris	5	1	1	7
Holcus lanatus	1			1
Gräser	4	2		6
Unbestimmte Sämlinge	14	5	8	27
Gesammtzahl	55	23	14	92.

Acker- und Brachlandpflanzen, wenig Waldbewohner.

XIII. Versuch.

Schwarzkieferbestand, 36jährig, mit viel Monotropa Hypopitys. Göttinger Wald, im „Runden Busch“ bei Herberhausen. War bis 1857 Acker, wurde dann aufgeforstet. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Ranunculus repens	9	3	3	15
Alchemilla arvensis	1			1

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Trifolium repens		3		3
Hypericum perforatum	30	11	2	43
Daucus Carota	7	1		8
Polygonum Convolvulus [1])	1			1
Leucanthemum vulgare	3			3
Valerianella dentata	1			1
Prunella vulgaris	2			2
Gräser	3	2	1	6
Unbestimmte Sämlinge (gleich)	6			6
„ „ (ungleiche)	3	3		6
Gesammtzahl	67	23	6	96.

Nur Acker- und Weidepflanzen.

XIV. Versuch.

Fichtenbestand, 36jährig, sehr dicht und schattig. Göttinger Wald, im „Runden Busch“ unweit Herberhausen. War bis 1857 Ackerland, dann aufgeforstet. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Fragaria vesca	1			1
Rubus idaeus	1			1
Sagina procumbens	1			1
Euphorbia helioscopia [2])	1	1		2
Sonchus arvensis	1			1
Gnaphalium uliginosum		1		1
Luzula campestris	5	5		10
Gräser	3	3		6
Unbestimmte Sämlinge		2		2
Gesammtzahl	13	12	0	25.

Gemischt aus Acker- und Weidepflanzen.

XV. Versuch.

Nadelholzbestand, 36 jährig, sehr dicht und schattig. Göttinger Wald, im „Runden Busch“ unweit Herberhausen. Bis 1857 Acker gewesen, dann mit Fichten, Lärchen, Schwarzkiefern aufgeforstet. Versuchsdauer 85 Tage.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Ranunculus repens	1	1		2
Arenaria serpyllifolia	1			1

1) Blüht vom 72. Tage, 2) vom 92. Tage ab nach Beginn des Versuches.

	obere Schicht	mittlere Schicht	untere Schicht	zusammen
Stellaria graminea	1			1
Holosteum umbellatum		2		2
Hypericum perforatum	1			1
Epilobium montanum	1			1
Daucus Carota	5	3		8
Euphorbia helioscopia	1			1
Leucanthemum vulgare	1		1	2
Cirsium lanceolatum	1			1
Leontodon hispidus	1			1
Taraxacum officinale	1			1
Knautia arvensis	7			7
Calamintha Acinos	3			3
Anagallis arvensis	2	3	1	5
Gräser (verschiedene)	3	2		5
Unbestimmte Sämlinge		1		1
Gesammtzahl	30	12	2	44.

Hauptsächlich Weidepflanzen, daneben einige Arten der Aecker und Wälder.

Zusammenstellung.

Zahl d. aufgegangenen Exemplare. | Zahl der aufgegangenen Arten.

Versuch No.	Bodenschichten. a 0—8 cm	b 8—16 cm	c 16—24 cm	zusammen	Versuch No.	Bodenschichten. a 0—8 cm	b 8—16 cm	c 16—24 cm	zusammen
1.	53	50	—	103	1.	9	8	—	17
2.	104	94	—	198	2.	13	12	—	25
3.	67	64	—	131	3.	9	14	—	23
4.	31	17	—	48	4.	7	8	—	15
5.	44	32	—	76	5.	13	10	—	23
6.	42	14	13	69	6.	8	7	7	22
7.	108	41	19	168	7.	10	12	6	28
8.	104	66	43	213	8.	16	16	10	42
9.	14	12	3	29	9.	4	3	2	9
10.	66	104	61	231	10.	8	7	7	22
11.	51	29	29	109	11.	14	11	10	35
12.	55	23	14	92	12.	10	8	6	24
13.	67	23	6	96	13.	8	4	2	14
14.	13	12	0	25	14.	6	3	0	9
15.	30	12	2	44	15.	14	4	2	20
1— 5.	299	257	—	}1631	1—15	149 a	127 b	48 c	
6—15.	550	335	190						
1—15.	849 a	592 b	190 c						

Verhältniß von a : b in 1—5 = ca. 6 : 5.
" " a : b : c in 6—15 = ca. 11 : 7 : 4.

Verhältniß von a : b : c = 3 : 2,5 : 1.

Uebersicht der Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Arten in den Culturen 1—15.

Name	Gesammtzahl der		Davon treffen auf die					
			obere Bodenschicht		mittlere Schicht		untere Schicht	
	Culturen	Exemplare	Culturen	Exemplare	Culturen	Exemplare	Culturen	Exemplare
A. Waldpflanzen.								
Fragaria vesca	13	34	6	19	6	12	1	3
Rubus idaeus	8	34	4	16	4	18	—	—
Hypericum hirsutum	1	1	1	1	—	—	—	—
Epilobium montanum	7	38	4	14	2	18	1	6
Betula pubescens	8	24	5	16	2	7	1	1
„ verrucosa	2	2	—	—	2	2	—	—
Galeobdolon luteum	3	5	2	4	1	1	—	—
Scrophularia nodosa	2	16	1	3	1	13	—	—
Atropa Belladonna	4	8	1	3	2	4	1	1
Luzula pilosa	4	8	2	3	2	5	—	—
Carex silvatica	6	37	2	14	3	21	1	2
„ remota	2	10	1	5	1	5	—	—
Aira caespitosa	1	5	1	5	—	—	—	—
Melica nutans	1	1	1	1	—	—	—	—
B. Ackerunkräuter.								
Thlaspi arvense	3	12	1	3	1	6	1	3
Capsella bursa pastoris	1	1	—	—	1	1	—	—
Sinapis arvensis	3	20	1	13	2	7	—	—
Nasturtium palustre	2	3	1	2	1	1	—	—
Papaver Rhoeas	2	2	—	—	1	1	1	1
Stellaria media	5	6	1	1	3	4	1	1
Cerastium triviale	3	5	2	3	—	—	1	2
Holosteum umbellatum	1	2	—	—	1	2	—	—
Arenaria serpyllifolia	2	2	1	1	1	1	—	—
Alchemilla arvensis	7	14	3	9	2	2	2	3
Vicia tenuifolia	1	1	1	1	—	—	—	—
Aethusa Cynapium	1	1	—	—	1	1	—	—
Valerianella dentata	1	1	1	1	—	—	—	—
Cirsium arvense	3	3	3	3	—	—	—	—
Sonchus arvensis	3	5	3	5	—	—	—	—
„ oleraceus	3	7	2	3	1	4	—	—
Galium trioorne	3	3	2	2	1	1	—	—
Mentha arvensis	1	1	—	—	1	1	—	—
Stachys arvensis	3	9	1	3	2	6	—	—
„ palustris	1	3	1	3	—	—	—	—
Glechoma hederaceum	3	10	1	4	1	3	1	3
Veronica polita	12	43	5	28	4	10	3	5
„ agrestis	2	2	1	1	1	1	—	—
Myosotis hispida	6	18	3	13	2	3	1	2
Anagallis arvensis	16	53	6	25	5	19	5	9
Convolvulus arvensis	1	1	1	1	—	—	—	—
Euphorbia helioscopia	9	10	4	4	3	4	2	2
Polygonum aviculare	2	2	1	1	1	1	—	—
„ Convolvulus	7	7	2	2	4	4	1	1
Chenopodium album	5	6	—	—	4	5	1	1

Name	Gesammtzahl der		Davon treffen auf die					
			obere Bodenschicht		mittlere Schicht		untere Schicht	
	Culturen	Exemplare	Culturen	Exemplare	Culturen	Exemplare	Culturen	Exemplare
C. Weidepflanzen.								
Ranunculus repens	20	162	8	108	8	26	4	28
Sagina procumbens	8	44	8	15	8	26	2	3
Stellaria graminea	1	1	1	1	—	—	—	—
Potentilla Tormentilla	6	25	3	10	3	15	—	—
Trifolium repens	6	11	4	6	2	5	—	—
„ pratense	1	1	—	—	—	—	1	1
Hypericum perforatum	16	93	7	63	6	25	3	5
Linum catharticum	5	19	2	7	2	11	1	1
Torilis Anthriscus	3	4	2	2	1	2	—	—
Daucus Carota	7	23	4	16	2	4	1	3
Cirsium lanceolatum	1	1	1	1	—	—	—	—
Hieracium Pilosella	1	1	1	1	—	—	—	—
„ Auricula	1	1	—	—	1	1	—	—
Taraxacum officinale	3	3	2	2	1	1	—	—
Leontodon hispidus	2	2	1	1	1	1	—	—
Picris hieracioides	2	4	1	3	—	—	1	1
Gnaphalium uliginosum	10	20	3	9	6	10	1	1
Filago minima	3	7	2	3	1	4	—	—
Leucanthemum vulgare	5	12	3	10	—	—	2	2
Knautia arvensis	1	7	1	7	—	—	—	—
Plantago major	8	92	3	52	4	31	1	8
Prunella vulgaris	3	8	2	7	1	1	—	—
Calamintha Acinos	2	8	2	8	—	—	—	—
Veronica serpyllifolia	6	19	2	10	3	8	1	1
Linaria vulgaris	2	2	1	1	1	1	—	—
Campanula rotundifolia	1	1	—	—	1	1	—	—
Juncus glaucus	16	207	6	65	6	102	4	40
Luzula campestris	13	43	5	23	5	15	3	5
Holcus lanatus	1	1	1	1	—	—	—	—
D. Nicht bestimmt:								
Gräser	33	232	13	123	15	90	6	19
Dicotylen	18	110	6	59	7	29	5	22

Nachdem die Culturen der Bodenproben bereits längere Zeit im Gange gewesen, wurde ich aufmerksam darauf, daß unweit derjenigen Stellen, aus welchen die Erdproben für die oben angeführten Versuche No. 13—15 entnommen worden waren, ein für forstliche Zwecke hergestelltes Saatbeet sich befindet. Letzteres liegt in einer von 3 Seiten durch Wald umschlossenen Wiese, welche gleichzeitig und im Zusammenhange mit dem jetzigen „Runden Busch“ bis zum Jahre 1857 Ackerland gewesen ist. Der Rasen war erst im laufenden Jahr umgebrochen worden, um dem Saatkamp für Eschen Platz zu geben. An dieser Stelle durfte,

wenn ruhende Samen im ehemaligen Ackerboden zurückgeblieben waren, die nämliche Erscheinung erwartet werden wie in meinen Versuchen No. 13—15: es mußten Ackerunkräuter in größerer Zahl hervortreten und zwar die gleichen Arten wie dort. Leider kam ich zu spät an diesen Kamp, um dessen Vegetation von Anfang an zu beobachten: es war bereits 2 mal gejätet worden, bevor ich den Pflanzenbestand daselbst verzeichnete. Indessen durfte dieser Umstand als nicht allzu ungünstig angesehen werden, insofern als durch das Jäten die etwaigen ruhenden Samen um so ausgiebiger den Atmosphaerilien zugänglich gemacht sein mußten. Aus der nachstehenden Liste aller im genannten Kamp beobachteten Arten, welche hier in Betracht kommen können, geht die sehr weitgehende Uebereinstimmung dieses unfreiwillig in großem Maaßstabe ausgeführten Versuches mit meinen kleinen Culturen evident hervor. — Die auch in den Culturen No. 13—15 zum Vorschein gekommenen Arten sind mittelst — bezeichnet; die mit · gekennzeichneten Arten traten in anderen Culturen auf; die nicht bezeichneten fehlen in meinen Versuchen.

· Chenopodium album
— Euphorbia helioscopia
„ exigua
Fumaria officinalis
· Sinapis arvensis
— Arenaria serpyllifolia
Viola tricolor arvensis
— Daucus Carota
— Alchemilla arvensis
Polygonum Persicaria
· „ aviculare
— „ Convolvulus
· Thlaspi arvense
· Papaver Rhoeas
— Hypericum perforatum
Adonis aestivalis
· Mentha arvensis
· Stachys arvensis
· „ palustris

Galeopsis Ladanum
· Myosotis hispida
· Veronica agrestis
Linaria minor
· Convolvulus arvensis
· Plantago major
— Anagallis arvensis
— Valerianella dentata
· Sonchus oleraceus
— „ arvensis
— Leucanthemum vulgare
— Gnaphalium uliginosum
· Cirsium arvense
— Taraxacum officinale
— Leontodon hispidus
Lampsana communis
Atriplex patulum
— Agrostis canina
Poa compressa.

Aus den vorstehend beschriebenen Versuchen geht im wesentlichen folgendes hervor.

Alle untersuchten Waldböden aus der Göttinger Umgebung, welche von vegetationslosen Stellen in dichten tiefschattigen Beständen entnommen wurden, enthielten verborgene lebende Pflanzenkeime; letztere sind größtentheils sog. „ruhende Samen“.

Diese ruhenden Samen gelangten zur Entwicklung, als der Boden gelockert, befeuchtet und belichtet wurde. Sie ergaben normale Individuen mit normalem Eintritt der Lebensphasen.

Im allgemeinen erschien die Intensität aller Keimungsvorgänge bei der Entwicklung ruhender Samen schwächer als bei frischen Samen.

Aus tieferen Bodenschichten kamen successive weniger Arten und überhaupt weniger Keimlinge als aus den oberen Schichten.

Wurden Bodenproben aus solchen Wäldern entnommen, welche von jeher Wald gewesen sind, so gingen aus denselben auch fast nur Waldpflanzen auf; kamen die Bodenproben aus gepflanzten Beständen auf ehemaligem Acker- oder Weideland, so erschienen in den Culturen neben wenigen Arten der betr. Waldflora auch vorwiegend diejenigen der vorausgegangenen Pflanzendecke oder nur letztere allein; — an Acker- und Weidepflanzen ca. 70 Arten.

Derartige Resultate ergaben sich bei gepflanzten Wäldern, deren Aufforstung vor 20 bis 46 Jahren erfolgt war. Die Keimfähigkeit der Sämereien ist also eine nahezu eben so lange Zeit hindurch im Erdboden conservirt worden.

Nach diesen Versuchen erscheint es möglich, aus dem Ergebniß der Culturen von Bodenproben aus Wäldern auf die frühere Beschaffenheit und die ehemalige Art und Weise der landwirthschaftlichen Verwendung dieser Ländereien zu schließen.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli 1893.

(Fortsetzung.)

(Oesterreich-Ungarn).

Kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Sitzungsberichte, philos.-histor. Classe. Bd. 127. 128. — math.-naturw. Classe. 1892. Register 97—100. Bd. 101. Abth. I. No. 7—10. II[a] No. 6—10. II[b] No. 6—10. III No. 6—10. — Denkschriften math.-natur. Bd. 59.

Monumenta conciliorum. T. III. p. II.
Tabulae codicum. Vol. VIII.
Verhandlg. d. k. k. zool.-botan. Gesellschaft in Wien. Jhrg. 1893. Bd. XLIII. 1. u. 2. Quartal. Wien 1893. 8°.
Magnetische und meteorolog. Beobachtungen an d. Sternwarte zu Prag im J. 1892. 53. Jhrgg. 4°.
Anzeiger d. Akadem. d. Wissensch. in Krakau. Juni. Krakau 1893. 8°.

(England).

Monthly Notices of the r. astronomical Society. Vol. LIII. No. 8. June 1893. 8°.
Proceedings of the royal Society. Vol. LIII. N. 324. 8°.
Nature. Vol. 48. No. 1236. 1237. 1238. 1239.

(Indien).

Records of the geological Survey of India. Vol. XXVI. Pt. 2. 1893. 8°.

(Australien).

Records of the geological Survey of new South Wales. Vol. III. Pt. III. Sidney 1893. 8°.

(Holland).

Archives néerlandaises des sciences exact. et naturelles. T, XXVII. Livr. 1 et 2. Haarl. 1893. 8°.
Bijdragen tot de Taal, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie. Volgr. 5. Deel 8. Aflev. 3. S. Gravenhage 1893. 8°.
Verhandelingen der kon. Akademie van Wetenschapen te Amsterdam. Afd. Natuurkunde. Sect. 1ª Dl. I. No. 1—8. Sect. 2ª Dl. I. No. 1—10. Dl. II. — Letterkunde. Dl. I. No. 1/2.
Verslagen der Zittingen. Wis- en Natuurkundige Afdeel. Jahr 1892/93.
Jaarboek van d. k. Akad. van Wetensch. te Amsterdam. 1892.
Verslagen en Mededeelingen Letterkunde. 3e Reeks. D. IX. Natuurkunde. 3e Reeks. D. IX. Mit Register zu Deel I—IX.
Quatuor carmina latina. 8°.
Nederlandsch Kruidkundig Archief. Verslag. en Mededel. d. neerl. botan. Vereen. Ser. 2. D. 6. Stuck 2. Nijmegen 1893. 8°.
Tijdschrift voor nederland. Taal- en Letterkunde. Deel 12. Nieuwe R. D. 4. Aflev. 3. Leiden 1893. 8°.

(Belgien).

Bulletin de l'Academie roy. des sciences . . . de Belgique. 63. année. 3. sér. t. 25. No. 5. Bruxelles 1893. 8°.

(Italien.)

Atti della Società toscana d. sc. natural. Memorie. Vol. XII. Pisa 1893. 8°.
» » » » » » » Processi verbali. Vol. VIII. Adunanza 7/V. 93. 8°.
Atti della R. Accadem. dei Lincei. Anno CCLXXXIX. 1892. Ser. 4. Class. d. sc. morali stor. e filol. Vol. X. Pt. 2. Roma 1892. 4°.
Atti della R. Accadem. dei Lincei. Anno CCXC. 1893. Ser. 5. Class. d. sc. mor. stor. e filol. Vol. I. Pt. 2. Notizie degli Scavi.
Atti della R. Accadem. Indice topografico per l'anno 1892. Roma 1892. 4°.
Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. Class. dei sc. moral. stor. e filol. Ser. V. Vol. II. fasc. 3. 4. 5. Roma 1893. 8°.
Rendiconti. Anno CCXC. 1893. Classe d. sc. fis. matem. e nat. Vol. II. Fasc. 10. 11. 12. Roma 1893. Vol. II. 2e Semestre. Fasc. 7.
Rendiconti dell' adunanza solenne del 4 Giugno 1893. Roma 1893. 4°.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

22. November. № 18. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 4. November, 4 Uhr.

Die Kgl. Gesellschaft hielt nach den Statuten die öffentliche Sitzung zur Erinnerung an den Geburtstag ihres Stifters.

Nach einleitenden Worten des Vorsitzenden, in denen er der Verdienste des verstorbenen Geh. Reg. Rathes Sauppe um die Leitung der Geschäfte der Gesellschaft gedachte, trug Herr Professor Liebisch:

Ueber die neuere Entwicklung der physikalischen Krystallographie

vor.

Der Vorsitzende berichtete dann über die Preisaufgaben.

Im Jahre 1890 hatte die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften nach dem Vorschlage der physikalischen Klasse folgende Aufgabe gestellt:

„Aus den Untersuchungen von W. C. Röntgen und A. Kundt über die Aenderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes im elektrischen Felde ergiebt sich ein enger Zusammenhang zwischen den elektrooptischen Erscheinungen und den elastischen Deformationen, welche jene piëzoelektrische Substanz unter der Einwirkung elektrostatischer Kräfte erfährt. Eine Ausdehnung dieser Forschungen auf eine größere Reihe piëzoelektrischer Krystalle von verschiedenen Symmetrieeigenschaften erscheint in hohem Grade erwünscht. Gleichzeitig würde die Untersuchung

darauf zu richten sein, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen ausschließlich durch die im elektrischen Felde eintretenden Deformationen oder außerdem durch eine directe Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung hervorgerufen werden".

Es ist am 27. September 1893 eine Abhandlung eingegangen, die mit dem Motto:

„In's Innere der Natur dringt kein erschaff'ner Geist"

bezeichnet ist.

Das Urtheil über sie lautet:

In der Einleitung dieser umfangreichen Schrift entwickelt der Verf. eine allgemeine Theorie der elektrooptischen Erscheinungen in Krystallen. Er vermeidet, von vorn herein eine specielle Annahme zu machen über den möglichen Zusammenhang der Aenderungen des optischen Verhaltens eines vollkommen durchsichtigen Krystalls im elektrostatischen Felde mit den durch dieses Feld hervorgerufenen elastischen Deformationen des Krystalls, und setzt nur voraus, daß die optische Aenderung zugleich mit der elektrischen Einwirkung ihr Vorzeichen umkehrt, daß die gewöhnlichen Gesetze der Doppelbrechung und Polarisation des Lichtes gültig bleiben und daß die Aenderungen der optischen Constanten der dielektrischen Polarisation proportional seien. Unter diesen Annahmen ist das elektrooptische Verhalten eines unsymmetrischen Krystalls durch 18 experimentell zu bestimmende Constanten charakterisirt.

Wären nun die elektrooptischen Erscheinungen der Krystalle, wie bisher vermuthet wurde, eine indirecte Wirkung der elektrostatischen Kräfte, insofern sie lediglich durch die elastischen Deformationen dieser Körper im elektrischen Felde hervorgerufen werden, so würde es, wie der Verf. darlegt, möglich sein, die elektrooptischen Constanten zu berechnen, wenn zuvor die elastischen, piëzooptischen und piëzoelektrischen Constanten bestimmt worden sind. Ergiebt sich dann eine Abweichung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen der elektrooptischen Constanten, so ist dadurch eine directe optische Wirkung des elektrischen Feldes auf die Krystalle erwiesen.

Obwohl der Verfasser das hiermit bezeichnete Programm wegen der großen Zahl der in Betracht kommenden Constanten und der Schwierigkeit vollkommen geeignete Krystalle zu erlangen nur auf vier Körper anwenden und unter diesen nur am Natriumchlorat und Quarz vollständig, am Turmalin und Seignettesalz wenigstens bis zu einem gewissen Grade durchführen konnte, so

ist doch die von der Gesellschaft gestellte Aufgabe als gelöst zu betrachten.

Mit voller Sicherheit hat der Verf. nachgewiesen, daß in jenen Körpern das elektrostatische Feld eine directe Einwirkung auf die Lichtbewegung ausübt.

Im Natriumchlorat ist die beobachtete elektrooptische Wirkung fast 12 mal so groß wie die gleichsinnige, aus der Deformation berechnete optische Einwirkung. Im Quarz sind die Aenderungen der Doppelbrechung im elektrischen Felde zwar gleichsinnig aber viel größer als diejenigen, welche als eine indirecte Folge der Deformation auftreten würden. Und im Seignettesalz weicht der für die Richtung einer der drei Symmetrieaxen beobachtete Werth der elektrooptischen Constante sogar im Vorzeichen von dem berechneten Werthe ab, so daß in dieser Richtung eine dielektrische Polarisation in ganz anderer Weise auf das optische Verhalten des Körpers einwirkt, wie die mit ihr verbundene Deformation.

Diese wichtigen Ergebnisse sind durch äußerst sorgfältige Messungen gewonnen worden, nach Methoden, die zum Theil erst von dem Verfasser für die vorliegende Aufgabe ausgearbeitet werden mußten. Ihre Richtigkeit ist durch Controlbestimmungen außer Zweifel gestellt.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften hat danach beschlossen, dem Verf. der Bewerbungsschrift ihre wärmste Anerkennung auszusprechen und ihm den vollen Preis zu ertheilen.

Die Eröffnung des die Arbeit begleitenden und mit gleichem Motto wie diese versehenen Briefes ergab als Verfasser der Arbeit

Herrn Dr. FRIEDRICH POCKELS, Privatdocenten der Physik in Göttingen.

Die Gesellschaft stellt folgende neue Preisaufgabe:

„Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften wünscht eine anatomische Untersuchung und Beschreibung der Körperhöhlen (Schädel-, Brust-, Bauch- und Beckenhöhle) des neugeborenen Kindes und ihres Inhaltes im Vergleich mit demjenigen des Erwachsenen. Sie wünscht, daß die Art und Weise, wie sich die eine Form in die andere umbildet, thunlichst berücksichtigt werde“.

Die zur Bewerbung um den Preis bestimmten Arbeiten müssen ohne Nennung des Verfassers, mit einem Kennspruche versehen, vor dem 1. Februar 1897 an die Königliche Gesellschaft der Wissen-

schaften eingeliefert werden und von einem versiegelten Brief begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Verkündigung des Urtheils über die eingegangenen Arbeiten erfolgt in der öffentlichen Sitzung des Sommersemesters 1897. — Der Preis beträgt 500 Mark.

Die für das Jahr 1894 gestellte Aufgabe ist in den Nachrichten von d. K. G. d. W. 1892 pg. 577, die für 1895 gestellte in den Nachrichten 1893 pg. 173 abgedruckt.

Sitzung am 21. October.

J. Thomae in Jena: **Ueber die Differenzirbarkeit eines Integrales nach der obern Grenze.**

Ueber die Differenzirbarkeit eines Integrales nach der obern Grenze.

Von

J. Thomae in Jena.

Ist $f(x)$ eine zwischen den Grenzen $a \dots b$ integrabele Function, und existirt für einen Werth c von x zwischen a und b $f(c+0)$ nicht, so fragt es sich, ob die Function

$$w(x) = \int_a^x f(x)dx$$

an der Stelle c einen vorwärts genommenen Differentialquotienten besitze, oder nicht. Da im Allgemeinen der vorwärts genommene Differentialquotient von $w(x)$ gleich $f(x+0)$ ist, so liegt der Schluß nahe, daß dieser Diefferentialquotient an der Stelle c nicht vorhanden sei. Diese Folgerung ist von mir in der Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale (Halle 1875) wirklich gemacht, und da dieselbe Behauptung in der kürzlich erschienenen Uebersetzung von Dini's Grundlagen der Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe (Leipzig 1892) auf Seite 368 sich auch noch vorfindet, so scheint es auch spätern Bearbeitern dieses Gegenstandes entgangen zu sein, daß dieser Satz nicht allgemein richtig ist. Es kann vielmehr $w(x)$ an der Stelle c einen vorwärtigen Differentialquotienten besitzen nicht nur wenn $f(x+h)$

für abnehmende h in endlichen Grenzen enthalten ist, sondern, die Integrabilität natürlich immer vorausgesetzt, selbst dann, wenn unter den absolut genommenen Werthen von $f(c+h)$ für abnehmende h solche vorhanden sind, die über alle Grenzen hinausgehen.

Es sei $f(x)$ eine zwischen a und b integrabele Function für die $f(c+h)$ bei abnehmenden h sich keinem bestimmten Werthe nähert, für die aber

$$\int_c^{c+h} \frac{f(x)}{x-c}\,dx = \lim_{h'=0} \int_{c+h'}^{c+h} \frac{f(x)}{x-c}\,dx$$

einen bestimmten Werth hat, und es sei $w(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, so hat $w(x)$ an der Stelle c einen bestimmten vorwärtigen Differentialquotienten.

Wird zur Abkürzung $f(x):(x-c) = \varphi(x)$ gesetzt, und $c+h < b$ angenommen, so hat man

$$\frac{w(c+h)-w(c)}{h} = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_c^{c+h}(x-c)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{h}\lim_{h'=0}\int_{c+h'}^{c+h}(x-c)\,\varphi(x)\,dx.$$

Da $x-c$ in der Intervalle von $c+h'$ bis $c+h$ monoton ist, so kann man unter Anwendung der sogenannten zweiten, du Bois-Reymond'schen, Mittelwerthsatzes schreiben

$$\int_{c+h'}^{c+h}(x-c)\,\varphi(x)\,dx = h'\int_{c+h'}^{c+h''}\varphi(x)\,dx + h\int_{c+h''}^{c+h}\varphi(x)\,dx,$$

worin h'' zwischen h' und h liegt. Aus der Annahme der Existenz des Integrales $\int_c^{c+h}\varphi(x)\,dx$ folgt, daß die Integrale

$$\int_{c+h'}^{c+h''}\varphi(x)\,dx,\quad \int_{c+h''}^{c+h}\varphi(x)\,dx$$

absolut genommen bestimmte obere Grenzen besitzen, und es ist mithin

$$\lim_{h'=0}\left\{h'\int_{c+h'}^{c+h}\varphi(x)\,dx + h\int_{c+h''}^{c+h}\varphi(x)\,dx\right\} = h\int_{c+h''}^{c+h}\varphi(x)\,dx$$
$$\frac{w(c+h)-w(c)}{h} = \int_{c+h''}^{c+h}\varphi(x)\,dx,\ h'' \leqq h.$$

Die Forderung der Existenz des Integrales $\int_c^{c+h}\varphi(x)\,dx$ besagt, daß für abnehmende h und damit abnehmende h'' das Integral $\int_{c+h''}^{c+h}\varphi(x)\,dx$ dem Grenzwerthe Null zustrebe, woraus folgt, daß

$$\lim_{h=0}\frac{w(c+h)-w(c)}{h} = \lim_{h=0}\int_{c+h''}^{c+h}\varphi(x)\,dx = 0$$

sei, daß also der vorwärts genommene Differentialquotient von $w(x)$ an der Stelle c den Werth Null habe.

Die Annahme, daß $\int_c^{c+h}\varphi(x)\,dx$ existire, ist noch eine zu enge, sie läßt sich durch die folgende ersetzen. Ist $f(x) = g(x)+h(x)$ im Intervalle c bis $c+h$, und ist $g(x)$ eine Function für die $g(c+0)$ existirt, $h(x)$ eine Function für die das Integral $\int_c^{c+h}(h(x):(x-c))\,dx$ einen Sinn hat, so besitzt die Function $w(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ an der Stelle c einen vorwärtigen Differentialquotienten, dessen Werth $g(c+0)$ ist.

Die Sache mag durch ein paar Beispiele illustrirt werden. — Ist $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $c = 0$, und wird $f(0)$ irgend einem endlichen Werthe gleichgesetzt, so besitzt das Integral

$$w(x) = \int_{-a}^{x}\cos\frac{1}{x}\,dx$$

an der Stelle $x = 0$ vorwärts einen Differentialquotienten dessen Werth gleich Null ist. — Es ist nämlich

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{x} - \frac{dx\sin\frac{1}{x}}{dx}$$

und also

$$\int_\delta^x\varphi(x)\,dx = \int_\delta^x\sin\frac{1}{x}\,dx + \delta\sin\frac{1}{\delta} - x\sin\frac{1}{x}.$$

und wenn man mit δ zur Grenze Null übergeht

$$\int_0^x\varphi(x)\,dx = \int_0^x\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx = \int_0^x\sin\frac{1}{x}\,dx - x\sin\frac{1}{x},$$

es hat demnach dies Integral ein wohl bestimmten Werth. Der vorwärts genommene Differentialquotient von

$$w(x) = \int_{-a}^{x} \cos\frac{1}{x}\,dx$$

hat an der Stelle $x = 0$ den Werth

$$\lim_{h=0}\int_{h'}^{h}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx = \lim_{h=0}\left\{\int_{h''}^{h}\sin\frac{1}{x}\,dx + h''\sin\frac{1}{h''} - h\sin\frac{1}{h}\right\},$$

$(h'' < h)$, und dieser Grenzwerth ist Null. Durchsichtiger wird die Sache, wenn wir das Beispiel dahin abändern, daß wir

$$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

setzen, denn dann ist

$$\int_{-a}^{x} f(x)\,dx = x^2\sin\frac{1}{x} + \text{Const.}$$

und es ist unmittelbar ersichtlich, daß diese Function an der Stelle $x = 0$ den Differentialquotienten Null besitzt.

Wird $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}$ gesetzt, so schwankt $f(x)$ für positive Werthe von x die gegen Null convergiren zwischen Werthen hin und her, die ihrem absoluten Betrage nach kurz zu reden in unendlich hoher Ordnung unendlich groß werden. Durch Differentiation der Function $x^2\cos e^{\frac{1}{x}}$ erkennt man, daß diese Function eine Integration über die Stelle Null hinweg zuläßt. Setzt man

$$w(x) = \int_{-a}^{x} e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx,$$

so hat diese Function an der Stelle $x = 0$ den vorwärtigen Differentialquotienten Null. Es existirt nämlich das Integral

$$\int_0^x \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^x \frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx = x\cos e^{\frac{1}{x}} - \int_0^x \cos e^{\frac{1}{x}}\,dx$$

und hat für abnehmende x den Werth Null.

In den gegebenen Beispielen wechselt die Function $\varphi(x)$ zwischen c und $c+h$ unendlich oft ihr Zeichen, daß aber an diesen Umstand die Existenz des Integrales $\int\varphi(x)\,dx$ nicht gebunden ist, ist bekannt.

Das Integral

$$w(x) = \int_0^x \left((1-\varepsilon)x^{-\varepsilon}\cos\frac{1}{x} + x^{-1-\varepsilon}\sin\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int_0^x d\left(x^{1-\varepsilon}\cos\frac{1}{x}\right) = x^{1-\varepsilon}\cos\frac{1}{x},$$

in dem ε eine positive Zahl kleiner als Eins ist, besitzt an der Stelle $x = 0$ keinen vorwärts genommenen Differentialquotienten.

Jena im Oktober 1893.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli 1893.

(Fortsetzung.)

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa 1893. No. 181. Firenze. 8°.

Memorie della R. Accademia delle scienze dell' istituto di Bologna. Ser. V. T. II. Fasc. 1. 2. 3. 4. Bologna 1892. 4°.

Società r. di Napoli. Atti della r. Accademia d. scienz. fis. e matemat. Ser. II. Vol. V. Napoli 1893. 4°.

Rendiconto dell' Accad. d. scienz. fis. e mat. (Sezione d. soc. r. di Napoli). Ser. 2. Vol. VII. fasc. 6 e 7. Napoli 1893. 4°.

(Portugal).

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publ. pelo F. Gomes Teixeira. Vol. XI. No. 4. Coimbra 1893. 8°.

(Dänemark).

Oversigt over det kongl. dansk. Vidensk. Selsk. Forhandlinger. 1892. No. 3. 1893. No. 7. Kjøbenhavn. 8°.

Vidensk. Selsk. Skr. 6. Raekke; naturvid. og. mat. Afd. VII. 7. 1892. histor. og filosof. Afd. I. 2 IV. 1. Kjøbenh. 4°.

(Scandinavien).

J. Mittag-Leffler, Acta mathematica. 17: 1 u. 2. Stockholm 1893. 4°.

(Russland).

Öfversigt af finska Vet. Societ. Förhandlingar. XXXIV. 1891—1892. Helsingfors 1892. 8°.

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Utgiven af finsk Vet. Societeten. 51 Heftet. Helsingfors 1892. 8°.

Fennia. 8. Helsingfors 1893. 8°.

Bulletin de la Soc. impériale des Naturalistes de Moscou. Année 1893. No. 1. Moscou 1893. 8°.

Carte géologique de la Russie d'Europe. St. Petersbourg. 6 Blatt Karten. qu. Fol. Note explicative. 8°.

(Nord-Amerika).

Johns Hopkins University Circulars. Vol. XII. No. 107. Baltimore. June 1893.

Report for the year 1892—93, presented by the board of managers of the observatory of Yale University to the President and fellows. 8°.

The Journal of comparative Neurology. Vol. III. June 1893. Granville (Ohio). 8°.
Bulletin of the New York mathematical Society. Vol. II. No. 10. New York 1893. 8°.

August 1893.

(Deutschland.)

Leopoldina. H. XXIX Nr. 11—12.
F. Beilstein, Handbuch d. organ. Chemie. Aufl. 3. Lief. 24. Hamburg und Leipzig. 1893.
Abhandlungen d. Kgl. pr. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. A. d. Jahre 1892. 4°.
Sitzungsberichte d. Kgl. pr. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. XXXVII. XXXVIII. Berlin 1893. 8°.
Verhandlungen d. histor. Vereins von Oberpfalz u. Regensburg. Bd. 45. Regensburg 1893. 8°.
Sitzungsberichte d. philos.-philol. u. d. historischen Classe d. K. b. Akademie d. Wissenschaften. 1893. Heft II. München 1893. 8°.
Zeitschrift d. deutsch. morgenländischen Gesellschaft. Bd. XLVII. H. II. Leipzig 1893. 8°.
Programm d. grossherz. bad. technischen Hochschule zu Karlsruhe für d. Studienjahr 1893/4. Karlsruhe 1893. 8°.
K. Keller, Der Charakter d. technischen Umwälzungen des 19. Jahrhunderts. Karlsruhe 1892. 8°.
B. Jankelwicz, Ueber das α^1—α^4-Naphthochinonchlorimid. Karlsruhe 1892. 8°.
St. Surzycki, Ueber das α-Isobutylpyridylketon. Karlsruhe 1892. 8°.
H. Tichauer, Untersuchungen über Stickstoffgehalt und Ammoniak-Ausbeute verschiedener Brennstoffe bei d. trocknen Destillation. Strassburg 1892. 8°.
O. Reinhard, Ueber das Normalamylbenzylketon u. dessen Condensation. Basel 1893. 8°.
O. Meyer, Ueber den Nachweis von Pyridinbasen in d. Teer d. Kohle von Messel b. Darmstadt. Rostock 1893. 8°.
G. Rasch, Ueber die Berechnung d. oberirdischen Zuleitung des Stromverbrauches u. d. Leitungsverluste elektrischer Bahnen. Karlsruhe 1883. 8°.
K. Fritsch, Ein neues Universalstativ für astronomische Fernrohre. 8°.

(Oesterreich Ungarn.)

Symbolae Pragenses. Festgabe d. deutsch. Ges. f. Alterthumskunde in Prag zur 42. Versammlg. deutsch. Philologen u. Schulmänner in Wien 1893. M. 2 Taf. Wien 1893. Fol.
Uebersicht über die Leistungen d. Deutschen Böhmens auf d. Gebiete d. Wissenschaft, Kunst u. Literatur im J. 1891. Herausg. von d. Ges. zur Förderung deutsch. Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen. Prag 1893. 8°.
Heinrich Gradl, Geschichte des Egerlandes (bis 1437). Prag 1893. 4°.
Meteorologische Zeitschrift 1893. Hft. 7.
Jahrbuch der K. K. geologisch. Reichsanstalt. Prag 1893. Bd. XLIII. H. 1. Wien 1893. 8°.
Jahrbücher d. K. K. Centralanstalt f. Meteorologie u. Erdmagnetismus. Prag 1891. N. F. Bd. XXVIII. Wien 1893. Fol.

(Schweiz.)

Jahrbuch f. schweizer. Geschichte herausgeg. auf Veranstaltung d. allgemein. geschichtsforsch. Ges. d. Schweiz. Zürich 1893. 8°.
Verhandlungen d. naturforsch. Gesellsch. in Basel. Bd. X. H. 1. Basel 1892. 8°.
Vierteljahrsschrift d. naturforsch. Gesellsch. in Zürich. Jhrg. 38. H. 1. Zürich 1893. 8°.
Astronomische Mittheilungen. LXXXII. 8°.

(Russland.)

Beobachtungen des tifliser physicalischen Observatoriums im Jahre 1891. Herausgegeb. von J. Mielberg. Tiflis 1893. Fol.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im tifliser physikal. Observatorium in den Jahren 1886—1887; herausgeg. von J. Mielberg. Tiflis 1883. 4°.

(Schweden.)

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal par H. Hildebrandsson. Upsal 1893. 4°.

(Italien.)

Bolletino delle pubblicazioni italiano ricevuto per diritto di stampa. 1893. Nr. 182. Firenze (Biblioteca nazionale centrale di Firenze).
Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCXC. 1893. Ser. V. Classe di scienz. mor. stor. e filol. Vol. I Part. 2a Notizie degli Scavi: Febbraio Marzo. 1893. Roma. 4°.
Atti d. R. Accad. d. Lincei. Anno CCXC. 1893. Ser. V. Rendiconti. Classe d. sc. fis. mat. e nat. Vol. II fasc. 2. 2 Sem. Fasc. 3°. 2 Sem.

(Griechenland.)

ΑΘΗΝΑ. T. 5. *Τευχ*. 2. *Αθηνησιν* 1893. 8°.

(Frankreich.)

(Ministère de l'instruction publique et des beaux arts.)
Annales du Musée Guimet. T. 22. 1892. T. 23. 24. 1893. Paris. 4°.
Annales du Musée Guimet. (Bibliothèque d'études) T. 2. Paris 1893. 8°.
Annales du Musée Guimet. Revue de l'histoire des religions. Année 13. T. XXVI. No. 2. 3. 1892. Année 14. No. 1. 2. 1893. 8°.
Cauchy, Oeuvres complètes. 1. Série. T. VIII. Paris 1893. 4°.
Bulletin de la Société des antiquaires de Picardie. Année 1892. No. 2. 3. 4. Amiens 1892. 8°.
Mémoires de l. Soc. des antiquaires d. Picardie. Documents inédits concernant la province. T. XIII. Amiens 1892. 4°.
Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 4. Sér. T. 1. 1892. T. III. Cah. 1. 1893.
Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le dpt. d. l. Gironde de Juin 1891 à Mai 1893. Bordeaux 1892. (Append. au t. III 4 Sér. d. l. Soc. d. Sc. phys. et nat. de Bordeaux.) 8°.
Académie des sciences et Lettres de Montpellier. Lettres T. IX. No. 3. 4. Sciences T. IX No. 3. Médecine T. VI. No. 2. 3. 4°.
Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe d. lettres T. 27. 1890—91. T. 28. 1892. Classe des sciences. Vol. 30. 1889—1890. Vol. 31. 1892. Sciences et lettres. Ser. 3. T. 1. 1893. 8°.
Annales de la Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. Sér. 6e. T. 2. 1889. T. 3. 1890. T. 4. 1891. T. 5. 1892. 8°.
Saint Lager, Un chapitre de grammaire à l'usage des botanistes. Paris 1892. — Note sur le carex tenax. Paris 1892. — Aire géographique de l'arabis arenosa et du crisium oleraceum. Paris 1892.
Peteaux et Saint-Lager, Description d'une nouvelle espèce d'Orobanche. 8°.
Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXI. No. 5.

(England.)

Annual Report of the Library Syndicate (Cambridge). 4°.
Nature. Vol. 48. No. 1240. 1241. 1242. 1243.
Journal of the microscopical Society. 1839. Pt. 4. London. 8°.
The Journal of the Linnean Society. Zoolog. Vol. XXIV. No. 152—154. Botany. Vol. XXIX. No. 202—204. London 1893. 8°.
The Transactions of the Linnean Society of London. 2. Ser. Zoolog. Vol. V. Pt. 8 – 10. Botany. Vol. III. Pt. 8. London 1893. 4°.
List of the Linnean Society. London 1892. 8°.
Proceedings of the R. Society. Vol. LIII. No. 325. 1893. 8°.

(Holland.)

Tijdschrift voor indische Taal-Land- en Volkenkunde. Deel XXXV. Aflev. 5 en 6. Deel XXXVI. Aflev. 3. Batavia en s'Haage. 1893. 8°.
Notulen van de algemeene en bestuursvergaderingen van het bataviaasch genootschap van Kunsten en Wetenschapen. Deel XXX. 1892. Aflev. IV. Batavia 1893. 8°.

(Belgien.)

Bulletin de l'Academ. roy. d. scienc., d. lettr. et des beaux-arts. 63 année, Ser. 3. T. 25. No. 6. 7. Bruxelles 1893.

Programme de concours pour l'année 1894. 8°.

(Japan.)

Mittheilungen d. deutschen Ges. f. Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tokio. 51. Heft. Mit 13 Taf. Tokio 1893. Fol.

The journal of the college of Science, imperial University Japan. Vol V. Pt. IV. Tokio 1893. 8°.

(Australien.)

Annual Report of the Department of mines and agriculture, New South Wales, for the year 1892. Sydney 1893. Fol.

Transactions of the royal Society of South Australia. Vol. XVI. Pt. II. Vol. XVII. Pt. I. Adelaide 1893. 8°.

Proceedings of the r. Society of Victoria. New Ser. Vol. IV. Pt. II. Melbourne 1892. 8°.

(Amerika U. St.)

Bulletin of the Museum of comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXIV. 4. 5. Cambridge 1993.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology at Harward College. Vol. XIV. No. 3. Cambridge 1893. 4°.

Bulletin of the american geographical Society. Vol. XXV. No. 2. June 30. 1893. New York. 8°.

Memoirs of the american Academy of arts and Sciences. Vol. XII. No. 1. Cambridge 1893. 4°.

Proceedings of the american Academy of arts and sciences. New Ser. Vol. XIX. Boston 1893. 8°.

Proceedings of the american philosoph. Society. Vol. XXXI. No. 140. 8°.

Proceedings of the Rochester Academy of Science. Vol. II. Brochure I. Rochester 1892. 8°.

Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia 1893. Pt. I. Philadelphia 1893. 8°.

Missouri botanical Garden. Fourth annual report. St. Louis, Mo. 1893. 8°.

Proceedings of the U. St. National Museum. Vol. XIV. 1891. Washingt. 1892. 8°.

Bulletin of the U. St. National Museum. No. 39. Part A-G. No. 40. Washington 1892. 8°.

(Argentinien.)

Anales de la Sociedad cientifica argentina. T. XXXV. Entreg II. III. Buenos Aires 1893. 8°.

September 1893.

(Deutschland.)

Zeitschrift f. Naturwissenschaften. Bd. 66. H. 1 u. 2. Leipzig 1893.

Leopoldina H. XXIX. No. 13. 14.

Mittheilungen der Pollichia. Jhrg. XLIX – L. No. 5 u. 6. 1892. 8°.

Deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1892. Beobachtungssystem d. Königreich Sachsen. Chemnitz 1893. Fol.

Mittheilungen d. Geschichts- u. Alterthumsforschenden Gesellschaft d. Osterlandes. Bd. X. H. 3. Altenburg 1893. 8°.

Sitzungsberichte d. math. physical. Classe d. k. b. Akadem. d. Wiss. zu München 1893. H. 2.

Verhandlungen der vom 27. Septemb. — 7. Octob. 1892 in Brüssel abgehaltenen 10. allgemeinen Conferenz d. internationalen Erdmessung. Berlin 1893. 4°.

Rapport sur les triangulations présentés à la 10ème conférence générale à Bruxelles en 1892 par le général A. Ferrero. 4°.

Jahrbücher d. kgl. Akadem. gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt. N. F. Bd. XIX. Erfurt 1893. 8°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XXII. Jhrg. 1890. H. 3. Berlin 1893. 8°.

Fr. Hultsch, die erzählenden Zeitformen bei Polybios. Abhdl. d. philol. histor. Cl. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIV. No. 1. 1893.
F. Beilstein, Handbuch der organischen Chemie. 3. Auflage. Bd. I. Liefer. 25. Hamburg u. Leipzig 1893. 8°.
Archiv des historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg. Würzburg. Bd. 34. 1891. Bd. 35 1892. 8°.
Jahresbericht d. histor. Ver. von Unterfranken u. Aschaffenburg für 1890. 1891. Würzburg 1891. 1892. 8°.
Siebzigster Jahres-Bericht d. schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1893. 8°.
J. Partsch, Litteratur der Landes- und Volkskunde der Provinz Schlesien. Hft. 2. Breslau 1893. 8°.
Abhandlg. d. math. phys. Classe d. k. Gesellsch. d. Wiss. in Leipzig. Bd. XX. No. II. Leipzig 1893. 8°.

(Oesterreich-Ungarn.)

Ungarische Revue. Jhrg. 13. H. VI—VII. 1893.
Meteorolog. Zeitschrift. 1893. Heft 8. 9.
Mathemat. und naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. II. 1. Hälfte. Berlin und Budapest 1893. 8°.
Mittheilungen d. naturw. Vereins für Steiermark. Jhrg. 1892. Graz 1893. 8°.
Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt. No. 6—10. 1893. 8°.
Anzeiger d. Akademie d. Wissenschaften in Krakau. 1893. Juli. Krakau. 8°.

(Schweiz.)

Vierteljahrsschrift d. naturf. Gesellsch. in Zürich. Jhrgg. 38. H. 2. Zürich 1893. 8°.
Jahresbericht d. naturforsch. Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. Bd. XXXVI. Chur 1893. 8°.

(England.)

Nature. No. 1244. 1245. 1246. 1247. 1248.
Proceedings of the London mathem. Society. Vol. XXIV. No. 460—468.
Philosophical Transactions of the royal Society. Vol. 183. A. B. London 1893. 4°.
The royal Society. 30th November 1892. 4.

(Schweden.)

K. Schwedische Akademie der Wissenschaften. Stockholm.
Handlingar Bd. 22: 1—2, 1886/87. 23: 1—2 1888/89. 24: 1—2 1890/1. 4°.
Bihang til . . . Handlingar Bd. 14, 1—4. Bd. 15, 1—4, Bd. 16, 1—4. Bd. 17, 1—4. 8°.
Öfversigt af . . . Förhandlingar. Årg. 46—49. År. 1889—1892. 8°.
Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. Bd. 27—30. 1885—1888. 4°.
Lefnadsteckningar Bd. 3. H. 1. 1891. 8°.
Observations faites au Cap Thordsen, Spitzberg. T. I 1891. T. II 1887. 4°.
Carl Wilh. Scheeles bref och anteckninger. 1892. 4°.
Mitglieder-Verzeichnis 1890—93. 8°.
Nova Acta regiae Societatis Upsaliensis. Ser. III. Vol. XV. Fasc. I. 1892. 4°.

(Italien.)

Bolletino delle pubblicazioni italiane. 1893. No. 183. 184. 185. 8°.
Rendiconti della r. Accadem. dei Lincei. Cl. d. sc. moral. stor. e filolog. Ser. V. Vol. II. Fasc. 6.
Atti della r. Accad. dei Lincei. Anno CCXC. 1893. Ser. V. Cl. d. sc. mor. stor. e filol. Vol. I. Pt. 2. Notizie degli Scavi. Aprile 1893.
Atti d. r. Accad. dei Lincei Anno CCXC. Ser. V. Rendiconti. Cl. d. sc. fis. matem e. nat. Vol. II. Fasc. 4°. Fasc. 5°. 2. Sem.

Inhalt von Nr. 18:

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

13. December. № 19. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 18. November.

v. Wilamowitz, Ueber die Hekale des Kallimachos.

Kielhorn macht Mittheilungen über einige neu aufgefundene Kupferplatten mit indischen Inschriften.

Weber, Ueber den Temperaturausgleich zwischen zwei sich berührenden heterogenen Körpern.

— legt vor: Dr. Fricke, Ueber indefinite quadratische Formen mit drei und vier Veränderlichen.

Wallach, Ueber das Verhalten cyclischer Oxime.

Weiland legt als Director des Verwaltungsrathes der Wedekindschen Preisstiftung den Bericht des Herrn Dr. Schwalm über den Stand der Ausgabe der Chronik Hermann Korners vor.

Ueber indefinite quadratische Formen mit drei und vier Veränderlichen.

Von

Robert Fricke in Göttingen.

Es ist ein neuerdings mehrfach behandelter Ansatz, die indefiniten quadratischen Formen zur Gewinnung von Gruppen heranzuziehen, die man für die Theorie der automorphen Functionen

verwerten kann. Die ternären Formen liefern dabei sogen. Hauptkreisgruppen, die quaternären Formen Polyedergruppen der von Poincaré in Bd. 3 der Acta mathematica eingeführten Art. Es sind die ganzzahligen ternären bez. quaternären Substitutionen der Determinante 1 einer solchen Form in sich, welche, einer charakteristischen Transformation unterworfen, Gruppen lineargebrochener Substitutionen einer Veränderlichen ζ ergeben. Für die Transformation einer (nicht notwendig ganzzahligen) indefiniten quadratischen Form in sich liegen in der Literatur mehrfache Ansätze vor, so von Hermite und Cayley, wobei es sich aber keineswegs einzig um ganzzahlige Substitutionen handelt. Der Zusammenhang der ternären Formen mit den Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen ζ und also mit den automorphen Functionen wurde zuerst von Poincaré behandelt. In einer ausführlichen bezüglichen Publication Poincaré's (Liouville's Journal von 1887) findet sich der Satz entwickelt, daß Formen, die aus einander durch ganzzahlige Transformation einer beliebigen Determinante hervorgehen, commensurabele Gruppen liefern, d. h. solche Gruppen, die mit einander eine Untergruppe von endlichem Index gemein haben. Nun läßt sich jede ternäre indefinite ganzzahlige quadratische Form durch eine numerisch rationale lineare Substitution auf die Gestalt bringen:

$$f(z_1, z_2, z_3) = pz_1^2 - qz_2^2 - rz_3^2, \tag{1}$$

wobei p, q, r positive Zahlen ohne quadratischen Teiler sind, und wo keine zwei unter diesen drei ganzen Zahlen einen Factor gemeinsam haben. Faßt man demnach alle Gruppen, die entweder direct commensurabel sind oder durch Transformation commensurabel werden, in eine Gattung zusammen und repräsentirt jede Gattung durch eine Gruppe, so darf man sich auf die Betrachtung von Formen der Gestalt (1) beschränken. Im quaternären Falle kann man durch eine entsprechende Transformation die Gestalt:

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = pz_1^2 + qz_2^2 + rz_3^2 - sz_4^2 \tag{2}$$

erhalten, und ich setze auch hier voraus, daß p, q, r, s, positive ganze Zahlen ohne quadratischen Teiler sind, und daß keine zwei unter diesen Zahlen einen Teiler gemein haben, welch' letzteres, wie es scheint, eine Einschränkung bedeutet. Ueberdies soll zur Vereinfachung der nachfolgenden Betrachtungen angenommen werden, daß die Zahlen p, q, r, s ungerade sind. Es soll dann im folgenden aufgewiesen werden,

welches das arithmetische Bildungsgesetz für die Gruppe der ζ-Substitutionen ist, die einmal der Form (1) sodann der Form (2) entspricht. Es ist dabei zweckmäßig, nicht von den allgemeinen Cayley'schen Ansätzen zur Transformation der Form $f(z_i)$ in sich auszugehen, sondern die fraglichen Substitutionen gleich in einer derartigen Form zu schreiben, daß die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der ζ- Substitution dabei zur unmittelbaren Verwendung kommen. —

I.

Für die specielle Form $(y_1 y_3 - y_2^2)$ ist es leicht, die allgemeine Gestalt für die Substitutionen der Form in sich anzugeben. Unter Benutzung der sogleich als unimodular fixirten ζ- Substitution:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{3}$$

bez. ihrer Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kommt man dabei zu einem sehr bekannten, in der Arithmetik häufig verwendeten Schema, das hier der Kürze halber nicht reproducirt wird. Durch:

$$y_1 = z_1\sqrt{p} + z_3\sqrt{r}, \quad y_2 = z_2\sqrt{q}, \quad y_3 = z_1\sqrt{p} - z_3\sqrt{r}$$

geht man zur Form (1) zurück, und für die Substitution:

$$z_i' = \alpha_{i1} z_1 + \alpha_{i2} z_2 + \alpha_{i3} z_3$$

derselben in sich gelangt man durch Ausübung der angedeuteten irrationalen Transformation zu folgender allgemeinen Gestalt der neun Coëfficienten α_{ik}:

$$\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2), & \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}(\alpha\beta+\gamma\delta), & \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{p}}(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2) \\ \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}(\alpha\gamma+\beta\delta), & \alpha\delta+\beta\gamma, & \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}(\alpha\gamma-\beta\delta) \\ \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{r}}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2), & \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}(\alpha\beta-\gamma\delta), & \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2) \end{matrix}\right) \tag{4}$$

Es gilt nun, die vier reellen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Uebereinstimmung mit (3) in allgemeinster Weise derart zu bestimmen, daß die neun Größen α_{ik} des Schemas (4) rationale ganze Zahlen werden.

Aus den vier Gleichungen:

(5) $\alpha_{11}+\alpha_{33}=\alpha^2+\delta^2,\quad \alpha_{22}+1=2\alpha\delta,\quad \alpha_{11}-\alpha_{33}=\beta^2+\gamma^2,\quad \alpha_{22}-1=2\beta\gamma$

ist zu entnehmen, daß $(\alpha\pm\delta)$ und $(\beta\pm\gamma)$ Quadratwurzeln aus ganzen rationalen Zahlen sind. Man schreibe daraufhin:

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha+\delta = a_1\sqrt{\pi_1}\sqrt{\sigma}, & \beta-\gamma = a_3\sqrt{\pi_3}\sqrt{\tau}, \\ \alpha-\delta = a_2\sqrt{\pi_2}\sqrt{\sigma}, & \beta+\gamma = a_4\sqrt{\pi_4}\sqrt{\tau}, \end{cases}$$

und zwar kann man erreichen, daß unter den ganzen Zahlen a_i, σ, τ, π_i die σ, τ, π_i positiv und ohne quadratischen Teiler sind, und daß einmal unter den drei Zahlen σ, π_1, π_2, sodann unter τ, π_3, π_4 keine zwei einen gemeinsamen Teiler aufweisen. Sind die vier Zahlen (6) alle von Null verschieden, so sind mit α, β, γ, δ auch alle a_i, π_i, σ, τ eindeutig bestimmt; dieser Fall soll jetzt vorerst vorausgesetzt sein. Die gesuchte ζ- Substitution hat dann die Gestalt:

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} \dfrac{a_1\sqrt{\pi_1}+a_2\sqrt{\pi_2}}{2}\sqrt{\sigma}, & \dfrac{a_3\sqrt{\pi_3}+a_4\sqrt{\pi_4}}{2}\sqrt{\tau} \\ \dfrac{-a_3\sqrt{\pi_3}+a_4\sqrt{\pi_4}}{2}\sqrt{\tau}, & \dfrac{a_1\sqrt{\pi_1}-a_2\sqrt{\pi_2}}{2}\sqrt{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der hier auftretenden Zahlen π_i, σ, τ benutze man die beiden Gleichungen:

$$\alpha_{31}r+\alpha_{13}p = (\alpha^2-\delta^2)\sqrt{pr} = a_1a_2\sigma\sqrt{\pi_1\pi_2\cdot pr},$$
$$\alpha_{31}r-\alpha_{13}p = (\beta^2-\gamma^2)\sqrt{pr} = a_3a_4\tau\sqrt{\pi_3\pi_4\cdot pr}.$$

Da hier linker Hand beide Male von Null verschiedene rationale ganze Zahlen stehen, so folgt als Identität:

$$(8)\qquad \pi_1\pi_2 = \pi_3\pi_4 = pr$$

aus dem Umstande, daß π_1 gegen π_2, π_3 gegen π_4, p gegen r relativ prim ist; wir setzen daraufhin:

$$(9)\qquad \pi_i = p_ir_i,\qquad p = p_1p_2 = p_3p_4,\qquad r_4 = r_1r_2 = r_3r_4,$$

wo es sich hier um gewisse vier Zerlegungen der Zahlen p und r in ganzzahlige Factoren handelt.

Man hat weiter mit Rücksicht auf (4) als Identitäten:

$$(a_1a_4\sqrt{\pi_1\pi_4}\pm a_2a_3\sqrt{\pi_2\pi_3})\sqrt{\sigma\tau} = \left(\frac{\alpha_{12}}{q}\right)\sqrt{pq}, = \left(\frac{\alpha_{21}}{p}\right)\sqrt{pq},$$

wobei man leicht bemerkt, daß α_{12} durch q, α_{21} durch p teilbar ist, da linker Hand ganze algebraische Zahlen stehen. Nun können jedenfalls nicht beide Zahlen α_{12} und α_{21} verschwinden, weil dies das Verschwinden einer der Zahlen a_i zur Folge hätte. Dann aber folgt aus der letzten Identität, unter m und n ganze rationale Zahlen verstanden:

$$\pi_1 \pi_4 \sigma\tau = p_1 p_4 \cdot r_1 r_4 \cdot \sigma\tau = m^2 \cdot pq,$$

$$\pi_2 \pi_3 \sigma\tau = p_2 p_3 \cdot r_2 r_3 \cdot \sigma\tau = n^2 \cdot pq,$$

und hier gilt nun folgende Ueberlegung: r_1 als Teiler von $\pi_1\pi_2$ und $\pi_3\pi_4$ ist prim gegen $\sigma\tau$; da aber r_1 auf der rechten Seite der vorletzten Gleichung nur in m aufgehen kann, so wird jeder Primteiler von r_1 auch links noch einmal, nämlich in r_4 vorkommen. Man gelangt durch Fortsetzung dieses Schlußverfahrens zu dem Ergebnis:

$$p_1 = p_3, \qquad p_2 = p_4, \qquad r_1 = r_4, \qquad r_2 = r_3.$$

Wie man durch Berechnung der Determinante von (7) erfährt, können σ und τ nur die gemeinsamen Factoren 1 oder 2 haben. Ist demnach $q_1 q_2$ eine Zerlegung von q in zwei Factoren, so hat man zu schreiben $\sigma = q_1$, $\tau = q_2$ oder $\sigma = 2q_1$, $\tau = 2q_2$. Man gewinnt daraufhin die beiden Typen von Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1\sqrt{p_1 r_1} + a_2\sqrt{p_2 r_2}}{2}\sqrt{q_1}, & \frac{a_3\sqrt{p_1 r_2} + a_4\sqrt{p_2 r_1}}{2}\sqrt{q_2} \\ \frac{-a_3\sqrt{p_1 r_2} + a_4\sqrt{p_2 r_1}}{2}\sqrt{q_2}, & \frac{a_1\sqrt{p_1 r_1} - a_2\sqrt{p_2 r_2}}{2}\sqrt{q_1} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1\sqrt{p_1 r_1} + a_2\sqrt{p_2 r_2}}{\sqrt{2}}\sqrt{q_1}, & \frac{a_3\sqrt{p_1 r_2} + a_4\sqrt{p_2 r_1}}{\sqrt{2}}\sqrt{q_2} \\ \frac{-a_3\sqrt{p_1 r_2} + a_4\sqrt{p_2 r_1}}{\sqrt{2}}\sqrt{q_2} & \frac{a_1\sqrt{p_1 r_1} - a_2\sqrt{p_2 r_2}}{\sqrt{2}}\sqrt{q_1} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Der noch unerledigte Fall, daß unter den Zahlen $a_1, \ldots, a_4$ eine oder mehrere verschwinden, führt auf Substitutionen, welche sich direct unter (10) bez. (11) subsumieren; doch soll dies hier nicht für alle Einzelfälle durchgeführt werden, und es mögen etwa die folgenden Bemerkungen hinreichen. Wird eine einzige der vier Größen (6) gleich Null, etwa die erste, so sind π_2 und σ

nur erst soweit bestimmt, daß $\pi_2\sigma$ festliegt. Man wolle dann in $\pi_2 = p_2 r_2$ alle Primteiler von $\pi_2\sigma$ zusammenfassen, die in pr aufgehen, so daß die übrigen, welche σ geben, prim gegen pr sind. Die Gleichung $\pi_2\pi_4 = pr$ folgt wie vorhin, und es bleibt auch:

$$p_2 p_3 r_2 r_3 \sigma\tau = n^2 pq$$

bestehen, von wo aus man dann wieder leicht $r_2 = r_3$ ect. erhält. Ebenso leicht erledigen sich die übrigen Fälle, nur daß man für $a_2 = a_4 = 0$ auch noch die Coëfficienten α_{23} und α_{32} heranzuziehen hat. —

Man nehme nun irgend drei Zerlegungen

$$(12) \qquad p = p_1 p_2, \qquad q = q_1 q_2, \qquad r = r_1 r_2$$

und bilde unimodulare Substitutionen (10), (11), so daß also

$$(13) \qquad (a_1^2 p_1 r_1 - a_2^2 p_2 r_2) q_1 + (a_3^2 p_1 r_2 - a_4^2 p_2 r_1) q_2 = 4 \text{ resp. } 2$$

erfüllt ist. Man gewinnt alsdann, wie leicht umgekehrt nachzuweisen ist, im Falle (11) unter allen Umständen ganzzahlige α_{ik}, im Falle (10) jedoch stets und nur dann, wenn für die vier ganzen Zahlen a_i die Congruenzen:

$$(14) \qquad a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \qquad (\text{mod. } 2)$$

erfüllt sind. Die Erfüllung dieser Congruenzen ist übrigens durch (13) bereits gewährleistet, falls $pq \equiv pr \equiv -1$ (mod. 4) ist. **Alle hiermit umgrenzten den verschiedenen Zerlegungen (12) entsprechenden Substitutionen (10) und (11) bilden die gesuchte Gruppe der ζ-Substitutionen.** Die Anzahl der unterschiedenen Substitutionstypen ist somit $2^{1+(p)+(q)+(r)}$, wenn wir hier symbolisch unter (n) die Anzahl der unterschiedenen Primteiler > 1 der Zahl n verstehen. Hat man drei Primzahlen p, q, r, so hat man 16 Typen, und auf diesen Fall beziehen sich die Entwicklungen des Verf. in Bd. 39 der Math. Annalen (pg. 73 ff.) und eine sich daran anschließende Mitteilung von Hrn. Kepinski im Anzeiger der Akad. der Wissenschaften in Krakau vom Juni 92.

II.

Die quaternäre Form $(y_2 y_3 - y_1 y_4)$ geht durch ∞^6 lineare Transformationen in sich über[1]), deren allgemeine Gestalt:

1) Es soll hier überall nur von sogenannten Transformationen der ersten Art die Rede sein, welche im Sinne der zugehörigen projectiven Maaßbestimmung die „Bewegungen" liefern.

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha\bar\alpha y_1 + \alpha\bar\beta y_2 + \beta\bar\alpha y_3 + \beta\bar\beta y_4\,, \\ y_2' &= \alpha\bar\gamma y_1 + \alpha\bar\delta y_2 + \beta\bar\gamma y_3 + \beta\bar\delta y_4\,, \\ y_3' &= \gamma\bar\alpha y_1 + \gamma\bar\beta y_2 + \delta\bar\alpha y_3 + \delta\bar\beta y_4\,, \\ y_4' &= \gamma\bar\gamma y_1 + \gamma\bar\delta y_2 + \delta\bar\gamma y_3 + \delta\bar\delta y_4 \end{aligned} \tag{15}$$

ist (vergl. hierzu etwa Klein, Vorles. über das Ikosaëder pg. 179); dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma, \bar\delta$ zwei Quadrupel complexer Zahlen, welche an die Bedingungen:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \bar\alpha\bar\delta - \bar\beta\bar\gamma = 1 \tag{16}$$

gebunden sein sollen. Durch die irrationale Transformation:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_4\sqrt{s} + z_3\sqrt{r}, \quad & y_2 &= z_1\sqrt{p} + iz_2\sqrt{q}, \\ y_3 &= z_1\sqrt{p} - iz_2\sqrt{q}, \quad & y_4 &= z_4\sqrt{s} - z_3\sqrt{r} \end{aligned} \tag{17}$$

geht $(y_2 y_3 - y_1 y_4)$ in die gegebene Form (2) über, und wir erhalten von (15) aus die allgemeine Gestalt der Transformationen:

$$z_i' = \alpha_{i1} z_1 + \alpha_{i2} z_2 + \alpha_{i3} z_3 + \alpha_{i4} z_4$$

der Form (2) in sich; es ist:

$$2\alpha_{11} \text{ bez. } 2\alpha_{22} = \alpha\bar\delta + \delta\bar\alpha \pm \beta\bar\gamma \pm \gamma\bar\beta\,,$$

$$2\alpha_{33} \text{ bez. } 2\alpha_{44} = \alpha\bar\alpha + \delta\bar\delta \pm \beta\bar\beta \pm \gamma\bar\gamma\,,$$

$$\frac{2\alpha_{12}\sqrt{p}}{i\sqrt{q}} \text{ bez. } \frac{2\alpha_{21} i\sqrt{q}}{\sqrt{p}} = \alpha\bar\delta - \delta\bar\alpha \mp \beta\bar\gamma \pm \gamma\bar\beta\,,$$

$$\frac{2\alpha_{34}\sqrt{r}}{\sqrt{s}} \text{ bez. } \frac{2\alpha_{43}\sqrt{s}}{\sqrt{r}} = \alpha\bar\alpha - \delta\bar\delta \pm \beta\bar\beta \mp \gamma\bar\gamma\,,$$

$$\frac{2\alpha_{13}\sqrt{p}}{\sqrt{r}} \text{ bez. } \frac{2\alpha_{24} i\sqrt{q}}{\sqrt{s}} = \alpha\bar\gamma - \delta\bar\beta \pm \gamma\bar\alpha \mp \beta\bar\delta\,,$$

$$\frac{2\alpha_{14}\sqrt{p}}{\sqrt{s}} \text{ bez. } \frac{2\alpha_{23} i\sqrt{q}}{\sqrt{r}} = \alpha\bar\gamma + \delta\bar\beta \pm \gamma\bar\alpha \pm \beta\bar\delta\,,$$

$$\frac{2\alpha_{31}\sqrt{r}}{\sqrt{p}} \text{ bez. } \frac{2\alpha_{42}\sqrt{s}}{i\sqrt{q}} = \alpha\bar\beta - \delta\bar\gamma \pm \beta\bar\alpha \mp \gamma\bar\delta\,,$$

$$\frac{2\alpha_{41}\sqrt{s}}{\sqrt{p}} \text{ bez. } \frac{2\alpha_{32}\sqrt{r}}{i\sqrt{q}} = \alpha\bar\beta + \delta\bar\gamma \pm \beta\bar\alpha \pm \gamma\bar\delta.$$

Um sechzehn reelle Zahlen α_{ik} zu gewinnen, müssen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ bez. conjugirt complex zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genommen werden; es ist alsdann die Aufgabe, vier complexe Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Determinante 1 in allgemeinster Weise derart zu bestimmen, daß die sechzehn Coëfficienten α_{ik} ganze rationale Zahlen werden. Der Lösung dieser Aufgabe senden wir zwei vorbereitende Bemerkungen voraus.

Eine ζ-Substitution hat, falls sie unimodular ist und complexe Coëfficienten besitzt, eine einzige complexe Invariante, nämlich $(\alpha+\delta)$; demzufolge muß unsere quaternäre z_i-Substitution zwei reelle Invarianten haben. Man kann als solche die Coëfficienten j_1 und j_2 der ganzen Function vierten Grades von ϱ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\varrho, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \cdot \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}-\varrho, & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \varrho^4 - j_1\varrho^3 + j_2\varrho^2 - j_3\varrho + 1$$

wählen und gewinnt insbesondere für j_2 die Definition:

$$j_2 = \sum_{i<k} (\alpha_{ii}\alpha_{kk} - \alpha_{ik}\alpha_{ki}),$$

so daß im vorliegenden Falle j_2 jedenfalls ganzzahlig wird. Um den Ausdruck von j_2 durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu finden, zieht man am besten (15) heran und findet:

$$j_2 = (\alpha+\delta)^2 + (\bar{\alpha}+\bar{\delta})^2 - 2. \tag{18}$$

Für die zwölf ganzen Zahlen α_{ik}, bei denen i von k verschieden ist, gelten die nachfolgenden zwölf Congruenzen:

$$\begin{aligned} \alpha_{i1} &\equiv 0 \pmod{p}, & \alpha_{i2} &\equiv 0 \pmod{q}, \\ \alpha_{i3} &\equiv 0 \pmod{r}, & \alpha_{i4} &\equiv 0 \pmod{s}. \end{aligned} \tag{19}$$

Man kann nämlich $4\alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta}$ durch die α_{ik} auf zwei Weisen ausdrücken und erhält durch Gleichsetzung beider Ausdrücke:

$$\frac{(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2pq + (p\alpha_{12} - q\alpha_{21})^2}{pq} = \frac{(\alpha_{33}+\alpha_{44})^2rs - (r\alpha_{34} + s\alpha_{43})^2}{rs}$$

Da pq prim gegen rs ist, so ist der gemeinsame Wert der linken und rechten Seite ganzzahlig, und da weder pq noch rs quadratische Teiler enthalten, so ist $(p\alpha_{12} - q\alpha_{21})$ durch pq und $(r\alpha_{34} - s\alpha_{43})$ durch rs teilbar, woraus vier unter den Congruenzen (19) folgen.

Die übrigen zeigt man von hier aus am kürzesten durch geeignete Transformationen der z_i.

Man führe nunmehr an Stelle der α_{ik} sechzehn neue rationale ganze Zahlen $A, B, \ldots, R$ durch die Gleichungen ein:

$$A = \alpha_{33} + \alpha_{44}, \quad C = \alpha_{11} + \alpha_{22}, \quad E = -\alpha_{33} + \alpha_{44}, \quad G = \alpha_{11} - \alpha_{22},$$

$$\begin{aligned} Brs &= r\alpha_{34} + s\alpha_{43}, & Frs &= r\alpha_{34} - s\alpha_{43}, \\ Dpq &= -p\alpha_{12} + q\alpha_{21}, & Hpq &= p\alpha_{12} + q\alpha_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J\cdot pr \text{ bez. } L\cdot pr &= \mp p\alpha_{13} + r\alpha_{31}, \\ K\cdot qs \text{ bez. } M\cdot qs &= \mp q\alpha_{24} - s\alpha_{42}, \\ N\cdot ps \text{ bez. } Q\cdot ps &= \pm p\alpha_{14} + s\alpha_{41}, \\ P\cdot qr \text{ bez. } R\cdot qr &= \pm q\alpha_{23} - r\alpha_{32}. \end{aligned}$$

Die sechzehn ganzen Zahlen $A, B, \ldots$ genügen den Congruenzen:

$$\left.\begin{matrix} A \equiv E, & B \equiv F, & C \equiv G, & D \equiv H \\ J \equiv L, & K \equiv M, & N \equiv Q, & P \equiv R \end{matrix}\right\} \pmod{2} \quad (20)$$

Sobald sechzehn ganze, die Bedingungen (20) befriedigende Zahlen $A, B, \ldots$ vorliegen, berechnen sich umgekehrt die α_{ik} ganzzahlig. Die Beziehung der $A, B, \ldots$ zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist:

$$\begin{aligned} 2\alpha\bar{\alpha} &= A + B\sqrt{rs}, & 2\beta\bar{\beta} &= E + F\sqrt{rs}, \\ 2\delta\bar{\delta} &= A - B\sqrt{rs}, & 2\gamma\bar{\gamma} &= E - F\sqrt{rs}, \\ 2\alpha\bar{\delta} &= C + iD\sqrt{pq}, & 2\beta\bar{\gamma} &= G + iH\sqrt{pq}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (\alpha+\delta)(\bar{\beta}-\bar{\gamma}) &= J\sqrt{pr} + iK\sqrt{qs}, \\ (\alpha-\delta)(\bar{\beta}+\bar{\gamma}) &= L\sqrt{pr} + iM\sqrt{qs}, \\ (\alpha+\delta)(\bar{\beta}+\bar{\gamma}) &= N\sqrt{ps} + iP\sqrt{qr}, \\ (\alpha-\delta)(\bar{\beta}-\bar{\gamma}) &= Q\sqrt{ps} + iR\sqrt{qr}. \end{aligned} \quad (22)$$

Diese Bedingungen werden nicht nur von jeder ζ-Substitution befriedigt, sondern wir haben auch stets eine gesuchte ζ-Substitution, wenn es gelingt, vier complexe Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Determinante 1 zu finden, welche die Gleichungen (21) und (22) mit ganzen, die Congruenzen (20) befriedigenden Zahlen $A, B, \ldots$ erfüllen.

Infolge (21) und 22) ist:

$$2\alpha\bar{\alpha} = A + B\sqrt{rs}, \qquad 2\delta\bar{\alpha} = C - iD\sqrt{pq},$$

$$2\beta\bar{\alpha} \text{ bez. } 2\gamma\bar{\alpha} = \left(\frac{L \pm J}{2}\sqrt{r} + \frac{N \pm Q}{2}\sqrt{s}\right)\sqrt{p} - \left(\frac{P \pm R}{2}\sqrt{r} + \frac{M \pm K}{2}\sqrt{s}\right) i\sqrt{q}$$

sowie andrerseits:

$$2\delta\bar{\delta} = A - B\sqrt{rs}, \qquad 2\alpha\bar{\delta} = C + iD\sqrt{pq},$$

$$2\gamma\bar{\delta} \text{ bez. } 2\beta\bar{\delta} = \left(-\frac{L \pm J}{2}\sqrt{r} + \frac{N \pm Q}{2}\sqrt{s}\right)\sqrt{p} - \left(\frac{P \pm R}{2}\sqrt{r} - \frac{M \pm K}{2}\sqrt{s}\right) i\sqrt{q}.$$

Mit Rücksicht auf (16) ergiebt sich hieraus

$$4\bar{\alpha}^2 \text{ bez. } 4\bar{\delta}^2 = A' \pm B'\sqrt{rs} \mp i\sqrt{pq}(C' \pm D'\sqrt{rs}),$$

wo A', B', C', D' vier neue ganze Zahlen sind; die Summe $(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \delta^2 + \bar{\delta}^2)$ ist demnach eine rationale ganze Zahl. Nun folgt aus der Ganzzahligkeit von j_2 sowie aus (21), daß auch

$$2\alpha\delta + 2\bar{\alpha}\bar{\delta}, \qquad 2\alpha\bar{\alpha} + 2\delta\bar{\delta}, \qquad 2\alpha\bar{\delta} + 2\delta\bar{\alpha}$$

ganze rationale Zahlen sind, und also ergiebt sich dasselbe für die vier Ausdrücke

$$(\alpha \pm \bar{\alpha} + \delta \pm \bar{\delta})^2, \qquad (\alpha \pm \bar{\alpha} - \delta \mp \bar{\delta})^2.$$

Ein gleicher Ansatz gilt für β und γ, wie man mit Hülfe der bisherigen Angaben, sowie der Identität:

$$4\,(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \delta^2 + \bar{\delta}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2 + \gamma^2 + \bar{\gamma}^2$$

leicht bestätigt.

Durch das Bisherige ist die Möglichkeit geboten, im quaternären Falle einen den Formeln (6) entsprechenden Ansatz zu machen; man hat in der That zu schreiben:

$$(23)\quad \begin{aligned} \alpha + \bar{\alpha} + \delta + \bar{\delta} &= a_1\sqrt{\pi_1}\sqrt{\sigma}, & \alpha - \bar{\alpha} - \delta + \bar{\delta} &= i a_3\sqrt{\pi_3}\sqrt{\tau}, \\ \alpha + \bar{\alpha} - \delta - \bar{\delta} &= a_2\sqrt{\pi_2}\sqrt{\sigma}, & \alpha - \bar{\alpha} + \delta - \bar{\delta} &= i a_4\sqrt{\pi_4}\sqrt{\tau}, \\ \beta + \bar{\beta} + \gamma + \bar{\gamma} &= b_1\sqrt{\pi_1'}\sqrt{\sigma'}, & \beta - \bar{\beta} - \gamma + \bar{\gamma} &= i b_3\sqrt{\pi_3'}\sqrt{\tau'}, \\ \beta + \bar{\beta} - \gamma - \bar{\gamma} &= b_2\sqrt{\pi_2'}\sqrt{\sigma'}, & \beta - \bar{\beta} + \gamma - \bar{\gamma} &= i b_4\sqrt{\pi_4'}\sqrt{\tau'}. \end{aligned}$$

Wie früher sind die a, b, π, σ, τ ganze Zahlen und die π, σ, τ haben keine quadratische Teiler; zudem haben keine zwei unter den drei Zahlen π_1, π_2, σ und π_1', π_2', σ' ect. einen Teiler gemein. Die gegebene Darstellung der acht Zahlen (23) ist eindeutig bestimmt, sofern dieselben alle von Null verschieden sind; letzteres gelte zuvörderst als Voraussetzung.

Aus (23) folgt:

$$\begin{aligned} +a_1 a_2 \sigma \sqrt{\pi_1 \pi_2} &= (\alpha+\bar{\alpha})^2-(\delta+\bar{\delta})^2 = (2B+B')\sqrt{rs}, \\ -a_3 a_4 \tau \sqrt{\pi_3 \pi_4} &= (\alpha-\bar{\alpha})^2-(\delta-\bar{\delta})^2 = (-2B+B')\sqrt{rs}, \\ i\, a_1 a_3 \sqrt{\pi_1 \pi_3 \sigma\tau} &= (\alpha+\bar{\delta})^2-(\bar{\alpha}+\delta)^2 = i(2D+C')\sqrt{pq}. \end{aligned} \tag{24}$$

Die ersten beiden Gleichungen zeigen, daß $\pi_1\pi_2$ und $\pi_3\pi_4$ mit rs identisch sind, und man setze demgemäß wie früher:

$$\pi_i = r_i s_i, \qquad r = r_1 r_2 = r_3 r_4, \qquad s = s_1 s_2 = s_3 s_4. \tag{25}$$

Zufolge der dritten Gleichung ist alsdann, wenn σ und τ den größten gemeinsamen Teiler t haben und $t\sigma_0$, $t\tau_0$ für σ bez. τ geschrieben wird:

$$r_1 r_3 \cdot s_1 s_3 \cdot \sigma_0 \tau_0 = m^2 \cdot pq. \tag{26}$$

Hieraus folgt nothwendig $r_1 = r_3$ und $s_1 = s_3$, da $\sigma\tau$ prim gegen rs ist und rechter Hand in erster Potenz nur die Primteiler von p und q auftreten; es ist somit $\pi_1 = \pi_3$ und $\pi_2 = \pi_4$. Eine weitere Folge der letzten Gleichung ist alsdann:

$$\sigma = tp_1 q_1, \qquad \tau = tp_2 q_2, \qquad p = p_1 p_2, \qquad q = q_1 q_2.$$

Um eine entsprechende Ueberlegung für π'_i, σ', τ' durchzuführen, verificiere man zuvörderst die Gleichung:

$$4\beta^2 \text{ bez. } 4\gamma^2 = A'' \pm B''\sqrt{rs} \pm i\sqrt{pq}\,(C'' \pm D''\sqrt{rs}),$$

wobei A'', . . ganze Zahlen sind. Man hat alsdann, wie soeben:

$$\begin{aligned} &r = r'_1 r'_2, \quad s = s'_1 s'_2, \quad \pi'_1 = \pi'_3 = r'_1 s'_1, \quad \pi'_2 = \pi'_4 = r'_2 s'_2, \\ &p = p'_1 p'_2, \quad q = q'_1 q'_2, \quad \sigma' = t' p'_1 q'_1, \qquad \tau' = t' p'_2 q'_2, \end{aligned}$$

wobei unter t' der größte gemeinsame Teiler von σ' und τ' verstanden ist.

Da $a_i \gtrless 0$ und $b_i \gtrless 0$ ist, so kann keiner der Factoren auf den linken Seiten von (22) verschwinden. Somit werden z.B. die Zahlen N und P nicht zugleich verschwinden. Nun ist

$$\begin{aligned} a_1 b_1 \sqrt{\pi_1 \pi'_1 \sigma\sigma'} + a_4 b_4 \sqrt{\pi_2 \pi'_2 \tau\tau'} &= 4N\sqrt{ps}, \\ a_4 b_1 \sqrt{\pi'_1 \pi_2 \sigma' \tau} - a_1 b_4 \sqrt{\pi'_2 \pi_1 \tau' \sigma} &= 4P\sqrt{qr}, \end{aligned} \tag{27}$$

und es sei etwa $N \gtrless 0$ (die Discussion der zweiten Gleichung für $N = 0$ würde zu dem gleichen Ziele führen). Die beiden

Radicanden linker Hand stimmen von quadratischen Factoren abgesehen überein, und man hat anzusetzen:

$$(28)\qquad \begin{aligned} \pi_1 \pi_1' \sigma\sigma' &= n^2 ps, \\ r_1 r_1' s_1 s_1' \cdot tt' \cdot p_1 p_1' q_1 q_1' &= n^2 \cdot ps. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf den Umstand, daß t und t' prim gegen pq sind, folgt aus der letzten Gleichung:

$$r_1' = r_1, \qquad s_1' = s_2, \qquad p_1' = p_2, \qquad q_1' = q_1, \qquad t' = t.$$

Die letzte Gleichung findet statt, weil tt' ein Quadrat ist, während doch weder t noch t' quadratische Teiler enthält. Nun berechnen sich aus (23) 4α, 4β, 4γ, 4δ als ganze algebraische Zahlen mit dem gemeinsamen Teiler $\sqrt{t}$; es wird demnach t selbst in 16 aufgehen, und also hat man nur die beiden Möglichkeiten $t = 1$ und $= 2$. Die Gleichungen (23) invertieren sich alsdann, je nachdem $t = 1$ oder 2 genommen wird, in

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} 4\alpha \text{ bez. } 2\sqrt{2}\alpha &= (a_1\sqrt{r_1 s_1} + a_2\sqrt{r_2 s_2})\sqrt{p_1 q_1} + i(a_3\sqrt{r_1 s_1} + a_4\sqrt{r_2 s_2})\sqrt{p_2 q_2}, \\ 4\beta \text{ bez. } 2\sqrt{2}\beta &= (b_1\sqrt{r_1 s_2} + b_2\sqrt{r_2 s_1})\sqrt{p_2 q_1} + i(b_3\sqrt{r_1 s_2} + b_4\sqrt{r_2 s_1})\sqrt{p_1 q_2}, \\ 4\gamma \text{ bez. } 2\sqrt{2}\gamma &= (b_1\sqrt{r_1 s_2} - b_2\sqrt{r_2 s_1})\sqrt{p_2 q_1} - i(b_3\sqrt{r_1 s_2} - b_4\sqrt{r_2 s_1})\sqrt{p_1 q_2}, \\ 4\delta \text{ bez. } 2\sqrt{2}\delta &= (a_1\sqrt{r_1 s_1} - a_2\sqrt{r_2 s_2})\sqrt{p_1 q_1} - i(a_3\sqrt{r_1 s_1} - a_4\sqrt{r_2 s_2})\sqrt{p_2 q_2}. \end{aligned} \right.$$

Falls unter den Zahlen (23) eine oder mehrere verschwinden, sollen die betreffenden Zahlen a bez. $b = 0$ genommen werden Wird dann in einer der Formeln mit nicht verschwindendem a oder b die Zerlegung $\pi\sigma$, $\pi\tau$, . . nach den bisherigen Vorschriften unbestimmt, so verstehe man unter π den größten gemeinsamen Teiler von rs und $\pi\sigma$ bez. $\pi\tau$, . . ; der andere Factor σ oder τ, . . ist dann prim gegen rs. Man unterscheide nun zuvörderst für die a folgende drei Fälle:

I. Es ist unter a_1 und a_2, sowie unter a_3 und a_4 wenigstens je eine Zahl von 0 verschieden.

II. Es ist $a_1 = a_2 = 0$ oder $a_3 = a_4 = 0$, aber wenigstens ein $a \lessgtr 0$.

III. Es verschwinden sämtliche vier Zahlen a.

Im Falle I hat man, abgesehen von dem noch unbekannt bleibenden gemeinsamen Factor t von σ und τ, alles in der bisherigen Art anzusetzen. Denn ist etwa $a_1 = 0$, so dürfen wir $\pi_1 = rs \cdot \pi_2^{-1}$ setzen und müssen es auf Grund von (24), falls $a_1 \gtrless 0$, $a_2 \gtrless 0$ ist. Die Beziehungen $\pi_1 = \pi_3$, $\pi_2 = \pi_4$.

$\sigma\tau = t^2 pq$ ergeben sich dann entweder aus der dritten Gleichung (24) oder aus parallel gehenden Gleichungen, die man leicht herstellen wird.

Im Falle II kann man die π wieder in der bisherigen Weise ansetzen; dagegen bleibt σ bez. τ noch unbekannt, und man weiß nur, daß dasselbe prim gegen rs ist.

Für die b gelten analoge Bemerkungen, und man hat nun die überhaupt vorkommenden Combinationen der drei Fälle a mit den drei Fällen b einzeln durchzugehen. Hierbei kommen die Gleichungen (22) zur Verwendung, und man bemerke vorab, daß die ganzen Zahlen $J, K, \ldots, R$ nur dann alle verschwinden, wenn entweder alle a oder alle $b = 0$ sind. Da beides zugleich nicht eintreten kann, so hat man nur den Fall III der einen Zahlreihe (a oder b) mit den Fällen I und II der anderen zu combinieren. Liegt I vor, so teilt t die Zahl 16 $(\alpha\delta - \beta\gamma) = 16$, so daß nur $t = 1$ oder $= 2$ sein kann, was zum Typus (29) zurückführt. Hat man den Fall II, so muß die überhaupt in Betracht kommende unter den beiden Zahlen τ und σ wieder 16 teilen, und wir kommen aufs neue zum Typus (29).

Liegt weder für die a noch b der Fall III vor, so verschwinden nicht alle Zahlen $J, K, \ldots$, und man kann entweder die Gleichungen (27) oder parallel gehende Gleichungen zur Bestimmung von $\sigma, \ldots, \tau'$ und der zwischen den π bestehenden Relationen benutzen. In jedem Falle erhält man eine ζ-Substitution, welche sich dem Schema (29) subsumirt. Um hierzu noch ein Beispiel zu betrachten, sei etwa $a_3 = a_4 = 0$ und $b_1 = b_2 = 0$ sowie $a_1 \gtrless 0$, $b_4 \gtrless 0$. Dann folgt aus (27):

$$\pi_1 \pi_2' \sigma\tau' = r_1 r_2' \cdot s_1 s_2' \cdot \sigma\tau' = m^2 qr\,,$$

und da $\sigma\tau'$ prim gegen rs ist, so ist $r_2' = r_2$, $s_2' = s_1$ und also $\sigma\tau' = n^2 q$, wobei n nur gleich 1 oder 2 sein kann; man gelangt also zum Schema (29) mit der Besonderheit $p_1 = 1$ zurück. —

Man wähle nunmehr vier beliebige Zerlegungen:

$$p = p_1 p_2\,, \qquad q = q_1 q_2\,, \qquad r = r_1 r_2\,, \qquad s = s_1 s_2 \tag{30}$$

der Zahlen p, q, r, s aus und bilde nach Vorschrift von (29) mit Hülfe ganzer Zahlen a_i, b_i zugehörige ζ-Substitutionen. Die Forderung, daß dieselben unimodular sein sollen, drückt sich dann durch die beiden Gleichungen aus:

$$
(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_1 a_4 - a_2 a_3 = b_1 b_4 - b_2 b_3,\\
&p_1 q_1 (a_1^2 r_1 s_1 - a_2^2 r_2 s_2) + p_2 q_2 (a_3^2 r_1 s_1 - a_4^2 r_2 s_2)\\
&- p_2 q_1 (b_1^2 r_1 s_2 - b_2^2 r_2 s_1) - p_1 q_2 (b_3^2 r_1 s_2 - b_4^2 r_2 s_1)\\
&= 16 \text{ oder } = 8,
\end{aligned}\right.
$$

je nachdem die oben mit t bezeichnete Zahl 1 oder 2 ist. Berechnet man nunmehr aus (29) die linken Seiten der Gleichungen (21) und (22), so nehmen die rechten Seiten dieser Gleichungen, soweit Irrationalitäten darin vorkommen, die vorgeschriebenen Gestalten an.

Nun ist aber weiter zu fordern, daß die dabei auftretenden rationalen Coefficienten mit g a n z e n Zahlen A, B, ..., R identisch sind, welche letztere alsdann die Congruenzen (20) befriedigen müssen. Die geforderte Ganzzahligkeit der A, B, ... liefert für die a_i, b_i folgende sechzehn Congruenzen:

$$
(32)\quad \left\{\begin{aligned}
a_1^2 \pm a_2^2 rs \pm a_3^2 pq + a_4^2 pqrs \equiv 0\\
b_1^2 \pm b_2^2 rs \pm b_3^2 pq + b_4^2 pqrs \equiv 0
\end{aligned}\right\} \left(\text{mod. } \frac{8}{t}\right)
$$

$$
(33)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_1 a_2 + a_3 a_4 pq \equiv 0, && b_1 b_2 + b_3 b_4 pq \equiv 0\\
&a_1 a_3 - a_2 a_4 rs \equiv 0, && b_1 b_3 - b_2 b_4 rs \equiv 0
\end{aligned}\right\} \left(\text{mod. } \frac{4}{t}\right)
$$

$$
(34)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_1 b_2 + a_4 b_3 qs \equiv 0, && b_1 a_2 + b_4 a_3 qs \equiv 0\\
&a_1 b_3 - a_4 b_2 pr \equiv 0, && b_1 a_3 - b_4 a_2 pr \equiv 0\\
&a_1 b_1 + a_4 b_4 qr \equiv 0, && a_2 b_2 + a_3 b_3 qr \equiv 0\\
&a_1 b_4 - a_4 b_1 ps \equiv 0, && a_2 b_3 - a_3 b_2 ps \equiv 0
\end{aligned}\right\} \left(\text{mod. } \frac{4}{t}\right).
$$

Des ferneren kleiden sich die acht Congruenzen (20) nunmehr in die folgende Gestalt:

$$
(35)\quad a_1^2 \pm a_2^2 rs \pm a_3^2 pq + a_4^2 pqrs \equiv b_1^2 \pm b_2^2 rs \pm b_3^2 pq + b_4^2 pqrs, \left(\text{mod. } \frac{16}{t}\right),
$$

$$
(36)\quad \left\{\begin{aligned}
a_1 a_2 + a_3 a_4 pq \equiv b_1 b_2 + b_3 b_4 pq\\
a_1 a_3 - a_2 a_4 rs \equiv b_1 b_3 - b_2 b_4 rs
\end{aligned}\right\} \left(\text{mod. } \frac{8}{t}\right)
$$

$$
(37)\quad \left\{\begin{aligned}
a_1 b_2 + a_4 b_3 qs \equiv b_1 a_2 + b_4 a_3 qs\\
a_1 b_3 - a_4 b_2 pr \equiv b_1 a_3 - b_4 a_2 pr\\
a_1 b_1 + a_4 b_4 qr \equiv a_2 b_2 + a_3 b_3 qr\\
a_1 b_4 - a_4 b_1 ps \equiv a_2 b_3 - a_3 b_2 ps
\end{aligned}\right\} \left(\text{mod. } \frac{8}{t}\right)
$$

Diese 24 Congruenzen ziehen sich äußerst stark zusammen, falls $pq \equiv rs \pmod{4}$ ist. Für diesen Fall liefern die Congruenzen (32) $a_i \equiv a_k$, $b_i \equiv b_k \pmod{2}$. Nimmt man nun die a gerade, die b ungerade (oder umgekehrt), so würde in (35) die linke (oder rechte) Seite einen vom gewählten Vorzeichen unabhängigen Rest nach dem Modul 8 liefern; man hätte sonach die Folge:

$$1 + pq + rs + pqrs \equiv 1 - pq - rs + pqrs \pmod{8},$$

welche sich mit $pq \equiv rs \pmod{4}$ nicht vereinigen läßt; man hat also im vorliegenden Falle $a_i \equiv b_k \pmod{2}$.

Nehmen wir nun zunächst $t = 2$, so sind durch $a_i \equiv b_k \pmod{2}$ sämtliche Congruenzen (32), (33), (34) erfüllt, und die letzten acht Congruenzen liefern nur noch von (35) her für den Fall, daß $a_i \equiv b_k \equiv 0 \pmod{2}$ ist, die weitere Bedingung:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i \equiv \sum_{i=1}^{4} b_i \pmod{4},$$

während die Congruenzen (36), (37) für diesen Fall, sowie sämtliche Congruenzen (35), (36), (37) im Falle ungerader a_i, b_i von selbst erfüllt sind. Um letzteren Punkt noch näher zu belegen, so entnehme man aus $a_i \equiv b_k \equiv 1 \pmod{2}$ und aus (31):

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \equiv b_1 b_2 b_3 b_4 \pmod{4}. \tag{38}$$

Von hieraus lassen sich alle Congruenzen (36) und (37) als zutreffend nachweisen. Indem man z. B. die Congruenz (38) mit $a_2\, b_2$ multiplicirt, kommt, immer modulo 4 gemeint:

$$a_1 b_2 a_3 a_4 - a_2 b_1 a_3 a_4 \equiv a_2 b_1 b_3 b_4 - a_2 b_1 a_3 a_4,$$

oder da eine gerade Zahl, mit einer ungeraden multiplicirt, sich selbst modulo 4 congruent bleibt:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \equiv -a_2 b_1 (a_3 a_4 - b_3 b_4) \equiv qs\, a_4 b_4 (a_3 a_4 - b_3 b_4)$$
$$a_1 b_2 + a_4 b_3 qs \equiv a_2 b_1 + b_4 a_3 qs.$$

Dies ist aber die erste der Congruenzen (37), und entsprechend gewinnt man die übrigen Congruenzen (36) und (37).

Nehmen wir jetzt $t = 1$, so erfordern die Congruenzen (32), daß die a_i unter einander congruent modulo 2 sind und desgleichen die b_i. Für ungerade a_i kann aber die erste Congruenz (32) nur entweder für die oberen oder die unteren Zeichen bestehen, da

$pqrs \equiv 1$ modulo 4 ist; man hat demnach notwendig $a_\iota \equiv b_\iota \equiv 0$ (mod. 2). Schreiben wir daraufhin für den Augenblick $a_\iota = 2c_\iota$, $b_\iota = 2d_\iota$, so liefern die Congruenzen (32) für die acht ganzen Zahlen c_ι, d_ι:

$$\sum c_\iota \equiv 0, \quad \sum d_\iota \equiv 0 \pmod{2}, \tag{39}$$

und es sind hiermit die Congruenzen (32), (33), (34) auch stets erfüllt. Die eine der beiden Congruenzen (35) giebt:

$$\sum c_\iota^2 \equiv \sum d_\iota^2 \pmod{4}, \tag{40}$$

und der Vergleich derselben mit der anderen Congruenz (35) und der zweiten Gleichung (31) führt auf:

$$c_i + c_k \equiv d_i + d_k \pmod{2} \tag{41}$$

für jede Indexcombination i, k. Zugleich folgen umgekehrt aus (40) und (41) mit Rücksicht auf die erste Gleichung (31) die beiden Congruenzen (35). Die Congruenzen (36) sind einfache Folgen aus (31) und (41), und man kann zeigen, daß auch die Congruenzen (37) erfüllt sind. Drei unter ihnen lassen sich nämlich in die Gestalt zusammenziehen:

$$c_i d_k + c_l d_m \equiv d_i c_k + d_l c_m \pmod{2}, \tag{42}$$

während die rückständige Congruenz die Gestalt annimmt:

$$\sum c_\iota d_\iota \equiv 0 \pmod{2}; \tag{43}$$

in der ersten dieser Congruenzen bedeutet i, k, l, m irgend eine Anordnung der vier Indices 1, 2, 3, 4. Sind nun die c_ι einander congruent modulo 2, so folgt aus (40) dasselbe für die d_ι und umgekehrt; dann sind die Congruenzen (41), (42) und (43) ersichtlich erfüllt. Lösen wir aber (39) durch $d_i \equiv d_k \equiv d_l + 1 \equiv d_m + 1$ (mod. 2) auf, so liefern die Congruenzen (41) offenbar $c_i \equiv c_k \equiv c_l + 1 \equiv c_m + 1$ (mod. 2), und hiermit ist die Congruenz (43) sowie die Congruenz (42) für jede von der eben gemeinten Anordnung i, k, l, m unabhängige Combination erfüllt.

Im Falle $pqrs \equiv -1$ (mod. 4) ziehen sich die Congruenzen (32) bis (37) nicht in gleichen Graden zusammen. Wir lassen daher diesen Fall außer Betracht, um für $pq \equiv rs$ (mod. 4) die gewonnenen Ergebnisse unter leichter Abänderung der Bezeichnungsweise folgendermaßen zusammenzufassen: Ist $pqrs \equiv 1$ (mod. 4), so wird die zur Form (2) gehörende Gesamtgruppe der ζ-Substitutionen von den gesamten unimodularen Operationen mit

$$\alpha \text{ bez. } \delta = \frac{(a_1\sqrt{r_1s_1} \pm a_2\sqrt{r_2s_2})\sqrt{p_1q_1} \pm i(a_3\sqrt{r_1s_1} \pm a_4\sqrt{r_2s_2})\sqrt{p_2q_2}}{N}$$

$$\beta \text{ bez. } \gamma = \frac{(b_1\sqrt{r_1s_2} \pm b_2\sqrt{r_2s_1})\sqrt{p_2q_1} \pm i(b_3\sqrt{r_1s_2} \pm b_4\sqrt{r_2s_1})\sqrt{p_1q_2}}{N} \tag{44}$$

gebildet, wobei N der Reihe nach mit $\sqrt{2}$, 2 und $2\sqrt{2}$ zu identificieren ist. Es sind hier nach und nach alle Zerlegungen (30) zur Anwendung zu bringen, so daß wir (unter Benutzung eines schon oben gebrauchten Symbols) im ganzen $3 \cdot 2^{(p)+(q)+(r)+(s)}$ Typen von ζ-Substitutionen gewinnen. Die a_i, b_i sind rationale ganze Zahlen, welche einmal bewirken müssen, daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, und welche überdies den nachfolgenden Congruenzen zu genügen haben:

I. für $N = \sqrt{2}$ muß die eine Congruenz bestehen:

$$\sum a_i \equiv \sum b_i \pmod{2}, \tag{45}$$

II. für $N = 2$ müssen entweder simultan die Congruenzen:

$$a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv a_4, \quad b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv b_4 \pmod{2} \tag{46}$$

bestehen oder aber die Congruenzen:

$$a_i \equiv a_k \equiv a_l + 1 \equiv a_m + 1, \quad b_i \equiv b_k \equiv b_l + 1 \equiv b_m + 1 \pmod{2} \tag{47}$$

III. für $N = 2\sqrt{2}$ müssen alle acht Zahlen a_i, b_i ungerade sein.

Es ist an den gewonnenen Ergebnissen bemerkenswert, daß man aus dem Bildungsgesetze (10), (11) bez. (44) der ζ-Substitutionen deren Gruppeneigenschaft unmittelbar einsehen kann, was ja freilich im quaternären Falle durch die hinzutretenden Congruenzen (45) etc. ein wenig erschwert sind. Es sind aber zumal auch diese letzteren Gruppen in freilich sehr speciellen Fällen unabhängig von den quaternären Formen aufgestellt und untersucht worden. Nimmt man nämlich $p = r = s = 1$ und $q = D$, so kommen wir zu Gruppen, welche die von Hrn. Bianchi in den Mathematischen Annalen Bd. 40 pag. 332 ff. betrachteten Gruppen in sich enthalten. In der That ist denn auch Hr. Bianchi neuerdings an die eben gemeinten speciellen Gruppen von den quaternären Formen aus herangegangen und beabsichtigt, wie ich von ihm höre, demnächst in den Annali di matematica eine bezügliche Abhandlung zu veröffentlichen.

Göttingen, den 12. November 1893.

Ueber den Temperatur-Ausgleich zwischen zwei sich berührenden heterogenen Körpern.

Von

H. Weber.

I.

Die vorliegende Mittheilung hat ein Problem der analytischen Wärmetheorie zum Gegenstand, von dem ich schon vor Jahren eine Lösung gegeben habe [1]). Vor Kurzem habe ich mich, veranlaßt durch meine Vorlesungen über bestimmte Integrale, aufs neue mit demselben Problem beschäftigt und dabei die Formeln und ihre Ableitung in einer viel übersichtlicheren und einfacheren Form dargestellt. Dadurch rechtfertigt es sich, wenn ich hier noch einmal auf die Sache zurückkomme.

Die Frage, um die es sich ursprünglich handelte, war die, wie sich die Temperatur an der Berührungsfläche ausgleicht, wenn zwei verschiedenartige Körper von verschiedener Temperatur mit einander in Contact gebracht werden, eine Frage, die unter anderem für die Theorie der thermo-electrischen Ströme von Bedeutung ist.

Fourier hat die Bestimmung der Temperatur in einem festen Körper als Function des Ortes und der Zeit abhängig gemacht von der Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung, die aus der Voraussetzung abgeleitet wird, daß der Wärmeaustausch nur zwischen unmittelbar an einander grenzenden Theilen stattfindet, daß also eine innere Strahlung nicht zu berücksichtigen ist, und daß die gesammte Wärme, die aus dem einen Theil in den andern übergeht, zur Temperaturerhöhung verwandt und nicht etwa zum Theil in Arbeit umgesetzt wird. Nehmen wir an, daß die Temperatur während der ganzen Dauer des Vorganges nur von einer Dimension des Raumes, nämlich der Abscisse x abhängt, daß aber die isothermen Flächen von einer Schaar paralleler, auf der x-Richtung senkrechter Ebenen gebildet werden, und bezeichnen mit t die Zeit, mit u die Temperatur, so lautet diese Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

1) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich Mai 1871.

worin a^2 eine Constante der Substanz ist, in der der Vorgang abläuft, nämlich das thermische Leitungsvermögen, getheilt durch die auf die Volumeneinheit bezogene specifische Wärme.

Dazu kommen noch für jeden besonderen Fall Bedingungen für die Grenze und den Anfangszustand, die für den vorliegenden Fall nachher aufgestellt werden sollen.

II.

Die Lösung der Differentialgleichung (1), läßt sich auf eine wohlbekannte transcendente Function zurückführen, über deren Definition und wichtigste Eigenschaften daher zunächst einiges anzuführen ist. Es ist die bei vielen Anwendungen, besonders auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende Function

$$E(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha, \tag{2}$$

von der alles abhängig gemacht werden soll.

Nach einer bekannten Formel aus der Theorie der bestimmten Integrale ist

$$E(0) = 1, \quad E(\infty) = 0, \quad E(-\infty) = 2. \tag{3}$$

Ferner ist durch die Substitution $-\alpha$ für α

$$E(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

$$E(-z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

also

$$E(z) + E(-z) = 2 \tag{4}$$

und

$$\frac{\partial E(z)}{\partial z} = -\frac{2 e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}. \tag{5}$$

Entwickelt man in der Formel

$$E(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

$e^{-\alpha^2}$ nach Potenzen von α^2, so erhält man für $E(z)$ eine immer und unbedingt convergente Reihe, die ihre Werthe für kleine Argumentwerthe zu berechnen gestattet:

$$E(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{0,\infty}^{n} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,\Pi(n)} \tag{6}$$

Für die vorliegende Aufgabe ist es aber gerade von Interesse, den Verlauf der Function $E(z)$ für große Werthe von z zu beurtheilen. Dazu eignet sich eine andere Entwicklung nach fallenden Potenzen von z, die wir so erhalten.

Macht man in dem Integral (2) die Substitution

$$\alpha = \frac{\beta}{2z} + z, \qquad d\alpha = \frac{d\beta}{2z},$$

so erhält man

$$\int_z^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{e^{-z^2}}{2z} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{4z^2}} e^{-\beta} d\beta.$$

Wenn man nun $e^{-\frac{\beta^2}{4z^2}}$ nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelt, und die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{2n} d\beta = \Pi(2n)$$

anwendet, so folgt

$$E(z) = \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} \sum (-1)^n \frac{\Pi(2n)}{\Pi(n)(2z)^{2n}}. \tag{7}$$

Diese Reihe ist zwar divergent; sie gehört aber zu den halbconvergenten, und wenn man bei einem bestimmten Gliede abbricht, so ist der Fehler nur ein Bruchtheil des nächstfolgenden Gliedes. Dies ergiebt sich sehr einfach, wenn man in der Entwicklung von $e^{-\frac{\beta^2}{4z^2}}$ den Rest berücksichtigt.

Um die Größe des Fehlers zu schätzen, und um zugleich einen Anhalt zu gewinnen, bis zu welchem Gliede man zweckmäßig die Entwicklung (6) benutzt, setzt man in dem Gliede mit dem Index n für $\Pi(2n)$ und $\Pi(n)$ die bekannten oberen und unteren Grenzen:

$$\Pi(2n) < \sqrt{2\pi}\, e^{-2n+\frac{1}{24n}} (2n)^{2n+\frac{1}{2}}$$

$$\Pi(n) > \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}},$$

und erhält daraus

$$\frac{\Pi(2n)}{\Pi(n)(2z)^{2n}} < e^{-n} \left(\frac{n}{z^2}\right)^n e^{\frac{1}{24n}} \sqrt{2}. \tag{8}$$

Tafeln für die Function $E(s)$ oder genauer für die Function $\Theta(s) = 1 - E(s)$ finden sich in allen Werken über Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine siebenstellige z.B. in dem Buch von Czuber „Theorie der Beobachtungsfehler“. Leipzig 1891.

III.

Es sollen jetzt particulare Lösungen der Differentialgleichung (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

aufgesucht werden, die sich zur Anwendung auf unser Problem eignen. Wir können dabei ausgehen von einer sehr bekannten Form einer particularen Lösung, nämlich

$$A\, e^{-\nu^2 a^2 t} \cos \nu (\alpha - x),$$

worin A, ν, α willkürliche Constanten sind. Aus solchen Particularlösungen kann man eine beliebige Summe bilden und erhält neue Lösungen. Dabei kann man ν und α auch als stetig veränderlich betrachten, und dann eine stetige Summe, also ein bestimmtes Integral bilden. Setzen wir dann noch $2\pi A = F(\alpha)\, d\alpha$ so erhalten wir eine Lösung von (1) in Form eines Doppelintegrals

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\, e^{-\nu^2 a^2 t} \cos \nu (\alpha - x)\, d\alpha, \tag{9}$$

was nach dem Fourier'schen Lehrsatz für $t = 0$ in die Function $F(x)$ übergeht. Diese Function ist ganz beliebig; sie braucht nicht einmal stetig zu sein, und da der Gang der Temperatur in einem unendlich ausgedehnten Körper durch den Anfangszustand vollkommen bestimmt ist, so können wir (9) als die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) betrachten.

Ist $F(x)$ eine unstetige Function, so ist das Integral (9) für $t = 0$ nur bedingt convergent und die Convergenz wird mit abnehmendem t immer schlechter und schlechter. Es kann uns also ein Ausdruck von dieser Art der Convergenz nichts lehren über den Vorgang, der sich z. B. gleich nach der Berührung zweier heterogener Körper abspielt, eine Frage, die für uns das hauptsächlichste Interesse hat. Es soll daher der Ausdruck (9) zunächst in einen anderen transformiert werden, der für kleine Werthe von t seine beste Convergenz hat.

Dazu kehrt man in (9) die Reihenfolge der Integrationen um, eine Operation, die bei einer e n d l i c h e n Function $F(\alpha)$ für

jedes positive t gestattet ist. Wendet man die aus der Theorie der bestimmten Integrale bekannte Formel an,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2 a^2 t} \cos \nu(\alpha - x) d\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}},$$

so erhält man

$$(10) \qquad U = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} d\alpha,$$

einen Ausdruck, dem man durch die Substitution

$$\alpha = x - 2\beta a \sqrt{t}$$

die Form geben kann

$$(11) \qquad U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - 2\beta a \sqrt{t}) e^{-\beta^2} d\beta.$$

Daraus kann man nun beliebig viele particulare Integrale von (1) herleiten, wenn man für $F(\alpha)$ specielle Annahme macht. Wir wollen zwei dieser speciellen Annahmen verfolgen. Setzt man $F(\alpha) = 0$ für positive α und $= 2$ für negative α, so ergiebt (10)

$$U = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = E\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Eine zweite specielle Annahme ist

$$F(\alpha) = 0 \text{ für } \alpha > 0, \qquad F(\alpha) = 2e^{\lambda\alpha} \text{ für } \alpha < 0$$

worin λ eine beliebige Constante ist. Darnach ergiebt (10)

$$U = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\lambda x + \lambda^2 a^2 t} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-(\beta + \lambda a \sqrt{t})^2} d\beta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\lambda x + \lambda^2 a t} \int_{\frac{x + 2\lambda a^2 t}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = e^{\lambda x + \lambda^2 a^2 t} E\left(\frac{x + 2\lambda a^2 t}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Wir haben also die beiden particularen Lösungen der Differentialgleichung (1) gefunden

$$(12) \qquad E\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \qquad e^{\lambda x + \lambda^2 a^2 t} E\left(\frac{x + 2\lambda a^2 t}{2a\sqrt{t}}\right),$$

von denen die zweite für $\lambda = 0$ in die erste übergeht. Man kann sich nachträglich durch eine einfache Rechnung davon über-

zeugen, daß diese Functionen wirklich der Differentialgleichung (1) genügen.

IV.

Von diesen Resultaten soll jetzt die Anwendung auf das folgende Problem gemacht werden.

Es sei der unendliche Raum erfüllt von zwei Substanzen, die an der Ebene $x = 0$ zusammenstoßen, und im Anfangspunkt der Zeit, $t = 0$, habe der eine überall die Temperatur T_1, der andere die Temperatur T_2, so daß T_1 und T_2 gegebene Constanten sind.

Die Constante a habe in einem Körper den Werth a_1, im andern den Werth a_2 und die Temperaturen als Functionen von x und t sollen mit u_1 und u_2 bezeichnet werden, so daß u_1 für negative, u_2 für positive Werthe von x gilt. Es sind dann die beiden Differentialgleichungen

$$(13) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad x < 0$$

$$(14) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad x > 0$$

zu erfüllen, und es muß

$$(15) \qquad u_1 = T_1, \quad u_2 = T_2, \quad \text{für } t = 0$$

sein. Es müssen aber noch, zur vollständigen Bestimmung von u_1, u_2 Bedingungen an der Grenzfläche $x = 0$ hinzukommen. Diese hängen von den physikalischen Voraussetzungen ab, die man macht. Zu den einfachsten Resultaten führt die Annahme, daß die Berührung eine so innige sei, daß eine endliche Disconuität in der Temperatur an der Trennungsfläche, auch wenn sie anfänglich vorhanden war, sich nicht erhalten kann, daß also $u_1 = u_2$ sei für $x = 0$ und $t > 0$; drückt man dann noch die Bedingung aus, daß durch ein Element der Grenzfläche ebenso viel Wärme einströmen wie ausströmen muß, damit nicht ein unendliches Anwachsen der Temperatur an der Grenzfläche stattfindet, so erhält man, wenn $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Werthe des thermischen Leitungsvermögens in beiden Körpern sind, die Grenzbedingungen

$$(16) \qquad u_1 = u_2, \quad \varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \text{für } x = 0.$$

Diesen Bedingungen kann man nun durch die Annahme genügen

$$u_1 = T_1 + C_1 E\left(\frac{-x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad x < 0 \tag{17}$$

$$u_2 = T_2 + C_2 E\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad x > 0 \tag{18}$$

worin C_1, C_2 noch zu bestimmende Constanten sind. Die Bedingungen (13), (14), (15) sind hierdurch allgemein befriedigt. Die Bedingungen (16) geben mit Rücksicht auf die Formeln (3) und (5)

$$T_1 + C_1 = T_2 + C_2 = T_0 \tag{19}$$

$$\frac{C_1 \varkappa_1}{a_1} + \frac{C_2 \varkappa_2}{a_2} = 0, \tag{20}$$

worin T_0 die Temperatur in der Berührungsfläche bedeutet.

Bezeichnet man mit s_1, s_2 die nach der Volumeneinheit gemessene specifische Wärme, oder nach der gewöhnlichen Bestimmung die Producte aus dem specifischen Gewicht und der specifischen Wärme, so ist

$$a_1 = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{s_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\varkappa_2}{s_2}}, \tag{21}$$

und die Formel (20) erhält die Form

$$C_1\sqrt{\varkappa_1 s_1} + C_2\sqrt{\varkappa_2 s_2} = 0, \tag{22}$$

und aus (19) und (22) folgt

$$T_0 = \frac{T_1\sqrt{\varkappa_1 s_1} + T_2\sqrt{\varkappa_2 s_2}}{\sqrt{\varkappa_1 s_1} + \sqrt{\varkappa_2 s_2}} \tag{23}$$

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1)\sqrt{\varkappa_2 s_2}}{\sqrt{\varkappa_1 s_1} + \sqrt{\varkappa_2 s_2}}, \quad C_2 = -\frac{(T_2 - T_1)\sqrt{\varkappa_1 s_1}}{\sqrt{\varkappa_1 s_1} + \sqrt{\varkappa_2 s_2}}. \tag{24}$$

Bei der Berührung stellt sich also an der Berührungsfläche momentan die mittlere Temperatur T_0 ein, die sich im weiteren Verlauf des Vorganges nicht mehr ändert, und die gleich der gemeinsamen Endtemperatur ist, der der Zustand in beiden Körpern zustrebt.

Die Ausdrücke für u_1 und u_2 erhalten, wenn T_0 durch (23) bestimmt ist, die Gestalt

$$u_1 = T_1 + (T_0 - T_1) E\left(\frac{-x\sqrt{s_1}}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}\right) \tag{25}$$

(26) $$u_2 = T_2 + (T_0 - T_2) E\left(\frac{x\sqrt{s_2}}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}\right).$$

V.

Es soll noch eine andere Annahme über die Grenzbedingung verfolgt werden, die vielleicht besser mit den thatsächlichen Verhältnissen übereinstimmt, nach der sich die Temperaturdifferenz an der Grenzfläche nicht momentan ausgleicht. Die Annahme besteht darin, daß durch die Trennungsfläche hindurch ein Wärmefluß stattfindet, der mit der Temperaturdifferenz an der Trennungsfläche proportional ist, was man sich etwa durch einen besonderen Uebergangswiderstand erklären kann, der beim Uebergang der Wärme aus einem Körper in den anderen stattfindet, und der im Vergleich zu dem Widerstand, wie er in den einzelnen Körpern stattfindet, unendlich groß ist, oder auch durch eine unendlich dünne Schicht zwischen beiden Körpern durch die der Wärmeaustausch nach den Gesetzen der Strahlung erfolgt. Bedeutet dann h eine Constante, die man etwa als äußere gegenseitige Leitungsfähigkeit beider Körper bezeichnen kann, so treten an Stelle der Bedingungen (16) die beiden

(27) $$\varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + h(u_1 - u_2) = 0,$$
für $x = 0$
(28) $$\varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + h(u_1 - u_2) = 0,$$

die, wenn man h unendlich groß annimmt, wieder in die Bedingungen (16) übergehen. Sonst bleibt alles wie oben.

Diesen Bedingungen kann man genügen, wenn man die beiden particularen Integrale (12) benutzt. Man setzt

$$u_1 = T_1 + C_1 E\left(\frac{-x}{2a_1\sqrt{t}}\right) + B_1 e^{-\lambda_1 x + \lambda_1^2 a_1^2 t} E\left(\frac{-x + 2\lambda_1 a_1^2 t}{2a_1\sqrt{t}}\right)$$

$$u_2 = T_2 + C_2 E\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) + B_2 e^{\lambda_2 x + \lambda_2^2 a_2^2 t} E\left(\frac{x + 2\lambda_2 a_2^2 t}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

und bestimmt dann die Constanten C_1, B_1, C_2, B_2, λ_1, λ_2 aus den Bedingungen (27), (28), wobei man nur lineare Gleichungen zu lösen hat. Es ergiebt sich

$$B_1 = -C_1,\ B_2 = -C_2,\ T_1 + C_1 = T_2 + C_2,$$

$$C_1 \frac{\varkappa_1}{a_1} + C_2 \frac{\varkappa_2}{a_2} = 0,\quad \lambda_1 a_1 = \lambda_2 a_2,$$

$$\lambda_1 \varkappa_1 C_1 - h(C_1 - C_2) = 0,$$

$$\lambda_2 \varkappa_2 C_2 + h(C_1 - C_2) = 0,$$

und man kann die definitifen Lösungen einfach darstellen, wenn man folgende abkürzende Bezeichnungen einführt.

$$\lambda = \lambda_1 a_1 = \lambda_2 a_2 = \frac{h_1}{\sqrt{\varkappa_1 s_1}} + \frac{h_2}{\sqrt{\varkappa_2 s_2}}, \tag{29}$$

$$x_1 = \frac{-x\sqrt{s_1}}{\sqrt{\varkappa_1}},\quad x_2 = \frac{x\sqrt{s_2}}{\sqrt{\varkappa_2}}, \tag{30}$$

$$T_0 = \frac{T_1\sqrt{\varkappa_1 s_1} + T_2\sqrt{\varkappa_2 s_2}}{\sqrt{\varkappa_1 s_1} + \sqrt{\varkappa_2 s_2}},$$

so daß T_0 dieselbe Bedeutung hat, wie oben. Man erhält so

$$u_1 = T_1 + (T_0 - T_1)\left\{ E\left(\frac{x_1}{2\sqrt{t}}\right) - e^{\lambda x_1 + \lambda^2 t} E\left(\frac{x_1}{2\sqrt{t}} + \lambda\sqrt{t}\right) \right\} \tag{31}$$

$$u_2 = T_2 + (T_0 - T_2)\left\{ E\left(\frac{x_2}{2\sqrt{t}}\right) - e^{\lambda x_2 + \lambda^2 t} E\left(\frac{x_2}{2\sqrt{t}} + \lambda\sqrt{t}\right) \right\}. \tag{32}$$

Setzt man $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so erhält man die Temperaturen zu beiden Seiten der Trennungsfläche, die jetzt eine endliche, mit der Zeit abnehmende Differenz haben

$$u_1^0 = T_0 + (T_1 - T_0)\, e^{\lambda^2 t} E(\lambda\sqrt{t})$$

$$u_2^0 = T_0 + (T_2 - T_0)\, e^{\lambda^2 t} E(\lambda\sqrt{t}).$$

Mit unendlich wachsender Zeit nähern sich diese beiden Temperaturen dem Grenzwerth T_0, und zwar nehmen $u_1^0 - T_0$ und $u_2^0 - T_0$ wie die Formel (7) zeigt, umgekehrt proportional mit der Quadrat-Wurzel aus t ab.

Läßt man h und damit λ unendlich groß werden, so gehen die Ausdrücke (31) und (32) in (25) und (26) über.

Ueber die Hekale des Kallimachos.

Von

Ulrich von Wilamowitz-Möllendorff.

Für die Hekale des Kallimachos, in der Schätzung des Altertums das vollendetste Erzeugnis der hellenistischen Poesie, hat die letzte Zeit drei überraschende Entdeckungen gebracht. Ein byzantinisches Gedicht, von dem uns eine unsichere Kunde aus der Renaissancezeit geblieben war, ist erst in der Copie eines Humanisten [1]), dann in einer Kallimachoshandschrift aufgetaucht, die auch für den Text der Hymnen recht wichtig ist [2]). Es zeigt sich nun, daß die Sammlung, der wir die Homerischen und Kallimacheischen Hymnen allein verdanken, erst in späterer Byzantinischer Zeit angelegt worden ist, und daß man damals die sechs Kallimacheischen aus einem sehr reichen Corpus seiner Werke sammt ihren Scholien herausnahm, zugleich mit jenem Gedichte, das den Inhalt dieses Corpus angibt, 6 Hymnen, Hekale, vier Bücher Aitia, Ibis und ein bisher ganz unbekanntes [3]) Rätselgedicht auf Athena [4]). Da dieses Inhaltsverzeichnis in byzantinischen Trimetern abgefaßt ist und naturkurze Vocale *a* und *y* lang braucht [5]), so ist es schwer-

---

1) **Reitzenstein**, Hermes 26, 308.

2) C. **Nigra**, *Inni di Callimaco su Diana e sui Lavacri di Pallade* (Turin 1892) 18. Die Verse über die Hekale sind in dieser Handschrift verdorben.

3) Die Versuche, den oder jenen Vers auf dieses Gedicht, dessen Maß unbekannt ist, zu beziehen, schweben in der Luft. Aber das Factum, daß Kallimachos auch dem Spiele nachgegeben hat, das Lykophron, Simias, Theokritos und Dosiadas vorher getrieben hatten, ist recht merkwürdig. Auch von der Ibis ist bisher kein sicheres Bruchstück nachgewiesen.

4) Ich gehe hier nicht auf das Verhältnis ein, in dem das Verzeichnis der Kallimacheischen Werke bei Suidas zu diesem hier steht, will aber nicht verhehlen, daß ich jetzt wie immer das Verzeichnis bei Suidas für trügerisch gehalten habe und die des Theokritos und Aratos ebenso beurteile. In allen ist die gute Tradition mit Irrtum und Schwindel gemischt. Die Modernen haben ihn noch vermehrt: immer wieder muß man lesen, Kallimachos hätte ein Buch 'Griffel' genannt (fgm. 37a). Einerlei wie man das einzige angebliche Citat (eins ist es natürlich) verbessert: ein solcher Titel ist Unsinn. Der Ausgabe des Sallustius fehlen von Büchern, die durch Citate gut bezeugt sind, *Ἐπιγράμματα*, *Ἴαμβοι* und *Μέλη*. Ob ein Gedicht wie der *Πλόκαμος* in dem letzten Buche der Aitia gestanden hat oder selbständig gewesen ist, können wir nicht entscheiden.

5) V. 1 *ὑψίζυγον ἐν πρώτοις Δία*. V. 8 *σκώπτω δ' ἐπαραῖς Ἶβιν Ἀπολλώνιον*. Die falsche Wortabteilung *ἐπ' ἀραῖς* hätte nicht täuschen sollen.

lich älter als das siebente Jahrhundert. Die Ausgabe aber wird durch ihre Scholien als die des Grammatikers Sallustius bestimmt [1]), den man dem vierten oder fünften Jahrhundert zuschreiben wird. Daß die Hauptwerke des Kallimachos, Aitia und Hekale, in der versificatorisch sehr tätigen Zeit von Theodosius I. bis Anastasius viel gelesen wurden, war durch Nachahmungen bekannt. Wenn sie sich aber noch Jahrhunderte länger erhalten haben, so ist die Erwartung berechtigt, Reste von ihnen in den großen Compendien der Zeit des Photius anzutreffen, die nach zwei öden Jahrhunderten die Studien wieder aufnahm.

Dazu verhilft die zweite Entdeckung, auch sie eigentlich eine Wiederentdeckung. A. Hecker hatte sehr viele anonyme Verse und Versstücke, die in dem Lexikon des Suidas verstreut sind, auf die Hekale und die Aitia zurückgeführt; da er aber von der Qualität der Verse, nicht von der Analyse der byzantinischen Compilation geleitet ward, hat er wenig Glauben gefunden. Nun hat der Entdecker des echten Etymologicums, R. Reitzenstein, in diesem Reste des Sallustcommentares angetroffen und mit deren Hilfe den Beweis zu erbringen versucht, daß Suidas die Hekale mit dem Commentare des Sallust direct excerpirt habe [2]). Dadurch haben die Reste der Hekale nicht nur eine absolute Vermehrung erfahren, sondern es ist auch in den Fällen, wo die Vermutung auf Grund des Inhaltes Verse bereits für dieses Gedicht in Anspruch genommen hatte, eine erfreuliche Sicherheit gewonnen. Doch läßt sich diese Aussonderung erst erledigen, wenn das echte Etymologicum gedruckt und das Lexicon des Suidas als solches im Ganzen auf seine Quellen untersucht sein wird. Beides steht in Aussicht.

Endlich ist jüngst unter den ägyptischen Schätzen des Erzherzogs Rainer eine Holztafel entdeckt, die vorn eine Rede aus den Phoenissen des Euripides [3]), hinten vier Columnen aus der Hekale

---

1) Es folgt das wesentlich aus den sogleich erwähnten Entdeckungen Reitzensteins, aber ein Citat ist doch auch noch bestimmbar: schol. Call. hymn. 2, 89 *Ἄζιλις ὄρος καὶ ποταμὸς Λιβύης.* Stephanus Byz. *Ἄζιλις πόλις Λιβύης, οἱ δὲ περὶ Σαλούστιον οὐ πόλιν ἀλλὰ τόπον φασὶ καὶ ποταμὸν εἶναι.* Die Bedenken Maurenbrechers (Sallust. Histor. p. 209) sind somit erledigt.

2) Ind. lect. von Rostock 90/91 und 91/92.

3) Veröffentlicht von Weinberger, Mitteil. aus der Sammlung Rainer VI. Wer über die Textgeschichte des Euripides unterrichtet ist, wird nicht viel von einer solchen Bereicherung der Ueberlieferung erwarten, zumal in den hier erhaltenen Versen unsere guten Handschriften kaum abweichen. Am wenigsten kann man sich verwundern, daß die modernen Conjecturen der Tafel fremd sind, sowol die ungezählten falschen als auch die eine richtige *ἐκπληροῦν* 1135. Immerhin

enthält [1]). Da die Größe der Tafel sich durch die Euripidesrede bestimmen läßt, weiß man, daß zwischen je zwei Kallimachosbruchstücken von ungefähr 15 Versen je 22 etwa fehlen. Der Lichtdruck gestattet nur die Columnen I und IV einigermaßen vollständig zu lesen, von II erkenne ich nur Zeilenanfänge, hier und da bis zur Mitte, von III überhaupt nichts. Mit andern Worten, der Leser ist ganz auf die Lesungen der Publication angewiesen, die das Bequeme, das er allein controlliren kann, natürlich richtig angibt. Daß die äußerst mühselige erste Lesung nicht erschöpfend ist, wissen die Herausgeber sehr wol; es wird in der Tat I 1, II 2—5 und IV 2 u. 16 je das erste Wort nicht so auf der Tafel stehn, die übrigens abgesehen von gemeinen orthographischen Schnitzern auch von groben Textfehlern nicht frei ist [2]). Ich kann die Emendation nicht fördern, aber einige Folgerungen für das ganze Gedicht ergibt die Interpretation des Verständlichen.

Die Herausgeber haben die Frage aufgeworfen, ob die vier Columnen in der richtigen Reihenfolge auf der Tafel stünden. Der Inhalt läßt zunächst keinen Zweifel daran, daß II—IV so auf einander folgten. Denn in II ist ein Vogel redend eingeführt, was abgesehen von v. 3 *ἐμῷ πτερῷ*, das in keinem kenntlichen Zusammenhange steht, der erste verständliche Satz lehrt, der etwa so gelautet haben mag. Es ist die Rede von dem Knaben Erichthonios [3])

---

ist es von Interesse, dass die Tafel V. 1101 mit den Scholien den Plural *ξυνῆψαν* (mit ξ) für den Singular *συνῆψεν* (mit σ) der Handschriften, und 1132 mit einer Variante des Marcianus *βάθρων* für *βίᾳ* seines Textes und aller anderen Handschriften gibt. Beides ist richtig; daß solche alte Varianten zu dem Urbestande unserer Ueberlieferung gehören, ist eine längst festgestellte Tatsache. Die eigenen Lesarten der Tafel muß jeder Sachkundige sofort als Fehler erkennen, über die sich nicht zu reden verlohnt.

1) Aus der Hekale des Kallimachos, neue Bruchstücke herausgegeben von Th. Gomperz, Wien 1893, mit zwei Tafeln.

2) II 12 *τόφρα δὲ κοῦραι αἱ φυλακαὶ κακὸν ἔργον ἐπεφράσσαντο τελέσσαι*, darin ist der Artikel ganz unerträglich, und doch wird nichts anderes dagestanden haben; Flickwörter gibt es bei Kallimachos nicht. IV 5 heißt es vom Raben *κυάνεον φῇ πίσσαν ἐπὶ πτερὸν ουλοον ἕξει*, das vorletzte Wort ist ganz deutlich zu lesen; aber *οὐλοόν* für *ὀλοόν* hat hier nichts zu suchen, man erwartet ein Substantiv, zu dem *κυάνεον* gehörte 'er wird über sein Gefieder ein ..... bekommen, blauschwarz wie Pech'.

3) Daß die Sage von dessen Geburt irgendwie in der Hekale vorkam, bezeugt die Subscriptio eines mythischen Scholions AD zu Homer B 547. Daß diesen Subscriptionen keine stärkere Beweiskraft inne wohnt, sollte bekannt sein. Uebrigens deutet *δρόσον Ἡφαίστοιο* II 4 darauf, daß die Vulgärtradition wirklich befolgt war, denn unter dem 'Nass' kann man nur den Samen verstehen.

γενεῇ δ' ὅθεν οὔτε νιν ἔγνων
7 *οὔτ' ἐδάην, φήμη δὲ κατ' ὠγυγίους πεφάτισται*
οἰωνούς, ὡς δῆθεν ὑφ' Ἡφαίστῳ τέκεν αἶα[1]).

Also 'es war die Rede unter den Vögeln der Urzeit' (oder auch aus der Zeit des Ogygos, denn der ist der Vorgänger des Kekrops, unter dem diese Geschichte passirt); das ist so viel, wie 'die ältesten Leute wußten zu erzählen': wir hören eben die Vogelsprache. Vortrefflich stimmt dazu, was die Herausgeber III 13 sehr hübsch erkannt und gedeutet haben, *αὐτὰρ ἐγὼ τυτθὸς παρέην γόνος, ὀγδοάτη γὰρ ἤδη μοι γενεὴ πέλεται.* So kann nur die Krähe reden, die elf Generationen lebt, und sie sagt die Wahrheit, denn wer die Königsliste bei Philochoros nachsieht, findet den Aigeus, unter dem die Krähe erzählt, als achten König hinter Kekrops. Der Name der Krähen erscheint denn auch III 6 am Versende. Daß Kallimachos hier das *αἴτιον* erzählt hat, weshalb die Krähen nicht auf die Akropolis fliegen dürfen, hat Gomperz sofort erkannt und auf die entsprechende Ueberlieferung (Amelesagoras bei Antig. Karyst. 12, Ovid Metam. II 547) verwiesen. Aber es ist ihm entgangen, daß die Geschwätzigkeit der Krähe mit 70—80 Versen nicht genug hatte, sondern der Schluß ihrer Rede erst auf der vierten Columne erhalten ist. Da vertraut ein Femininum einem andern Femininum die Prophezeiung an, daß der annoch schlohweiße Rabe einmal schwarz werden wird, weil er seinem Herrn Apollon indiscrete Mitteilungen über Koronis machen wird. Es braucht nur ausgesprochen zu werden, daß die Erzählerin eben die Krähe ist, die vorher von ihrem eigenen Vorwitze und seiner Bestrafung erzählt hat. Ovid hat unsere Stelle vor Augen gehabt, denn er läßt die Krähe dem Raben, als er gerade die Koronis verraten will, als gutgemeinte Warnung ihr Schicksal erzählen. Es stecken bei ihm zwei Metamorphosen darin; die Krähe ist die Tochter des Koroneus (von Koroneia), die Eule Nyktimene von Lesbos gewesen; aber mit diesen werden wir gut tun den Kallimachos nicht zu beschweren. Wol aber hatte auch Kallimachos die Eule Athenas eingeführt, was selbst abgesehen von attischen

---

1) Abgesehen von den gleichgiltigen Aegyptismus *οὖδέ* in 6 ist 7 am Schlusse gelesen *ἔφαν[α]ύται*, unsicher, wie das Facsimile zeigt. Was ich gebe, ist nicht das Wahre, aber es zeigt, wie der Satz gebildet war. 8 hatte ich nach meinem Stilgefühl *τέκε Γαῖα* vermutet und sehe nun, daß Kaibel das auch getan hat (Aristot. *Πολ. Ἀθ.* 131); aber wie er lasse auch ich die Sache in der Schwebe. Kallimachos konnte mit der Anomalie hier etwas beabsichtigen, weil *αἶα* nie personificirt wird. So sagt Euripides, wo er die gleiche Vorstellung skeptisch behandelt, *οὐ πέδον τίκτει κόρους*, Ion 542.

Localfabeln[1]) nahe genug lag. Wir haben einen Vers von ihm, den die Eule sprach, *ἀλλὰ θεῆς ἥτις με διάκτορον ἔλλαχε Παλλάς* (fgm. 164), und wissen, daß ihr in der Hekale die Verwünschung zugerufen ward *αἴθ' ὄφελες θανέειν ἢ πάννυχον ὀρχήσασθαι* (fgm. 43)[2]): eingeführt war sie also sicherlich; ob sie es aber ist, der die Krähe erzählt, oder besser die Handlung, die im Vogelreiche spielte, noch ausgedehnter war, entscheide ich nicht. Ehe wir weiter gehen, sei noch die Schwierigkeit hervorgehoben und erledigt, daß Asklepios noch nicht geboren ist, während Theseus wider den marathonischen Stier auszieht. Stehen auch beide Sagen in keinem Zusammenhange, so darf doch dem Alexandriner nicht die Nonchalance zugetraut werden, mit der Ovidius die Heroenchronologie durcheinander wirft. Es ist der troische Krieg, der die conventionelle Chronologie bestimmt; in ihm erscheinen Söhne von Asklepios und von Theseus, also sind auch die Väter Zeitgenossen. Es ist ganz in der Ordnung, daß Asklepios noch nicht gezeugt ist, als Theseus Ephebe ist, denn jener ist nicht alt geworden, dieser hat erst am Ende seiner Laufbahn die Mutter des Demophon geheiratet; aber für Kallimachos kommt nicht diese pedantische Rechnung in Betracht, sondern die Erkenntnis, daß die Krähe ein dem Raben in nächster Zeit drohendes Unheil weissagt: das also bedeutet *ἀλλ' ἢ νὺξ ἢ ἔνδιος*[3]) *ἢ ἔσετ' ἠώς*. — Nachdem die Vögel endlich eingeschlafen sind, kommt bald ein *στιβήεις ἄγχουρος*, ein 'Nachbar in der Morgenkälte' und weckt sie. Natürlich ist das auch ein Vogel, und die *στίβη ὑπηοίη*, die Kallimachos im Ausdrucke von Homer (ε 467) entlehnt[4]), die übrigens bekanntlich in Aegypten sehr empfindlich ist, paßt für ihn ganz vortrefflich. Aber ich fürchte, der Dichter wird noch mehr als schon jetzt für die Worte gescholten werden, mit denen der Vogel den nahenden Morgen ankündigt. 'Jetzt gehen die Diebe nicht mehr auf die

1) Michaelis *Pausan. Arc. Ath.* zu Zeile 11 und Z. 34.

2) Noch ein Bruchstück aus dieser Partie ist durch Sallustius bei Suidas erhalten *ἀήσυρον . . . . γόνυ κάμψει* (fgm. anon. 3 Schn.), denn er fügt hinzu, es sei *ἐπὶ ὀρνέων* gesagt.

3) *ἔνδιος* in dieser Form für den Mittag ist neu, aber nicht befremdlich; *ἐνδία· μεσημβρία* hat Hesych. Natürlich erwartet Kallimachos, daß der Leser an *ἔσσεται ἢ ἠὼς ἢ δείλη ἢ μέσον ἦμαρ* denken werde, was Achilleus mit höchstem Pathos von der nahen Stunde seines Todes sagt, Φ 111.

4) Bei Suidas steht *στίβη: πηγυλὶς ἢ πάχνη· Ὅμηρος· στίβη ὑπηοίη, τουτέστιν ὀρθρίνη. καὶ στιβήεις. ἡ ἐπὶ τὴν ἔξω γενομένη ψυχρότης τοῦ ἀέρος.* Allerdings ist das Scholion zu der Homerstelle ähnlich; da aber *στιβήεις* aus der Hekale stammt, ist wol die ganze Glosse aus Sallust, der den Homervers citierte, und Suidas hat nur das Lemma verwirrt.

Jagd, denn die Lampen werden angezündet[1]); der Mann am Ziehbrunnen singt sein Lied, das Rasseln der Lastwagen weckt den Schläfer, der an der Straße wohnt, und das Gehämmere in der Schmiede tut den Ohren weh'. Was in aller Welt geht das die Vögel des Brilettos an? Das ist unleugbar der Morgen in der großen Stadt; der Aerger des Kallimachos steckt darin, dem der Lärm der Straße den Morgenschlummer von den durch *σύντονος ἀγρυπνίη* ermatteten Wimpern scheucht. Die Kritiker vom Schlage des Apollonios, die immer die Majorität bilden, werden über diesen Abfall von der conventionellen epischen Erhabenheit die Stirne runzeln; aber mit ihnen hat es derjenige doch verschüttet, der sein Epos mehr als hundert Verse lang im Vogelreiche spielen läßt; wer aber den angeblich frostigen und gespreizten Dichter versteht, der weiß, daß ihm ein Schalk im Nacken sitzt. Wenn die conventionelle Poesie zur Schilderung des Morgens Nachtigallen und Lerchen, Hahnenkrat und Schwanengesang heranzuziehen gewöhnt ist, so calculirt Kallimachos, daß unter den Vögelchen das umgekehrte gilt. Die Stubenpoeten locken oft genug mit Vogelstimmen, die sie nie gehört haben: da dürfen die Mätzchen in den attischen Bergen auch den Morgen von Alexandreia beschreiben. Daran, daß der Dichter so viele Verse in den Mund eines nicht mit menschlicher Sprache begabten Wesens gelegt hat, erkennen wir seine Manier: hat er doch auch ein Kind im Mutterleibe und gar eine Locke reden lassen. Daß aber Vögel eine so große Rolle spielen, zeigt uns wieder den nahen Zusammenhang, in dem Gelehrsamkeit und Poesie bei ihm standen. Denn wir sollen hier an sein Werk *περὶ ὀρνέων* denken, ganz wie zwei Stellen seiner Hymnen auf sein Werk *περὶ Νυμφῶν* deuten. Uebrigens hatte er schon als Jüngling die Raben krächzen lassen *κοῖα συνῆπται καὶ κῶς αὖθι γενησόμεθα* (fgm. 70).

Columne II—IV gehören also zusammen in eine Episode, die nur durch die allgemeine Beziehung der Krähe zu Athen mit dem attischen Gedichte verbunden ist. Da ist es mislich zu sagen, ob sie auf col. I folgten oder nicht. Die palaeographischen Erwägungen, welche die Herausgeber dazu gebracht haben, diese Frage aufzuwerfen, wiegen nicht sehr schwer, und mindestens unbewußt

[1]) Die Leute standen nun einmal vor Sonnenaufgang auf; die Sonne bestimmte den Tag, nicht die Uhr, weder die richtiggehende noch die von dem gottlosen Staate naturwidrig verrückte, wie heutzutage. Am hübschesten schildert den Morgen das Moretum. Aber die Kritiker fahren fort, die Ekklesiazusen in den Winter zu setzen, weil die Leute in ihnen mit Laternen gehn: gleich als ob die Sitzungen um acht Uhr angefangen hätten und nicht ἕωθεν.

wird sie mehr das Befremden bestimmt haben, daß in Col. I erzählt wird, was man gewohnt war an den Schluß des Gedichtes zu rücken. Die Leute, die den Theseus mit dem bezwungenen Stiere herankommen sehen, entsetzen sich, er aber heißt sie seinem Vater Nachricht bringen; sie begrüßen ihn mit dem Paean und werfen ihm, wie einem siegreichen Athleten, Blumen und Taenien zu. Das sieht auf den ersten Blick nach dem Ende des Abenteuers aus; aber es ist ein Zug darin, der auf anderes deutet. Seinem Gebote gehorcht niemand, sondern sie geben sich der Siegesfreude hin: *αὖθι δὲ μίμνον*. Also es geht kein Bote ab; damit muß der Dichter etwas wollen. Und man errät auch, was. Bekanntlich ist Hekale in Sorge um Theseus gestorben; aber ein Bote an Aigeus würde auch an ihrer gastlichen Hütte vorbeigekommen sein. Also durfte sich die Freudenbotschaft nicht verbreiten. Wir wissen auch durch andere Bruchstücke, daß Theseus überraschend unter das Landvolk trat, das eben die Hekale bestattet hatte [1]). Das war also in einem späteren Teile des Gedichtes. Ferner aber muß bedacht werden, daß nun einmal Marathon von Athen so weit entfernt ist, daß Theseus auf dem Hinwege ein Nachtquartier gemacht hat [2]), also irgendwo auch auf dem Rückwege unterkommen mußte. Nun füllt die Episode der Krähen eine Nacht. Sie paßt also vorzüglich zwischen die erste Begegnung des siegreichen Theseus mit Menschen und den Schluß der Erzählung. Jenes *αὖθι δὲ μίμνον* und die Begrüßung durch die Landleute ist ein retardirendes Moment: die Zeit zu füllen dient das Krähengeschwätz. Aber auch für die Anlage des ganzen Gedichtes ist es sehr erwünscht, wenn

---

1) 251 *παραὶ τίνος ἠρίον ἔστατε τοῦτο.* 131, der hübsche Nachruf an die freundliche Alte, ist von den Nachbarn gesprochen, nicht von Theseus, noch vom Dichter: das lehren die letzten Worte *ξυνὸν γὰρ ἐπαύλιον ἔσκεν ἅπασιν*, nämlich *ἡμῖν*.

2) Zur Einkehr bei Hekale hatte ihn freilich, wie O. Schneider richtig bemerkt hat, ein Gewitter gezwungen, und er 'legte seinen nassen Mantel ab' (fgm. 245. anon. 10. 46; 32 wird dazu nicht gehören, denn der Nordost bringt keinen Regen; und die Wetterwolke sitzt 46 auf dem Aigaleos, im Südwesten für den Wanderer von der Stadt nach Marathon. Den Regen hatten der Hekale wol die Schnuppen der Lampe prophezeit 47). Aber Theseus übernachtete doch bei der Alten, die ihm ihr Bett abtrat und in einem Winkel ihr Lager suchte (anon. 35), ganz wie es jetzt dem Wanderer in jener Gegend passiren kann. Am andern Morgen mag der Boreas, der Schwiegersohn des Erechtheus (anon. 12), gekommen sein, kein Schafwölkchen (*κνηκίς*) am Himmel gestanden haben (anon. 36) und die arme Alte über den kalten Tag (anon. 45) geklagt haben. Die Erinnerungen des Kyrenaeers und Großstädters an seine athenische Studentenzeit, die Wanderungen in den attischen Bergen und die schneidend kalten Winde Athens sind unverkennbar.

dem Nachtquartier des Theseus bei Hekale, das durch die ἀείκλανα χείλεα γρηὸς (anon. 2) sehr viele Verse verbrauchte, ein Gegenstück in der nächtlichen Erzählung der λακέρυζα κορώνη geschaffen ward. Wie man diese mit der Theseusfabel verbinden will, mag dahin stehn; ich traue einem eigenen Einfalle nicht, da die neuen Bruchstücke ein so ganz anderes Bild von dem Gedichte ahnen lassen, als Naeke in seinem trefflichen Buche entworfen hatte.

Naekes Grundfehler war, daß er die kurze Erzählung von Hekale in dem Theseus des Plutarch als Hypothesis des Kallimacheischen Gedichtes angesehen hat. Es darf jetzt gleichermaßen als ausgemacht gelten, daß Plutarch von einer attischen Chronik abhängt, und daß er nie und nimmer einem alexandrinischen Gedichte für vermeintliche Geschichte gefolgt ist. Was bei Plutarch steht, ist das Rohmaterial, aus dem Kallimachos sein Gedicht gemacht hat, aber eben darum können wir bei ihm die specifisch Kallimacheischen und poetischen Züge nicht finden. Mit dem mythischen Stoffe war es dem Kallimachos doch niemals Ernst. Die attische Localsage war nichts als der dünne Faden, an dem er seine Perlen aufreihte, und er mag ihn noch mannigfach verschlungen haben. Naeke legt dem Theseus eine Erzählung seiner Jugenderlebnisse in den Mund, die so ziemlich das enthalten haben müßte, was uns am schönsten die attischen Schalenmaler erzählen. Aber von den meisten Abenteuern hat er selbst keine Spur; auch von einer Erzählung des Theseus fehlt wenigstens eine sichere[1], so oft wir auch Hekale redend finden. Und wenn nicht sie, so doch nicht der Trozenier Theseus, sondern ein Athener hat von Kerkyon gesagt ὅς ῥ' ἔφυγεν μὲν 'Αρκαδίην, ἡμῖν δὲ κακὸς παρενάσ-

---

1) Es mag sein, daß er sich bei Hekale zuerst selbst bedienen wollte und sagte φράσον δέ μοι εἰς ὅ τι τεῦχος χεύωμαι ποσὶ χύτλα καὶ ὁππόθεν (anon. 66), oder daß er von jemand erzählte, der ihm bei dem Gymnasium des Apollon Lykeios begegnet wäre, ἐγὼ δ' ἤντησα Λυκείου καλὸν ἀεὶ λιπόωντα παρὰ δρόμον 'Απόλλωνος (141); aber beides ist unsicher und führt nicht auf eine solche Erzählung.

2) Kerkyon stammt aus Arkadien, und sein Ringplatz war nicht weit von Eleusis. Pausan. I 39, Plut. Thes. 11. Wertlos ist ein Lukianscholion, das wörtlich mit Pausanias übereinstimmt, also aus ihm stammt, denn der Stil ist sein eigen; Wellmann *de Istro* 77 hätte das nicht anders fassen sollen und noch weniger die arkadische Herkunft Kerkyons über Istros aus Kallimachos ableiten (42). Der Poet gehörte nicht in die 'Ατθίδων συναγωγή, hat aber seine Herleitung auch nicht erfunden. Kerkyon der Arkader war wenigstens schon dem Antimachos bekannt, der ihn als Großvater des Parthenopaios einführte (schol. Eur. Phoen. 150). Mitsammt seinem Sohne Hippothoos steht er in der arkadischen Königsliste des Pausanias, und Hippothoos nimmt im tegeatischen Giebel des Skopas an der kalydonischen Jagd Teil (Paus. VIII 5 und 45). Dieser Hippothoos heißt in Attika Hippothon, ist Enkel des Kerkyon und Sohn des Poseidon,

σατο γείτων (143)[2]), so daß man die Schilderung seiner παλαίστρα diesem auch nicht leicht in den Mund legen wird, ἧχι κονίστραι ἄξεινοι λύθρῳ τε καὶ εἴαρι πεπλήθασι (anon. 20); obwol es sich auch gut machen würde, wenn sie über den bösen Nachbaren klagte, Theseus seine Bestrafung erzählte. Skiron kam vor, aber wir wissen nur, daß Kallimachos den Namen richtig schrieb; Skylla kam aber auch vor, und sie gehört nicht zu dem Theseusabenteuer, aber vielleicht zu Skiron[1]). Ortsnamen sind aus der Hekale so viele angeführt, attische[2]) und argolische[3]), daß ein oder zwei megarische[4]) unmöglich eine Reisebeschreibung beweisen

---

was bei Antimachos Kerkyon ist. Wir haben also dieselben Figuren an zwei Orten. Die Eleusinier werden freilich ihren Heros nicht aus Arkadien abgeleitet haben, sondern ihrem Königshause angegliedert: so tat es Choirilos der Tragiker, der ihn zu einem Bruder des Triptolemos macht (bei Pausan. I 14). Aber für die Eleusinier war der Heros auch so wenig ein Frevler wie Skiron für die Megarer. Die Theseussage ist so alt, daß sie wol auch den Eleusinier so noch betrachten konnte; aber als Eleusis in Attika incorporirt war, mußte man diese Gegensätze verwischen, und da Kerkyon nun einmal als arger Feind des Theseus fest stand, bot sich der Ausweg von selbst, daß er ein fremder Zuwanderer wäre. Vermutlich war er aber wirklich fremd. Wenn R. Loeper (Athen. Mitteil. 17, 335) mit Recht Azenia bei Eleusis angesetzt hat, was mindestens sehr wahrscheinlich ist, so zeugt dieser Name, der zu den Ἀζῆνες gehört, für arkadische Zuwanderung.

1) Σκίρων (fgm. 378) darf man in die Hekale ziehen, da der Scholiast zu Eur. Hippol., der sein Vorkommen bei Kallimachos auch erwähnt, offenbar auf die Hekale als eine geläufige Darstellung von Theseussagen verweist (zu V. 11 und 38). Es ist interessant, daß es eine falsche Etymologie, von κείρειν, war, die den Aristophanes von Byzanz zu dem Fehler Σκείρων bestimmte. Denn zu κείρων gehört die Megarerin-Skylla, die in die κειρίς verwandelt ward. Entweder hat diese Sage zu der Etymologie geführt, oder gar diese zu der Wahl der κειρίς für die Metamorphose Skyllas, die natürlich der alten Sage ganz fremd war. Uebrigens schließen sich fgm. 184 und anon. 39 gut zusammen, Σκύλλα γυνὴ κατάκασσα καὶ οὐ ψύθος οὔνομ' ἔχουσα πορφυρέην ἤμησε κρέκα.

2) Ἀλιμοῦς πόλις (387), πολυπτῶκές τε Μελαιναί (56 = 528), Τρινέμεια (57), Κωλιάς (66 g, zu identificiren mit Κωλιάδος κεραμῆες anon. 38), Δεκελειόθεν (234). Salamis κολουρίς (66 h). Von attischen Culten ist namentlich Dionysos bedacht, der von Limnai (66 a) und der Eleuthereus (Sallust bei Reitzenstein *ind. lect.* 90/91, S. 15). Aber auch Athenas Arrhephoren und ihre heiligen Rinder und die beiden eleusinischen Göttinnen kamen vor (Reitzenstein ebenda). Auch die beiden Demen Kolonos 428.

3) Der Berg Λύρκειον 55; αὐτίκα Κενθίππην τε πολύκρημνόν τε Προσύμναν (477); da dieses Bruchstück sicher der Hekale zufällt, muß auch der Fluß Asterion 166 dazugehören, den Theseus freilich auf seiner Reise nicht berühren konnte, da er in der Nähe des Heraions fließt. Dann die Orte der dryopischen Küste 186, die man hierher zieht, weil 110, über den Aigialos, sicher in die Hekale gehört.

4) Ἰαπίς, χαράδρα Ἀττικὴ εἰς Μέγαρα φέρουσα (54), konnte bei Kerkyon vor

können. Die trozenische Jugend des Theseus kam zwar vor, war aber nicht von diesem erzählt[1]). Auf den Kreterzug deutet kaum etwas[2]), auf Medeia höchstens unsicheres[3]).

Der Gedanke, die Hekale zu einer Theseis zu machen, findet also in den Resten des Gedichtes wenig Anhalt; das würde doch auch sehr übel zu der Weise des Dichters stimmen. Aber auch das polemische Prooemium, das gut Kallimacheisch sein würde, ist äußerst schwach fundirt. Sehr viele darauf bezogene Bruchstücke können der Hekale nicht mit mehr Wahrscheinlichkeit beigelegt werden als den Aitia oder gar den Epigrammen. Die Bekämpfung derjenigen, die den Apollon von Helios unterscheiden (48), mit der wol die Bekämpfung der Torheit zusammenhängt, denselben Planeten als Abendstern zu lieben, als Morgenstern zu hassen (52), beweist ein solches Prooemium keinesfalls: denke man doch daran, in welcher Weise die Lehre über die Herkunft der Nymphen im delischen Hymnus herangezogen wird. Somit wird es zunächst das geratenste sein, daß wir uns eingestehn, wie viel wir noch nicht wissen. Einiges hat das Wiener Bruchstück gelehrt; die Fabel in ihren äußersten Umrissen steht fest, und dann haben wir reichliches Material, von der Einkehr des Theseus bei Hekale

---

kommen. *Λεύκου πεδίον* anon. 192 kann einem anderen Dichter oder Gedichte eben so gut gehören.

1) Hecker hat anon. 331 mit 51a hübsch verbunden, *εὖτ' ἂν ὁ παῖς ἀπὸ μὲν γύαλον λίθον ἀγκάσσασθαι ἀρκίος ᾖ χείρεσσιν, ἑλεῖν δ' Αἰθήψιον ἄορ*; sicher ist es freilich nicht, da er das überlieferte *ἑλών* hat ändern müssen. Aber der für die Hekale sichere zweite Vers und 66 und 313, die eben dahin gehören, sprechen auch wider eine Erzählung des Theseus.

2) 467 ist ein Hexameter, der eben so gut in den Aitia stehn konnte, und daß in ihm der Tribut der Inseln an Minos erwähnt wird, spricht nicht für die Hekale.

3) Reitzenstein hat das freilich gemeint. Aber daß die Fassung der Sage, welche er voraussetzt, dadurch ausgeschlossen wird, daß Theseus als Sohn des Aigeus dem Landvolke bekannt ist, hat bereits Gomperz bemerkt. Und anon. 62 *Αἴθρην, τὴν εὔτεκνον ἐπαγρομένῃσ'* (lies *ἐν ἀγρομένῃσ'*) *ὑδέοιμι* spricht eine Frau, die die Aithra wegen ihres Sohnes in den Kreisen ihrer Gefährtinnen preisen will: das ist doch wol Hekale (oder ist auch das ein Vogel?), also wird 51 auch diese angehn, *ἣ δ' ἐκόησεν οὕνεκεν Αἰγέος ἔσκε.* Es bleibt *ἴσχε τέκος μὴ πῖθι*, 510, von dem ich nicht bestreiten will, daß es gut für den bekannten *ἀναγνωρισμός* passen würde. Einmal wird eine Frau sehr zornig (an. 63), aber das ist doch wol dieselbe, die ruft (an. 58) *τοῦ μὲν ἐγὼ ζώοντος ἀναιδέσιν ἐμπήξαιμι σκώλους ὀφθαλμοῖσι καὶ εἰ θέμις ὠμὰ πάσαιμι.* Ich weiß dafür keine Beziehung; aber auf Medeia paßt es nicht; daß es jemand auf den Stier bezogen hat, von dem ein beefsteak à la tartare zu essen schwerlich *ἀθέμιτον* sein würde, ist nur possierlich. Daß er 219 misdeutet hat, wird Reitzenstein längst selbst gesehen haben.

ein Bild zu gewinnen, der berühmtesten Scene des Gedichtes [1]). Aber sonst mag uns die Krähe lehren, wie aussichtslos es ist, die spielende Erfindung eines Dichters, der nicht auf der Heerstraße zu gehen liebt, fassen zu wollen, da wir ja doch nur das Conventionelle zu reconstruiren im Stande sind [2]).

Rüttelt uns so die neue Entdeckung mehr heilsam aus dem bequemen Glauben an gesicherten Besitz auf, so bringt sie doch in einer bis zum Ekel oft behandelten Frage die Entscheidung. In der Hekale erzählt ganze hundert Verse lang eine Krähe. Wir wissen zwar noch nicht, wie die Episode mit der Haupthandlung verknüpft war, aber schon ihr Umfang zeigt, daß der Dichter großen Wert auf sie gelegt hat; und wie sehr er sich bemüht hat, die Vögel als solche zu charakterisiren und seine Erfindung auszunutzen, ist wol erkennbar. Apollonios führt im dritten Buche der Argonautika auch eine Krähe ein; das macht sich in seinem kyklischen Epos wunderlich, und die Modernen haben sich mit dieser Versreihe abgequält, während die Erläuterung des Gedichtes sonst kaum in Angriff genommen ist. Das Ende ist auch hier, wie so oft, der Versuch der Aussonderung gewesen [3]). Das kommt dabei heraus, wenn man einen Dichter liest um Material für eine litterargeschichtliche Untersuchung zu finden. Wie gegen die oft durch ähnliche Vorgänge entstehenden Conjecturen hilft auch hier nichts als eine Interpretation des ganzen Zusammenhanges, der misdeutet ist; was meistens nicht mit zwei Worten abgetan werden kann.

Apollonios erzählt folgendes. Die Argonauten, denen Iason den Bescheid des Aietes mitgeteilt hat, sind ziemlich verzweifelt, da macht der Seher Mopsos auf Grund eines Vogelzeichens den Vorschlag, sich der Hilfe der Aphrodite zu bedienen und Medeias Beistand zu erbitten (540—54). So tun sie; Argos bestimmt durch Vermittelung der Chalkiope die Medeia, dem Iason ein Stelldichein

---

1) Ich möchte nur eine Kleinigkeit zufügen, an *ἐκ δ' ἄρτους σιπύηθεν ἅλις κατέθηκεν ἑλοῦσα* (454) schließt trefflich an *οἵους βωνίτῃσιν ἐνικρύπτουσι γυναῖκες* (157). Anderes verschweige ich lieber.

2) Weiter wird ganz besonders helfen, wer für die Bruchstücke etwas findet, die jetzt ganz fremdartig scheinen, z. B. die Anrufung der Adresteia (290 + 45). Wer erhält 10 Astragalen zum Lohn? (238; auf die Kydippe darf man das Bruchstück, das Suidas aus Sallust hat, nicht mehr beziehen). Es gehört doch wol dazu das keinen vollen Satz ergebende *λάτρον ἄγειν παλίνορσον ἀεικέα τῷ κεραμῆι* (an. 42). Geht es die *Κωλιάδος κεραμῆες* an? Was will die Rute 'gleich geeignet das Feld zu messen und den Ochsen zu treiben' (214), die Bestellung des Feldes (183), das Handwerkszeug des Zimmermanns (159), und wieder Feldmessung (158)?

3) Linde *de diversis recensionibus Apollonii Rh. Argon.* (Hannover 1884), S. 34.

im Tempel der Hekate zu gewähren, und zwar ist ausgemacht, daß Iason allein kommen soll; wenigstens rechnet Medeia darauf (908). Iason bedarf für den Weg zum Tempel eines landeskundigen Führers; das kann nur Argos sein. Außerdem geht aber Mopsos mit „der sich gut darauf verstand Vögel zu deuten, wenn sie erschienen, aber auch mit seinen Gefährten auf dem Wege sich zu beraten" [1]). Nun läßt Hera den Iason von einer so außerordentlichen Schönheit strahlen, daß sich seine Gefährten sogar darüber verwundern, und Mopsos freut sich „denn er konnte sich nun alles so ziemlich denken", d. h. er beweist seine eben gerühmte Klugheit, da er richtig schließt, Medeia werde dem schönen Manne alles zu Gefallen tun. Da schlägt auf einer Pappel am Wege eine Krähe mit den Flügeln und spricht zu Mopsos (der als Seher allein ihre Sprache versteht) nach Heras Geheiß „das ist kein berühmter Seher, der nicht mal so viel begreift, wie schon die Kinder wissen, daß ein Mädchen sich genirt einem Jüngling ihr Herz zu öffnen, wenn andere dabei sind; weg mit dir törichtem Seher, Aphrodite und die Eroten sind dir nicht hold". So sprach die Krähe scheltend; Mopsos lächelte, als er die gottgesendete Stimme vernahm, und sagte „geh nur allein in den Tempel, Iason; du wirst das Mädchen durch die Eingebung Aphrodites sehr freundlich finden; wir wollen hier warten". Es folgt das entscheidende Gespräch im Tempel. Von den Gefährten Iasons ist nur noch im allgemeinen die Rede (1148. 1163).

Wer sich diese Episode überlegt, der muß bald einsehen, daß die Teilnahme des Mopsos an der Wanderung vom Dichter vorbereitet ist, da dieser den ganzen Plan ausgedacht hat, daß er aber nur mitgeht um wieder entfernt zu werden, und entfernt wird er durch die Krähe. Auf diese also kam es dem Dichter an. Wenn Mopsos ferner an der Stelle, wo er als Begleiter eingeführt wird, belobt wird, sowol wegen seiner Fähigkeit die Vögel zu deuten wie wegen seiner sonstigen Ueberlegsamkeit, so bereitet damit der Dichter des näheren vor, was er mit ihm machen will, und wirklich beweist Mopsos erst seine Klugheit, da er sich von selbst alles wol zu reimen weiß, und dann vernimmt er den Rat der Hera. Gut oder schlecht also, beabsichtigt hat Apollonios die Scene so wie wir sie lesen, ohne den Rat der Krähe aber ist die Einführung des Mopsos zwecklos. Dieses Zeichen, das Hera sendet, entspricht auch vollkommen dem anderen Vogelzeichen, das den Mopsos überhaupt darauf gebracht hat, Medeias Zuziehung zu empfehlen. Der Unterschied liegt nur

1) Der Scholiast hat diesen Vers 918 gröblich misverstanden.

darin, daß jenes in conventionell homerischer Weise stilisirt ist; es ist eine von einem Falken verfolgte Taube. Hier aber redet die Krähe den Mopsos mit Scheltworten an. So sehr die Krähe auf die Dummheit des Mopsos schilt, Hera, die sie sendet, muß den Rat nicht für überflüssig gehalten haben, und Mopsos ist auch gar nicht verstimmt, sondern lächelt über die Scheltworte und befolgt den Rat. Darin liegt, daß der Dichter, der zudem den Verstand und die Seherkraft des Mopsos noch eben geflissentlich hervorgehoben hat, die Lection, die die Krähe dem Mopsos gibt, nicht ernsthaft meint. Wenn Hera ihm den Rat einfach in die Seele legte, so würde er lauten „bedenke, daß sich Medeia geniren wird, wenn ihr zugegen seid, also schicke den Iason allein in den Tempel“. Daß er die Form einer Scheltrede annimmt, ist also eine Umformung, die mit der Einführung der Krähe zusammenhängt. Mit anderen Worten, daß sie schimpft, soll die Krähe als Krähe charakterisiren, es dient der *ἠθοποιία*. Man braucht sich auf einer Spazierfahrt nur eine Krähe anzusehen, wie sie mit schwerfälligem Flügelschlage auf den Zweigen einer Chausseepappel hin und her flattert und ein impertinentes Krächzen herunter sendet, um zu begreifen, daß sie einen Auftrag Heras etwa so in ihren Stil umsetzen wird, wie sie es bei Apollonios tut. Und so ist denn bei diesem alles aus sich heraus verständlich;

1) Auch ich habe mich früher durch einen Anklang mit dem Apollonhymnus berücken lassen. *οὐκ ἄγαμαι τὸν ἀοιδὸν ὃς οὐδ' ὅσα πόντος ἀείδει* klingt äußerlich an *ἀκλειὴς ὅδε μάντις ὃς οὐδ' ὅσα παῖδες ἴσασιν* an; aber daß man bei Apollonios erst zum Abschlusse des Sinnes kommt, wenn man *οἶδε νόῳ φράσσασθαι* dazu nimmt, wirkt schon dagegen. *οὐδέ* ist bei Apollonios simpel, bei Kallimachos ist es sehr gewählt gesagt, „der nicht einmal so viel wie —“ fängt der Neid an, er will so die Beschränktheit am Talente des Kallimachos tadeln. Als er aber 'wie viel' bestimmen will, drängt sich ihm ein Ausdruck des Unbegrenzten auf, *ὅσα πόντος* und so entsteht etwas Inconcinnes, aber dadurch gerade am meisten sagendes. *οὐ τόσα* oder *οὐχ ὅσα* ist falsch: oder ist positiv die Aufgabe des Dichters *ὅσα πόντος ἀείδειν*? So erweist sich der Anklang der Wörter noch mehr als trügerisch. Aber entscheidend ist erst, daß wer auch immer den Hörer an des anderen Vers mahnen wollte, in den indifferenten Wörtern nicht wechseln durfte: *ἀκλειὴς ὅδ' ἀοιδός* oder *οὐκ ἄγαμαι τὸν μάντιν* müßte es heißen. Kaibels Vermutung (Herm. 28, 54), daß bei Aelian N. H. VI 58 eine versteckte Polemik wider Kallimachos vorliege, in der *οὐκ ἴσασιν ὅσα ὄρνιθες* auf diese versteckte, von Aelian also verstandene, Polemik des Apollonios ginge, kann ich in keinem Stücke billigen. Es handelt sich ja dort wirklich um einen Vogel, der klüger als die Menschen ist. Ich sehe in dem ganzen Passus nur dieselbe ächt aelianische Moral, die alle seine Bücher unerträglich macht, und wenn er das Epigramm 2 des Kallimachos benutzt haben sollte, so wäre das nur ein Beleg mehr für seine abgeschmackte Stilmischerei.

ob wir es sehr witzig finden, ist unsere Sache, kann aber die Erklärung nicht beeinflussen, und damit verliert jeder Versuch, litterarische Polemik in den Worten der Krähe zu finden, seine Berechtigung. Nichts bleibt, als die Abweichung von dem conventionellen epischen Brauche, die in der Einführung des redenden Tieres und in seiner Charakteristik liegt. Das ist an einem Apollonios in der Tat fragwürdig, und eben das findet nun in der Scene der Hekale seine vollkommene Erklärung. Apollonios imitiert den Kallimachos. Daß er das in den Argonautika sehr oft tut, ist von den Scholiasten angemerkt und ist für jedermann klar, der die Bruchstücke mit dem Epos zusammenhält. Ganz und gar gescheitert sind alle Versuche, in unsern Argonautika Spuren von der Feindschaft des Schülers wider seinen Lehrer zu finden; nur diese Krähengeschichte wollte sich nicht fügen. Sie stellt sich nunmehr zu allen anderen Indicien als das deutlichste: die Argonautika sind mit Nachahmung der Hekale verfaßt, als Apollonios noch an Kallimachos glaubte, oder vielmehr in dem Wahne befangen war, er könnte Kallimacheisch und Homerisch zugleich dichten, und ihre Ueberarbeitung, von der wir übrigens nur ganz wenige zuverlässige Spuren haben, ist gar nicht tief gegangen, jedenfalls nicht von der Feindschaft inficirt, die einmal zwischen den beiden Dichtern bestanden hat. Da nun auch die polemische Einleitung zur Hekale lediglich auf einer unerweislichen modernen Combination beruht (während die zu den Aitia außer Frage steht) so dürfen wir schließen, daß die Hekale vor der Zeit des großen Streites um den poetischen Stil entstanden ist, und das Zeugnis des Sallustius am Schlusse der Scholien zum zweiten Hymnus *ἐγκαλεῖ διὰ τούτων τοὺς σκώπτοντας αὐτὸν μὴ δύνασθαι ποιῆσαι μέγα ποίημα, ὅθεν ἠναγκάσθη ποιῆσαι τὴν Ἑκάλην* ist falsch, wenn es chronologisch genommen werden soll. Uebrigens war die Hekale zwar im Sinne des Sallust ein *μέγα ποίημα*, aber in dem des Kallimachos eine *ὀλίγη λιβάς*, sonst konnte er den Schluß des Apollonhymnus gar nicht schreiben. Auf die Verszahl [1]) kommt es dabei viel weniger an als auf den Stil, und der ist wahrlich dem möglichst entgegensetzt, den der Neid von dem rechten Dichter fordert.

Der Epilog, ein unentbehrlicher Teil des Apollonhymnus, ist einfach interpretirt ein Ausdruck für den Triumph des Dichters.

1) Da die Bücher des Apollonios noch die Verszahl 1000 überschreiten, die verboten ist, seitdem die Ilias in 24 Bücher unter 1000 geteilt ist, so kann auch die Hekale länger gewesen sein, nur war sie eben ein Buch. Mit den Zahlen der byzantinischen Paraphrase des Marianus kann ich nichts anfangen.

Φθόνος sucht ihn bei Apollon herabzusetzen und erhält einen Fußtritt. Dafür bedankt sich der Dichter und wünscht, daß Momos dahin gehen möge, wohin Phthonos gegangen ist[1]). Wo ist das? Sallust muß im ganzen richtig verstanden haben, daß der Momos *in malam rem* gehen sollte, *εἰς φθόρον,* denn unsere Ueberlieferung hat *φθόνος* durch *φθόρος* verdrängt, doch wol aus einem Scholion[2]). Aber der Vers hat Salz und Sinn nur dann, wenn der Hörer weiß, wo der Neid wohnt. Das wußte damals jeder Gebildete, und wir sollen es auch wissen, denn es steht in Platons Phaidros *φθόνος ἔξω θείου χοροῦ ἵσταται* (247), und noch Babrius weiß, daß auch Momos aus dem Götterkreise gestoßen ist (59, 6). Der Schlußvers, mit dem Kallimachos in die Bahnen des homerischen Hymnus einlenkt, weist alle bösen Neider von ihm nicht nur, sondern auch von der Gemeinde, für die das Cultlied bestimmt ist, fort. Den Uebergang schafft ihm das Strafgericht, das der Herr der Poesie an den Verkleinerern seiner Kunst geübt hat. Nur deshalb sind *Φθόνος* und *Μῶμος* unterschieden. Jenes Gericht aber wird als Tatsache, als eine der Manifestationen der apollinischen Gottheit, erzählt. Wir folgern somit, daß Kallimachos siegreich aus dem Streite hervorgegangen sein muß, als er so dichtet. Die Deutung, Apollonios ist aus Alexandreia vertrieben, ist für das Gedicht freilich zu eng, aber tatsächlich wird es richtig sein, daß er damals das Feld geräumt hatte. Daß der Hymnus für Kyrene gedichtet ist, nachdem Ptolemaios ein Anrecht auf diese Stadt erlangt hatte, aber ehe sie als Brautschatz Berenikes wirklich aegyptisch geworden war, ergibt eine verständige Erklärung mit Notwendigkeit (ich mag jetzt nicht tiefer darauf eingehen), und damit ist die Datirung 257—50 etwa gegeben; also fällt der Streit mit Apollonios einige Zeit vorher, und die Hekale wiederum unbestimmt wie viel vor diesen. Sie zeigt freilich, so weit wir urteilen können, die charakteristische Kunst des Kallimachos in ihrer Vollkommenheit, aber sie kann ganz wol aus den siebziger Jahren sein. Ein Erzeugnis seines Alters ist sie gewiß nicht; übrigens hat mich alles, was ich von Kallimachos habe

---

1) *ὁ Μῶμος ἵν' ὁ φθόνος ἔνθα νέοιτο* ist mit genau derselben Kürze gesagt wie Theokr. 18, 17 *ἅπερ ἄλλοι ἀριστέες ὡς ἀνύοιτο*, das Vahlen vor den Anfechtungen der Kritiker geschützt hat.

2) *ἵν ὁ φθόρος ἔνθα νέοιτο* würde höchstens dann erträglich sein, wenn der *φθόρος* ein festes Domicil hätte. Ueber die Glaubwürdigkeit einer Oxforder Handschrift der Scholien zu Gregor, aus der *φθόνος* angemerkt ist, bin ich nicht unterrichtet. Daß das richtige leicht durch Vermutung gefunden werden konnte, lehrt der Augenschein, da es in interpolirten Kallimachoshandschriften steht.

lernen können, längst zu der Ansicht geführt, daß er in den letzten Jahrzehnten seines Lebens nur noch einzeln, bei besonderen, meist höfischen Anlässen, zur Poesie zurückgekehrt ist, (von den Eingebungen des Momentes, den Epigrammen, abgesehen), und für den vielbeschäftigten Gelehrten dünkt mich das auch das angemessene.

Von dem Neide des Apollonios haben wir entweder überhaupt kein Dokument oder nur das Epigramm, dessen Verständnis durch eine fast allgemein angenommene Conjectur zerstört wird.

Καλλίμαχος, τὸ κάϑαρμα, τὸ παίγνιον, ὁ ξύλινος νοῦς
αἴτιος, ὁ γράψας Αἴτια Καλλιμάχου.

so ist es an zwei Stellen der Anthologie (XI 275 und zu VII 43) und von Eustathius zur Odyssee *α* 349 überliefert, der *αἴτιος* darin als *κολάσεως ἄξιος* faßt. Das würde sich freilich nicht mit dem Genetive *Καλλιμάχου* im Pentameter vertragen und mindestens einen sehr späten Ursprung des Gedichtes beweisen. Aber Eustathius, der diese Erklärung von sich aus giebt, hat mit ihr so wenig Recht wie Bentley mit der Conjectur *ὁ γράψας Αἴτια Καλλίμαχος*. Der Verfasser des Epigramms hat seinen guten oder schlechten Witz daran geheftet, daß die Beziehung des Genetivs in dem Titel *Αἴτια Καλλιμάχου* sprachlich nicht ohne Anstoß ist. Denn *αἴτιον* ist wirklich ein Wort, das eine Bestimmung verlangt um verständlich zu sein, es fordert eines genetivus objectivus. *causae Callimachi*, das muß zunächst als *causae efficientes Callimachum* verstanden werden. Darum erweitert der Verfasser des Distichons den Titel so, daß er sagt *Callimachus causa* (*auctor*) *est qui scripsit „Causas Callimachi“*. Indem er aber dem Kallimachos eine Anzahl Praedicate gibt, kommt der Witz heraus, daß für die Aitia des Kallimachos Niemand etwas könnte als die Spielerei und das hölzerne Ingenium des verfluchten Kallimachos, und damit will er nicht bloß die poetische Qualität der Gedichte herabsetzen, sondern auch die Gelehrsamkeit und so zu sagen die Zuverlässigkeit des Forschers, der sich berühmt hatte, für alle seine *αἴτια* Zeugen zu haben. Das Epigramm ist wol verständlich, und es ist ein wirkliches Epigramm, die Aufschrift eines Buches, eine Form der *ἐπιγραφή*, die, so viel mir bekannt ist, Kallimachos, der Bibliothekar, geschaffen hat. Daß Apollonios der Rhodier diesen Witz, der mir sehr wenig gefällt, habe machen können, kann ich nicht bestreiten: aber es ist nicht möglich zu bestimmen, ob die Ueberschrift der Pfälzer Handschrift mit *Ἀπολλωνίου γραμματικοῦ*

ihn gemeint habe[1]). Den Titel Grammatiker verdiente er so gut wie Simias, den Strabon 655 so nennt; aber nur in recht alter Zeit konnte dies Distinctiv für den Dichter bezeichnend scheinen, und über die Herkunft des Distichons gestattet seine Stellung in der Anthologie keinen Rückschluß. Darauf daß es bei Eustathius, der so viele Eigennamen von Autoren unterdrückt, anonym ist, kommt gar nichts an, und nicht viel darauf, daß es bei Planudes ἄδηλον ist. Somit ist mit unsern Mitteln keine Sicherheit erreichbar. Dann dürfen wir aber auch mit dem Distichon als einem Zeugnisse für den Neid und den Witz des Apollonios von Rhodos nicht rechnen; ich persönlich halte es für einen späten Grammatikerscherz.

1) Einen Ἀπολλώνιος γραμματικός führt z. B. Porphyrios in seinen philologischen Gesprächen (Euseb. Pr. ev. X 464) ein; der lebte also in Athen um 240. Um jene Zeit schrieb Menelaos von Aigai eine Thebais (Ruhnken *de vita Longini* cap. 10), und ein anderer Dichter Zotikos machte Conjecturen zu Antimachos (Porphyr. vita Plotin. 9): eine Zeit, die sich für Antimachos interessirt, ist dem Kallimachos notwendigerweise feindselig.

Ueber das Verhalten der Oxime cyclischer Ketone (I).

von

O. Wallach.

Bereits vor einiger Zeit habe ich Beobachtungen mitgetheilt, welche beweisen, daß die Oxime cyclischer Ketone nicht weniger zur Isomerisation geneigt sind, als die Oxime, welche sich von Kohlenstoffsystemen mit kettenförmiger Anordnung der Kohlenstoffatome ableiten. Es war nun die wichtige Frage zu entscheiden, ob jene Isomerisations-Fähigkeit in stereochemischen Verhältnissen ihre Erklärung finde, oder ob sie auf Bindungsverschiebungen der Atome im Molecül zurückzuführen sei.

Für die bis jetzt näher untersuchten Fälle hat sich das letztere mit voller Schärfe nachweisen lassen. Um so erstaunlicher erscheint aber die Leichtigkeit, mit welcher diese intramolekularen Umlagerungen sich in jenen Verbindungen vollziehen. Früher wurde Chlorphosphor benutzt, um die Reactionen einzuleiten. Ich habe nun gefunden, daß man noch viel bequemer und sicherer zum Ziel kommt, wenn man die umzuwandelnden Oxime einfach in concentrierte Schwefelsäure einträgt, die zur Beschleunigung des Vorganges auf höchstens 50° erwärmt zu werden braucht.

Vollkommen abgeschlossen ist bereits eine von mir gemeinsam mit Herrn H. Schrader ausgeführte Untersuchung über die Umwandlung, welche das Carvoxim in Berührung mit Schwefelsäure erleidet und über diesen Vorgang soll zunächst berichtet werden.

In 20 ccm. reine conc. Schwefelsäure wurden 10 Gr. Carvoxim in kleinen Portionen eingetragen. Die Flüssigkeit erwärmt sich dabei erheblich und färbt sich dunkel, auch nimmt man den Geruch nach schwefliger Säure wahr. Wenn man aber Sorge dafür trägt, daß die Temperatur nicht allzu hoch steigt, findet eine weitergehende Zersetzung der Substanz doch nicht statt. Sobald alles Carvoxim in der Säure gelöst ist, verdünnt man mit Wasser. Es findet dabei keinerlei Ausscheidung statt und man kann die stark sauere Flüssigkeit kochen, ohne daß auch nur der geringste Geruch nach Carvon auftritt: der beste Beweis dafür, daß keine Spur von Carvoxim sich der Umlagerung entzogen hat. Wird nun die sauere Flüssigkeit mit Alkali neutralisirt, so fällt eine Base in fester Form aus. Dieser Körper erwies sich aber so eminent veränderlieh an der Luft, daß seine Isolirung anfangs die größten Schwierigkeiten bereitete. Selbst wenn die Abscheidung der Base in einer Wasserstoffatmosphäre erfolgte, gelang es nicht sie analysenrein herzustellen. Sie färbte sich vielmehr schnell violett und nahm eine weiche Consistenz an. Ein einfacher Kunstgriff hat es indeß ermöglicht, die Schwierigkeiten, welche in Folge dieser Erscheinungen die Untersuchung der basischen Verbindung bot, zu beseitigen. Da die Veränderlichkeit der aus dem Carvoxim entstandenen Verbindung augenscheinlich durch ihre leichte Oxydirbarkeit in feuchtem Zustande bedingt ist, wurde mit bestem Erfolg versucht, die Abscheidung in einem stark reducirendwirkenden Medium vorzunehmen. Zu dem Zweck wurde das ursprüngliche Reactionsproduct vor der Abscheidung der Base nicht mit Wasser, sondern mit einer concentrirten Schwefligsäure-Lösung verdünnt und erst dann neutralisirt. Nun fiel die Base farblos aus, konnte leicht trocken und bei geschicktem Umkrystallisiren erst aus Methylalkohol und dann aus trockenem Aether in fast farblosen, bei 173°—174° schmelzenden Krystallnadeln erhalten werden. Die Analyse dieses Präparats ergab folgende procentische Zusammensetzung:

Berechnet für $C_{10}H_{15}NO$	Gefunden	
C = 72.69	72.41	72.06 9%
H = 9.11	9.59	9.52 —
N = 8.51	8.26	— —

Die Base hat also die gleiche Zusammensetzung, wie das angewandte Carvoxim. In diesem hat sich durch die Berührung mit Schwefelsäure eine intramoleculare Umlagerung der Atome vollzogen und zwar ist die Umwandlung eine quantitative.

Nachdem die Isolirung der Base in reinem Zustand erst gelungen war, hielt es nicht besonders schwer, festzustellen, in welcher Anordnung die Atome in ihr enthalten seien. Die Base ließ sich diazotiren und mit Phenolen zu schönen rothen Farbstoffen paaren. Es war demnach eine primäre aromatische Base. Sie löste sich nicht nur in Säuren, sondern, wenn gleich weniger leicht, auch in Alkalien. Der Sauerstoff mußte also in Form von Hydroxylsauerstoff gebunden sein: kurz, man hatte es mit einem Amidophenol zu thun. Daraus erklärte sich auch die Empfindlichkeit des Körpers gegen den Einfluß des atmosphärischen Sauerstoffs. Die relative Stellung, welche die einzelnen Gruppen in der Base zu einander einnehmen, ward in folgender Weise ermittelt. Die schwefelsaure Lösung der Base wurde diazotirt und dann mit Wasser gekocht. Dabei mußte die Bildung eines zweiatomigen Phenols erwartet werden. Statt dessen entstand sogleich ein gelber, mit Wasserdämpfen leicht flüchtiger Körper von den Eigenschaften eines Chinons. Hydroxyl- und Amidogruppe hatten sich also in para-Stellung befunden und ein Theil der salpetrigen Säure hatte auf ein ursprünglich gebildetes Hydrochinon oxydirend gewirkt. Zu demselben Chinon war nun glatter und einfacher zu gelangen, wenn man ein Salz der Base mit Eisenchlorid erwärmte. Das Chinon zeigte gemäß der davon ausgeführten Analyse die Zusammensetzung $C_{10}H_{12}O_2$. Der Schmelzpunkt lag bei 45—46°, das durch Reduction daraus bereitete Hydrochinon schmolz um 140°, mit Methylamin setzte sich das Chinon zu einer rothen, bei 202° schmelzenden Verbindung um. All diese Eigenschaften kommen aber dem Thymochinon zu. Mit diesem Körper hatten wir es also zu thun.

Damit endlich ist dargethan, daß die aus dem Carvoxim durch Atomverschiebung entstehende Base nichts anderes ist als Amidothymol.

Die wichtige Frage, welche sich an diese merkwürdige Beobachtung knüpft, ist natürlich nun die, wie der Mechanismus der Atomumlagerung von

CH_3 — CH — HC = HC — C = N.OH — CH = C — C_3H_7

Carvoxim

CH_3 — C — HC = C(HO) — C — NH_2 — CH = C — C_3H_7

in p-Amidothymol

sich vollzieht.

In erster Linie wird dabei in Betracht kommen, daß das Molecül der partiell hydrirten Benzolderivate sich bekanntlich in einem labileren Gleichgewichtszustand befindet als das Molekül einer Benzolverbindung. Aus diesem Grunde lagert sich das Carvon in Berührung mit Säuren so leicht in Carvacrol um:

CH_3 — CH — HC = HC — C = O — CH = C — C_3H_7

Carvon

wird zu

CH_3 — C — HC = HC — C — OH — HC = C — C_3H_7

Carvacrol

Wenn Carvoxim sich nun analog verhält muß folgender Uebergang eintreten

CH_3 — CH — HC = HC — C = NOH — CH = C — C_3H_7

Carvoxim

wird zu

CH_3 — C — HC = HC — C — NH OH — CH = C — C_3H_7

Cymyl-Hydroxylamin

d. h. das ungesättigte Hydrocymol-Derivat[1]) wird zu einem ge-

1) Vergl. hierzu Wallach, Ann. d. Ch. 277, 106.

sättigten Cymol-Derivat, nämlich zu einem substituirten Hydroxylamin. Nun liegen aber bereits Beobachtungen darüber vor, daß die aromatischen Hydroxylamine sich im Augenblick ihrer Entstehung in Para- Amidophenole umlagern[1]). Nimmt man das als allgemein gültig an, so muß Cymyl-Hydroxylamin sich sofort in p-Amidothymol umwandeln — wie es den Beobachtungen entspricht.

Für unsere gesammte Kenntniß von dem Verlauf intramolekularer Umlagerungen wird es nun von Werth sein, das Verhalten anderer cyclischer Oxime und namentlich das der höher als das Carvoxim hydrirten, besonders aber das der vollständig hydrirten kennen zu lernen. Untersuchungen nach dieser Richtung bin ich in Begriff zum Theil in Gemeinschaft mit Schülern, durchzuführen. Dem Studium des Reactionsverlaufes stellen sich dabei, wie schon jetzt ersichtlich, in manchen Fällen Schwierigkeiten entgegen, die noch viel erheblicher sind als die, welche uns bei der Aufklärung der Umwandlungsproducte des Carvoxims begegneten.

Von den bis jetzt gewonnenen Resultaten möchte ich vorläufig schon folgende mittheilen.

Das gewöhnliche Links-Menthonoxim $C_{10}H_{18}NOH$, (Schmelzp. 59°) läßt sich mit Hülfe von Schwefelsäure ebensogut isomerisiren, als bei Anwendung von Chlorphosphor unter den früher von mir angegebenen Bedingungen. In beiden Fällen entsteht zunächst dasselbe, bei 119—120° schmelzende Isomere. Auch hier verläuft bei Anwendung von Schwefelsäure unter den richtigen Bedingungen der Umlagerungsproceß ganz quantitativ. Die bei 119—120° schmelzende Verbindung ist keinenfalls mehr ein Oxim. Sie verhält sich eher wie eine Base, jedoch sind auch die basischen Eigenschaften nur schwach ausgeprägt. Wird diese Verbindung in einem Lösungsmittel (Chloroform) mit Phosphorpentachlorid behandelt, so tritt unter Salzsäureentwickelung Umsetzung ein. Zerstört man nun ohne das Lösungsmittel zu entfernen, das entstandene Phosphoroxychlorid durch Schütteln des Produkts mit Wasser, so erhält man die bei 119—120° schmelzende Verbindung wieder. Destillirt man aber nach beendeter Umsetzung Chloroform und Phosphoroxychlorid unter vermindertem Druck bei niederer Temperatur ab und erwärmt den Rückstand einige Zeit auf 100°, so erstarrt die bis dahin flüssige Masse zu einem harzartigen Product, das sich in verdünnter Salzsäure löst. Ammoniak

1) Friedländer, Ber. ch. Ges. 26, 177; Gattermann, ebend. 26, 1845.

fällt aus dieser Lösung einen neuen isomeren, aus Alkohol prachtvoll krystallisirenden, bei 60° schmelzenden Körper.

Zu dieser bei 60° schmelzenden Verbindung kann man natürlich bei Einhaltung der entsprechenden Bedingungen auch direct aus dem bei 59° schmelzenden Links-Menthonoxim gelangen. Man braucht nur bei der Umsetzung des Präparats mit Chlorphosphor nach Entfernung des Lösungsmittels die Temperatur zu steigern.

Etwas anders wie Menthonoxim verhält sich Thujonoxim $C_{10}H_{16}NOH$, in sofern, als aus dem bei 55° schmelzenden Oxim von vornherein ganz verschiedene Producte erhalten werden, je nachdem man es mit Chlorphosphor oder Schwefelsäure in Berührung bringt.

Das Umwandlungsproduct mit Chlorphosphor stellt eine bei 89—90° schmelzende, in schönen Prismen krystallisirende Verbindung vor, die in Petroläther schwerer löslich ist als das Ausgangsmaterial, von Alkohol aber noch ungemein leicht aufgenommen wird. Der mit Hülfe concentrirter Schwefelsäure aus dem Thujonoxim (Schmp. 55°) erhältliche Körper schmilzt erst bei 118—119°, ist in Aether und selbst in kaltem Methylalkohol nicht ganz leicht löslich und krystallisirt aus letzterem Lösungsmittel in langen, spröden Nadeln, die mit Wasserdämpfen flüchtig und auch in Wasser etwas löslich sind. Das Verhalten gegen salpetrige Säure deutet an, daß diese Verbindung wahrscheinlich eine Amidogruppe enthält. Die Umwandlungsreactionen verlaufen übrigens beim Thujonoxim lange nicht so glatt wie beim Carvoxim und Menthonoxim. Man erhält stets in reichlicher Menge nicht krystallisirende Nebenproducte.

Ein ganz unerwartetes Verhalten zeigt das Fenchonoxim, $C_{10}H_{16}NOH$. Bekanntlich ist diese Verbindung ungemein empfindlich gegen verdünnte Säuren und spaltet in Berührung mit diesen sofort Wasser ab, unter Bildung der Verbindung $C_{10}H_{15}N$. Man sollte nun denken, daß concentrirte Schwefelsäure das Fenchonoxim noch leichter in letzteren Körper oder allenfalls auch in dessen Hydratisirungsproducte, welche ich früher (Ann. d. Chem. 269, 331) als α- und β-Iso-Fenchonoxim beschrieben habe, überführen würde. Man erhält aber völlig andere Producte. Bei vorsichtigem Eintragen von Fenchonoxim in concentrirte Schwefelsäure entsteht als Hauptproduct eine starke, aber unbeständige Base, welche sich bei der Destillation zersetzt, ein sehr zerfließliches, in trockenem Aether unlösliches Chlorhydrat und ein schwer lösliches Chlorplatinat bildet.

Nachdem diese Beobachtungen über die Umwandlung des Fenchonoxims vorlagen, ließ sich vorhersehen, daß das isomere

Campheroxim sich ganz analog verhalten würde. Nach Versuchen, welche Hr. Scharpenack auf meine Veranlassung auszuführen im Begriff ist, hat sich diese Vermuthung vollkommen bestätigt. Campheroxim geht mit concentrirter Schwefelsäure behandelt, gleichfalls in eine Base über, welche in ihrem Verhalten der entsprechenden Verbindung der Fenchonreihe sehr ähnelt und zu der man auch durch Behandlung des Camphonitrils $C_{10} H_{15} N$, mit concentrirter Schwefelsäure scheint gelangen zu können.

Wedekindsche Preisstiftung.

Bericht über den Stand der Ausgabe des Hermann Korner, erstattet für den Verwaltungsrat der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte vom Herausgeber.

Die Wedekindstiftung hatte zuerst im Jahre 1856 für ihren zweiten Verwaltungszeitraum (1856—1866) eine Ausgabe der verschiedenen Texte und Bearbeitungen der Chronik des Hermann Korner als Aufgabe gestellt, ohne daß eine Lösung einlief. Die Aufgabe wurde daher für den dritten Zeitraum (1866—1876) wiederholt. Nunmehr ging 1876 eine Bearbeitung ein, der jedoch nicht ohne weiteres der Preis zuerkannt werden konnte; vielmehr wurde dem ungenannten Bewerber eine Frist von zwei Jahren gewährt, in der die Arbeit vervollständigt und verbessert werden sollte. In so erneuter Gestalt kam die Arbeit schon 1877 wieder zurück und wurde abermals geprüft. Auf Grund der Begutachtung durch die Preisrichter gewann dann der Verwaltungsrat das folgende Urteil (s. diese Nachrichten 1877 S. 239):

„Zwar ist auch jetzt noch Genauigkeit in der Vergleichung der Handschriften, namentlich der lüneburger D, nicht vollständig erreicht; ferner sind noch jetzt unter den Quellen Korner's auch einzelne Schriften angegeben, die er nicht gebraucht haben kann, dagegen andere, die er ohne Zweifel benutzt hat, nicht erwähnt und verglichen; endlich fehlen Anmerkungen, welche den Inhalt der Korner eigentümlichen Nachrichten erläuterten, auch jetzt noch fast gänzlich. Aber der Verfasser hat doch jetzt die Vergleichung der einzelnen Texte unter einander sehr vervollständigt, den Nachweis der Quellen bedeutend erweitert, auch in der Vergleichung der Handschriften weit größere Sorgfalt gezeigt.

Demnach beschließt der Verwaltungsrath jetzt dem Verfasser in ehrender Anerkennung des Geleisteten den Preis von 3300

Rmark auszuzahlen, den schwierigen Druck aber des in den Besitz der Stiftung übergehenden Manuscripts (§ 30 d. Ordnungen) von sich aus unter steter Leitung und Ueberwachung eines jungen Gelehrten zu veranstalten, der zugleich die Handschriften nochmals vergleichen und so eine Genauigkeit der Wiedergabe erreichen soll, wie sie dem Verfasser des eingereichten Manuscripts nach so langer und oft wiederholter Beschäftigung mit denselben Dingen herzustellen kaum mehr gelingen würde."

Als Verfasser hatte sich dann der unterdeß (1891) verstorbene Universitäts-Bibliothekar zu Breslau, Dr. Hermann Oesterley ergeben.

Jene im Jahre 1877 in Aussicht genommene Durcharbeitung des Manuscripts habe ich im Auftrage der Stiftung Ende August 1889 begonnen. Jedoch ergab sich bei sorgfältiger Prüfung und näherem Eindringen, daß schon rein äußerlich es niemals möglich gewesen wäre, das Oesterley'sche Manuscript, wie es vorlag, zum Druck zu bringen. Und auch sonst erhoben sich schwere Bedenken, namentlich gegen die übergroße Häufung völlig wertloser Varianten der einzelnen Texte eines Chronisten, der mit großer Gewandtheit immer von neuem stilisirt, ohne sachlich zu ändern, und der weder eine Nachricht seiner Vorlage genau entnimmt, noch die einmal aufgenommene in den späteren Bearbeitungen in der zuerst gewählten Form stehen läßt. Hier galt es doch, wenn man die Ausgabe nicht durch ganz unnützen Ballast beschweren und unbrauchbar machen wollte, die Mühe der Sichtung sachlich wichtiger oder auch nur characteristischer Abweichungen der Texte von den überflüssigen und wertlosen, um so bei der ohnehin verwickelten und oft aller bisherigen Textbehandlung spottenden Art, wie die jüngeren Kornerfassungen aus den älteren entstanden sind, noch einen gewissen Grad der Uebersichtlichkeit für die Ausgabe zu retten. Um die Ausgabe zu entlasten, empfahl es sich ferner von der ursprünglichen Absicht der Aufgabestellung abzugehen und nicht den Text von Karl dem Großen, sondern erst von dem Jahre 1198 bezw. 1200 an fortlaufend zu geben, nachdem es sich herausgestellt hatte, dass der allergrößte Teil jener früheren Partie originale Nachrichten nicht enthalte. Mit Zustimmung des Verwaltungsrates setzte daher die Neubearbeitung mit jenen Jahren ein.

Da schon an sich eine nochmalige Collation der Handschriften und Vergleichung der Texte in Aussicht genommen war, wurden als Grundlage meiner Umarbeitung die folgenden Gesichtspunkte maßgebend: Es war

„a) die Lüneburger Handschrift nochmals vollständig vom Jahre 1200 an zu vergleichen, aus den früheren Partieen dasjenige was sachlich von Wichtigkeit ist;

b) das Verhältnis der Handschriften bezw. Fassungen sorgfältig zu prüfen;

c) eine eingehende sachliche Vergleichung der einzelnen Fassungen mit Einschluß der deutschen nochmals vorzunehmen;

d) eine das sachlich wichtigste herausgreifende Durchsicht der nicht vollständig zum Abdrucke gelangenden früheren Partieen der verschiedenen Fassungen, soweit sie zugänglich sind, anzuschließen;

e) eine sorgfältige Quellenuntersuchung vorzunehmen und genaue Angabe der Quellen am Rande beizufügen".

Das alles kam einer Neuarbeit gleich. Und thatsächlich bot das ältere Manuscript höchstens bei der Untersuchung über die Quellen einigen Anhalt, obwol vieles wichtige auch hierbei immer noch wesentlich modificirt werden musste. Wo sonst sachliche Anmerkungen herübergenommen werden konnten, werden sie in der neuen Ausgabe ausdrücklich als Eigentum Oesterleys gekennzeichnet. Im übrigen wurden in mehreren wesentlichen Punkten von der Auffassung des ersten Bearbeiters abweichende, oft entgegengesetzte Ansichten gewonnen: so über den Wert der Lübecker Handschrift und namentlich über das Verhältnis Korners zu den etwa gleichzeitigen lübischen Quellen in niederdeutscher Sprache (Fortsetzungen des Detmar und sogen. Rufus-Chronik). Gerade in betreff dieser schwierigen Fragen hat Oesterley die schon 1851 von Georg Waitz gewonnenen vorläufigen Resultate, die bei genauerer Betrachtung der seitdem erst bekannt gewordenen weiteren Kornerhandschriften fast durchweg bestätigt werden, ganz bei Seite gelassen und eine Ansicht vertreten, die auch seiner Zeit von maßgebenden Gelehrten, wie Wilhelm Mantels, nicht geteilt wurde. Ich hoffe demnächst in der Einleitung zu meiner Ausgabe wenigstens einige dieser Fragen zu lösen, die schwierigeren der Lösung näher zu bringen. Auch die sehr verwickelte rein technische Frage der Drucklegung der Chronik wurde in einer von den Gedanken Oesterleys abweichenden Art durchgeführt.

Ende September 1892 war diese neue Ausgabe im Manuscript abgeschlossen und es konnte sogleich der unter all den genannten Umständen recht schwierige Druck beginnen. Die Ausgabe gibt in ihrem ersten Teil auf 17 Bogen den Text der ersten Fassung (A. Danziger Hs. bis 1420) mit den Varianten des Entwurfs

(*a*. Wolfenbütteler Hs. bis 1416) vom Jahre 1198 ab, zum teil gekürzt und auf den zweiten Teil verweisend. Der zweite Teil bietet den Text der vierten (letzten lateinischen) Fassung (D. Lüneburger Hs. bis 1435; bisher bei Eccard) mit den Varianten der zweiten Fassung (B. Linköpinger Hs. bis 1423) von 1200 ab. Die dritte Fassung selbst ist uns nicht erhalten. Durch beigefügte Verweisungszahlen ist ohne weiteres die Stelle aufzufinden, welche eine Nachricht der einen Fassung in der andern einnimmt. Der Anhang I gibt alle sachlich wichtigen Zusätze und Abweichungen der deutschen Bearbeitung des Korner (H. Hannoversche Hs. bis 1438), namentlich den Ueberschuß der Jahre 1435—1438. Alles wichtigere, was die einzelnen Fassungen für die Zeit vor 1198 bezw. 1200 bieten, wird im Anhang II vereinigt sein. In diesen Anhang hatten ursprünglich auch die verschiedenen legendarischen und novellistischen Erzählungen kommen sollen, die in den früheren Teilen der Chronik verstreut sich vorfinden. Da jedoch für dieselben die gleiche Quelle in einer noch unbekannten Kopenhagener Handschrift sich hat ermitteln lassen, bleiben sie weg und werden nur in der Einleitung kurz besprochen werden. Uebrigens hoffe ich, gleichsam als Anhang zum Korner die wichtigsten Teile dieser Kopenhagener Handschrift in absehbarer Zeit veröffentlichen zu können, nachdem der Verwaltungsrat eine Abschrift derselben hat anfertigen lassen.

Der Druck des Textes der Kornerausgabe ist in den zweiten Fassungen bis zum 52. Bogen (bis zum Jahre 1418) fortgeschritten; er wird voraussichtlich noch 27 Bogen (ohne Anhänge, Einleitung, Register und Glossar) umfassen. Jedenfalls ist die Vollendung des Bandes für das Jahr 1894 mit Sicherheit zu erwarten.

Göttingen, im November 1893.

Dr. J. Schwalm.

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. December. № 20. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. December 1893.

Klein legt autographirte Vorlesungshefte vor.
Brill in Tübingen: (correspond. Mitglied) Ueber symmetrische Functionen von Variabelnpaaren.
Nernst (vorgelegt durch Riecke), Methode zur Bestimmung von Dielectricitätskonstanten.

Ueber symmetrische Functionen von Variabelnpaaren.

Von

A. Brill in Tübingen.

Wie vielfach man auch die symmetrischen Functionen von n Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ untersucht hat, so sind doch die nächst höheren Bildungen, die symmetrischen Functionen von n Variabelnpaaren $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$ bisher fast gänzlich unberücksichtigt geblieben. Schon Schläfli hat (über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen, Wiener Denkschr. 1852) auf die Schwierigkeit hingewiesen, die sich ihrer Behandlung ent-

entgegenstellt: Während im Falle von n Größen die n einfachsten oder „Elementarfunctionen" (ihre Summe, die ihrer Producte zu je zweien, u. s. w.), durch die sich alle symmetrischen Functionen der n Größen darstellen lassen, von einander unabhängig sind, existiren zwischen den $2+3+\cdots+(n+1)=\frac{n(n+3)}{2}$ entsprechenden Bildungen jener n Variabelnpaare:

$$\Sigma x_1,\ \Sigma y_1;\quad \Sigma x_1x_2,\ \Sigma x_1y_2,\ \Sigma y_1y_2;\quad \Sigma x_1x_2x_3,\ \Sigma x_1x_2y_3,\ \ldots\ \Sigma y_1y_2y_3$$
$$\ldots\ldots x_1x_2\ldots x_n;\quad \Sigma x_1x_2\ldots x_{n-1}y_n;\ \ldots\ldots y_1y_2\ldots y_n$$

$\frac{n(n+3)}{2}-2n=\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen, durch die alle Functionen derselben einer modificirten Darstellung fähig werden.

Diese Relationen, die man bisher nur für einzelne Fälle kannte, hat in zwei Aufsätzen in den Mathematischen Annalen (Bd. 38; Bd. 43) Herr Junker untersucht, auch ein Verfahren angegeben, nach dem sie sich für jede Zahl n bilden lassen, und Tabellen irreducibler Relationen vom niedrigsten Gewicht für die Fälle $n=2$ bis 7 aufgestellt.

Aber es verdient bemerkt zu werden, daß die Bildung dieser Relationen auf eine Frage der Invariantentheorie für Binärformen zurückgeführt werden kann.

Es handelt sich nämlich bloß darum, die Forderung zu erfüllen, daß n binäre Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ von den steigenden Ordnungen der Indices die symmetrischen „Elementarfunctionen" von n binären Linearformen $\varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(n)}$ sind, also auf die Form gebracht werden können:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 = \Sigma\varphi' \\ f_2 = \Sigma\varphi'\varphi'' \\ f_3 = \Sigma\varphi'\varphi''\varphi''' \\ \vdots \\ f_n = \varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(n)}. \end{cases}$$

Diese Bedingung wird ausgedrückt durch das gleichzeitige Verschwinden aller Coefficienten gewisser simultaner Covarianten der n Binärformen f. Den Character der Invarianz dieser Bedingung gegenüber einer simultanen linearen Transformation beweist man leicht direct. Er geht aber auch aus der geometrischen Deutung hervor, die man dem Problem geben kann. Sind nämlich λ, μ binäre Variable, und setzt man:

$$\varphi^{(i)}=\lambda x_i+\mu y_i\ (i=1,2,\ldots n),$$

bildet ferner das Product Π der Differenzen $t-\varphi^{(i)}$, wo t eine unbestimmte Größe ist, so läßt sich dasselbe:

$$\prod(t-\lambda x_i-\mu y_i) = t^n - t^{n-1}f_1 + t^{n-2}f_2 - \dots (-1)^n f_n = F(t, \lambda, \mu)$$

als zerfallende Ternärform $n$ter Ordnung der Veränderlichen t, λ, μ auffassen. Die Bedingung für dieses Zerfallen wird sich durch das Verschwinden gewisser invarianter ternärer Bildungen (im Allgemeinen von Zwischenformen) der Form $F(t, \lambda, \mu)$ ausdrücken. Setzt man von den drei zu t, λ, μ contragredienten Variabeln $T, \varLambda, M$ die t entsprechende $T=0$, so lassen sich die Coefficienten der Potenzen von t in einer solchen Zwischenform, weil in jedem Coefficienten die λ, μ in gleich hoher Dimension vorkommen, als simultane Covarianten der Binärformen $f_1, f_2, \dots f_n$ (mit übrigens zwei Reihen von Veränderlichen, von denen die eine den contragredienten Veränderlichen entspricht) darstellen. Denn die Invarianteneigenschaft eines Aggregats von Gliedern gegenüber linearer Transformation von drei Veränderlichen bedingt diejenige gegenüber einer solchen von zweien.

Ersetzt man die contragredienten Variabeln $\varLambda, M$ durch $\mu, -\lambda$, so geht die Form in eine binäre Covariante mit einer Variabelnreihe über.

Sei $\Phi(f_1, f_2, \dots f_n)$ eine solche, so besteht bekanntlich zwischen der Ordnung q in λ, μ, dem Gewicht p und dem Gesammtgrad g in den Coefficienten der Formen $f_1, f_2 \dots f_n$ die Beziehung:

$$p = \tfrac{1}{2}(g-q), \tag{2}$$
$$\text{wo } g = 1\cdot\varrho_1 + 2\cdot\varrho_2 + \dots + n\cdot\varrho_n$$

sich für jedes Glied durch seinen Grad ϱ_1 in den Coefficienten von f_1, ϱ_2 in denen von f_2, u. s. w. darstellen läßt, und wo das Gewicht p sich bestimmt durch die Summe der unteren Indices in einem Term des Leitgliedes (des Coefficienten von λ^q), wenn man setzt:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0\lambda + a_1\mu \\ f_2 &= b_0\lambda^2 + b_1\lambda\mu + b_2\mu^2 \\ f_3 &= c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2\mu + c_2\lambda\mu^2 + c_3\mu^3 \\ &\vdots \\ f_n &= k_0\lambda^n + k_1\lambda^{n-1}\mu + \dots + k_n\mu^n. \end{aligned}$$

Außer den bekannten partiellen Differentialgleichungen für simultane Covarianten besteht für die Form Φ noch eine characteristische, die ausdrückt, daß, wenn man statt der Formen f ihre Ausdrücke (1) in den φ einführt, identisch

$$\Phi = 0$$

hervorgeht. Man erhält diese Differentialgleichung auf folgende Weise. Die Gleichung $\Phi = 0$ ändert ihre Form nicht, wenn man, nach Einführung der φ', φ'', ... statt der f, zu jeder der Formen φ dieselbe unbestimmte Linearform $\psi = \alpha\lambda + \beta\mu$ addirt. Setzt man daher in Φ statt der f die hierdurch geänderten Werthe und entwickelt nach Potenzen von α, β, so müssen die Coefficienten einzeln verschwinden. Insbesondere ergeben die der ersten Potenzen zwei partielle Differentialgleichungen für Φ, von denen es genügt, eine anzuschreiben:

$$n\frac{\partial\Phi}{\partial a_0} + (n-1)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}a_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}a_1\right) + (n-2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial c_0}b_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial c_1}b_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial c_2}b_2\right) + \cdots = 0.$$

Auf die verschiedenen Gestalten, die man diesen Gleichungen und ihrer Combination zu einer einzigen — je nach der Darstellung von Φ durch Ueberschiebungen oder durch symbolische Klammerproducte — geben kann und auf ihre Analogie mit einem bekannten Proceß gedenke ich an einer anderen Stelle zurückzukommen.

Ich bemerke hier nur, daß mit ihrer Hilfe die Berechnung aller Covarianten Φ, die sich aus p^{ten} Ueberschiebungen zusammensetzen, auf die für niedere p zurückgeführt wird, indem man eine Summe von Gliedern, die der Gleichung (2) entsprechen, mit unbestimmten Coefficienten anschreibt und mittelst der obigen Processe aus Φ eine Form vom Gewicht $p-1$ herstellt.

Der Proceß des Ueberschiebens gewährt indessen ein einfaches Mittel für die independente Darstellung von Covarianten Φ von jedem beliebigen Gewicht p. Diese Zahl p giebt bekanntlich die Höhe der Ueberschiebung, oder für die symbolische Darstellung die Anzahl der Klammerfactoren in den Einzelgliedern an, aus denen sich Φ zusammensetzt. Man hat also Summen von p^{ten} Ueberschiebungen der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ zu bilden, die, wenn man statt ihrer die $\varphi'\varphi'' \ldots$ einführt, identisch verschwinden.

Bezeichnet man durch den Index p der Klammer $(P, Q)_p$ die p^{te} Ueberschiebung der Formen P, Q, so besteht für $\alpha > p$, $\beta > p$ die Beziehung:

$$\begin{gathered}\tbinom{\beta}{p}\left(\Sigma\varphi'^{\alpha},\ \Sigma\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(\beta)}\right)_p = \\ \Sigma(\varphi'\varphi'')(\varphi'\varphi''')\ldots(\varphi'\varphi^{(p+1)})\,\varphi'^{\alpha-p+1}\varphi^{(p+2)}\ldots\varphi^{(\beta)} + \\ + \Sigma(\varphi'\varphi'')(\varphi'\varphi''')\ldots(\varphi'\varphi^{(p+1)})\varphi'^{\alpha-p}\varphi^{(p+2)}\ldots\varphi^{(\beta+1)},\end{gathered}$$

wo $\binom{\beta}{p}$ ein Binomialcoefficient ist, $\Sigma\varphi'^{\alpha}$ die Summe der α^{ten} Potenzen der n Linearformen $\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(p)}\ldots\varphi^{(\beta)}\ldots\varphi^{(n)}$, $\Sigma\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(\beta)}$ eine

jener symmetrischen „Elementarfunctionen“, $(\varphi'\varphi'')\ldots$ erste Ueberschiebungen bedeuten.

Hieraus folgt die Identität:

$$\binom{p}{p}(\Sigma\varphi'^{\alpha},\ \Sigma\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(p)})_p-\binom{p+1}{p}(\Sigma\varphi'^{\alpha-1},\ \Sigma\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(p+1)})_p+$$
$$+\binom{p+2}{p}(\Sigma\varphi'^{\alpha-2},\Sigma\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(p+2)})_p-\cdots+(-1)^{n-p}\binom{n}{p}(\Sigma\varphi'^{\alpha-n+p},\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(n)})_p=0,$$

welche sogleich in eine Relation $\Phi = 0$ übergeht, wenn man die symmetrischen Functionen $\Sigma\varphi'\varphi''\ldots\varphi^{(\beta)}$ durch die Coefficienten f_β ersetzt und mittelst der Newton'schen Formeln die Potenzsummen durch dieselben Größen f darstellt.

Setzt man insbesondere $p = 2$ und giebt der Zahl α der Reihe nach die Werthe $n, n+1, \ldots 2n-2$, so erhält man links $n-1$ Covarianten von bez. den Ordnungen $n-2, n-1, \ldots 2n-4$, deren Coefficienten durch ihr Verschwinden $\frac{1}{2}(3n-4)(n-1)$ Relationen darstellen, die ebensoviele Bedingungen sind dafür, daß die Form n^{ter} Ordnung $F(t, \lambda, \mu)$ in n lineare Factoren zerfällt.

Für $n = 2$ wird die einzige existirende Relation durch das Verschwinden der Invariante:

$$\Phi = (\Sigma\varphi'^2,\ \Sigma\varphi'\varphi'')_2 = 0$$
$$\text{oder: } (f_1^2-2f_2,\ f_2)_2 = 0,$$

oder endlich in symbolischer Form, wenn $f_1 = a_x = a'_x$; $f_2 = b_x^2 = b_x'^2$ gesetzt wird, durch:

$$(ab)(a'b)-2(bb')^2 = 0$$

dargestellt.

Für $n = 3$ drückt sich das Zerfallen der Form:

$$t^3-f_1t^2+f_2t-f_3$$

in drei Linearfactoren durch das identische Verschwinden der Covarianten 1. bez. 2. Ordnung aus:

$$\Phi = (\Sigma\ \varphi'^3,\ f_2)_2-3(\Sigma\varphi'^2, f_3)_2 = 0$$
$$\Psi = (\Sigma\ \varphi'^4,\ f_2)_2-3(\Sigma\varphi'^3, f_3)_2 = 0,$$

in ausgeführter Form:

$$\Phi = (f_1^3-3f_1f_2+3f_3,\ f_2)_2-3(f_1^2-2f_2,\ f_3)_2 = 0$$
$$\Psi = (f_1^4-4f_1^2f_2+2f_2^2+4f_1f_3,\ f_2)_2-3(f_1^3-3f_1f_2+3f_3,\ f_3)_2 = 0.$$

Führt man statt $\Psi = 0$ die lineare Combination ein:

$$\Psi' = \Psi-f_1\ \Phi = 0,$$

so wird Ψ' (ebenso wie Φ) vom Grade 4 in den Coefficienten der f. Ersetzt man in Φ die Variabeln λ, μ durch u_2, $-u_1$, so geht Φ in einen Ausdruck über, der bis auf einen Zahlenfactor mit dem Coefficienten von x_3^4 in der ternären Zwischenform (HFu) übereinstimmt, wo H die Hesse'sche der Ternärform F_x^3 ist, u_1, u_2, $(u_3 = 0)$ die zu x_1, x_2, x_3 $(= t, \lambda, \mu)$ contragredienten Variabeln sind, (HFu) die Functionaldeterminante von F_x^3, H_x^3, u_x bedeutet. Auch die Form Ψ', oder vielmehr deren erste Polare, läßt eine Deutung in den Coefficienten von (HFu) zu. — Bekanntlich drückt das Verschwinden dieser Zwischenform die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen der Form F_x^3 in drei Linearformen aus (Gundelfinger, Ueber die Ausartungen der Curve dritter Ordnung, Math. Ann. IV S. 596).

Für $n = 4$ hat man drei Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $X = 0$, die aus:

$$(\Sigma\varphi'^{\alpha}, f_2)_2 - 3(\Sigma\varphi'^{\alpha-1}, f_3)_2 + 6(\Sigma\varphi'^{\alpha-2}, f_4)_2 = 0$$

hervorgehen, wenn man $\alpha = 4, 5, 6$ setzt. Die Relationen erhalten alle drei den gleichen Grad 5 in den Coefficienten der f, wenn man statt der Functionen Φ, Ψ, X die folgenden einführt:

$$\Phi = 0, \quad \Psi' = \Psi - f_1 \Phi = 0, \quad X' = X - 2f_1 \Psi + (f_1^2 - 2f_2)\Phi = 0.$$

Tübingen, 30. November 1893.

Methode zur Bestimmung von Dielektricitätskonstanten[1].

Von

W. Nernst.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Aus dem physikalischen Institut zu Göttingen.)

Bekanntlich ist die Dielektricitätskonstante eines Mediums in Bezug auf Luft ursprünglich definiert durch das Verhältnis der Kraftwirkungen, die zwei elektrisierte Körper auf einander ausüben, wenn sie sich einmal in Luft, ein zweites Mal in dem betreffenden

---

1) Die unten beschriebenen Apparate wurden auf der Naturforscherversammlung in Nürnberg September 1893 demonstrirt; eine eingehende Besprechung der Methode wird in der Zeitschrift für physikalische Chemie demnächst erfolgen.

Medium unter sonst gleichen Umständen befinden. Die exacte Bestimmung dieser stofflichen Eigenschaft gehörte bisher zu den schwierigeren Aufgaben der messenden Physik, wenigstens differieren die Resultate verschiedener Beobachter für ein und dieselbe Substanz recht erheblich.

Die obige Definition der Dielektricitätskonstante (D.E.) gilt nur für Isolatoren; ein leitendes Medium drückt bekanntlich vermöge seiner elektrischen Influenz und der damit verbundenen Schirmwirkung die gegenseitige Anziehung elektrisierter Körper stets auf null herab, sodaß die elektrischen Kraftlinien dasselbe überhaupt garnicht durchdringen. Wenn man aber durch das Medium von dem einen elektrisierten Körper einen konstanten galvanischen Strom zu dem anderen elektrisierten Körper fließen läßt, so wird die Wirkung der elektrostatischen Influenz teilweise aufgehoben und die beiden elektrisierten Körper wirken auf einander nach Maaßgabe ihrer elektrostatischen Ladungen und unter sonst gleichen Umständen der D.E. umgekehrt proportional, vorausgesetzt natürlich, daß elektrodynamische Einwirkungen vermieden werden (Methode von Silow[1])). Der störende Einfluß der galvanischen Polarisation bei Anwendung elektrolytisch leitender Stoffe läßt sich, wie Cohn und Arons[2]) zeigten, einfach durch Anwendung von Wechselströmen anstatt eines konstanten Stromes eliminieren. Wie ferner die beiden letztgenannten Forscher nachwiesen[3]), läßt sich die Dielektricitätskonstante leitender Stoffe auch durch Untersuchung des Ladungsverlaufes von mit letzteren beschickten Condensatoren bestimmen.

Es schien mir nun im hohen Grade wichtig, in den Besitz einer einfachen und dabei hinreichend genauen Methode zur Messung der D.E. flüssiger Körper zu gelangen. Wie die folgende kleine Tabelle lehrt,

	D.E.		D.E.
Gase	1,0	Ester	6—9
Kohlenwasserstoffe	2,0—2,5	Essigsäure	9,7
Schwefelkohlenstoff	2,6	Alkohol	26,0
Aether	4,0	Wasser	80

lassen bereits die bisherigen Bestimmungen mit Sicherheit erkennen, daß man es hiermit einer für die chemische Natur sehr charakteristischen Konstanten zu thun hat, deren

1) Pogg. Ann. **156** 389 (1875).
2) Wied. Ann. **33** 24 (1888).
3) Wied. Ann. 28 454; **33** 32.

Zahlenwerth außerordentlich viel stärker für die verschiedenen Flüssigkeiten variiert, als z. B. Dichte oder optisches Brechungsvermögen. Aus diesem Grunde dürfte die D.E. nicht nur zur Individualisierung chemischer Präparate, sondern auch für die analytische Untersuchung von Flüssigkeitsgemischen häufig mit größerem Vorteile zu verwenden sein, als etwa die oben genannten beiden Eigenschaften.

Allein nicht nur vom praktischen Standpunkte aus dürfte eine weitergehende Benutzung des dielektrischen Vermögens der Stoffe anzustreben sein; die D.E. beansprucht auch hohe theoretische Wichtigkeit. Einerseits nämlich ist die Quadratwurzel aus D.E. im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie identisch mit dem Brechungsvermögen für unendlich lange Wellen und der Ausdruck

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{M}{d} = \frac{k-1}{k+2}\cdot\frac{M}{d}$$

worin M das Molekulargewicht und d die Dichte der Substanz bezeichnen, liefert daher die Molekularrefraktion für unendlich lange Wellen; andererseits habe ich kürzlich[1]) gezeigt, daß die dissociierende Kraft des Lösungsmittels mit ihrer D.E. in offenbarem Zusammenhange steht und somit auch maaßgebend ist für die chemische Wirksamkeit gelöster Stoffe.

Die D.E. organischer Flüssigkeiten ist bisher in weiterem Umfange nur von Landolt und Jahn[2]) gemessen worden, wobei sie sich der von Cohn und Arons modificierten Silow'schen Methode bedienten. Es bedarf wohl ziemlicher experimenteller Geschicklichkeit, um die Genauigkeit solcher Messungen erheblich weiter, als etwa bis auf ein Procent zu steigern; der allgemeineren Einführung dieser Methode steht obenein hindernd im Wege, daß sie recht difficile Apparate und nicht unbeträchtliche Substanzmengen erfordert. Eine wesentliche Vorbedingung für eine zur Einführung in das Laboratorium geeignete Methode besteht offenbar darin, daß auch geringe Mengen eines Präparats der Untersuchung unterworfen werden können. Ferner muß eine solche Methode so beschaffen sein, daß sie auch auf nicht völlig isolierende Substanzen (wie z. B. Ester, Alkohole, Säuren, Ketone, anwendbar ist, weil anderenfalls das Gebiet ihrer Brauchbarkeit allzu sehr eingeschränkt werden würde. Vollkommen verwerflich ist natürlich von vorn-

1) Göttinger Nachrichten No. 12, 1893, S. 491.
2) Zeitschr. phys. Chem. 10 289 (1892).

herein jede Methode, bei der spurenweise Leitfähigkeit große Fehler bedingen.

Ich glaube nun, daß die unten beschriebene Methode den obigen Anforderungen genügt, indem sie ermöglicht, in wenigen Minuten eine hinreichend genaue Messung mit sehr geringen Substanzmengen auszuführen. Geringe Leitfähigkeit der Substanz stört nicht nur nicht, sondern wird sogar gleichzeitig mitbestimmt, was für die nähere Charakterisierung der untersuchten Substanz häufig von Vorteil sein dürfte.

Princip der Methode.

Wenn in der beigezeichneten Wheatstone'schen Brückencombination w_1 und w_2 zwei kapacitätsfreie Widerstände, c_1 und

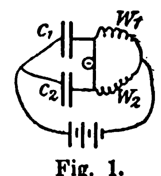


Fig. 1.

c_2 zwei gut isolierende Condensatoren bedeuten, so liefert beim Schließen oder beim Oeffnen des Stromes das Galvanometer bekanntlich nur dann keinen Ausschlag, wenn

$$w_1 : w_2 = c_2 : c_1$$

ist. Ersetzt man die konstante Säule und das Galvanometer durch Induktionsrolle und Telephon, so schweigt dasselbe nur dann, wenn obige Proportion erfüllt ist. Da nun die Kapacität eines Kondensators direkt proportional der D.E. des benutzten Isolators ist, so kann man auf diesem Wege die D.E. sehr gut isolierender Substanzen einfach und genau bestimmen. Die Methode wurde in H. F. Weber's Laboratorium mit gutem Erfolge von Palaz[1]) angewendet, der einen Schleifkontakt solange verschob, bis das Telephon zum Schweigen kam, und so das Verhältnis $w_1 : w_2$ direkt bestimmte. Ich habe die Versuche von Herrn Palaz wiederholt, jedoch mit der Abänderung, daß ich von vorn herein $w_1 = w_2$ machte und die Kapacität eines Kondensators solange variierte, bis das Telephon zum Schweigen kam. Mit gleichem Erfolge kann man die beiden Widerstände w_1 und w_2 durch zwei Kapacitäten c_1' und c_2' ersetzen, dann schweigt das Telephon, wenn

$$c_1' : c_2' = c_1 : c_2$$

ist (Methode von Gordon und Winkelmann).

1) Journ. de phys. (2) 5 370 (1885).

Sobald jedoch in der oben gezeichneten Kombination oder ihren Abänderungen ein Kondensator schlecht isoliert, so tritt an Stelle des Schweigens im Telephone ein mehr oder weniger verwaschenes Minimum auf; schlechte Isolation bedingt zwar keine principiellen Fehler, wohl aber große Ungenauigkeit, sodaß spurenweises Leitungsvermögen des dielektrichen Mediums bereits große Unsicherheit bedingt.

Man hat wohl die Leitfähigkeit dadurch zu eliminieren gesucht, daß man die zu untersuchende dielektrische Substanz in einem Glastroge eingeschlossen zwischen die Kondensatorplatten brachte. Allein dies ist ein höchst bedenkliches Verfahren, denn eine nur mäßig leitende Substanz verhält sich vermöge ihrer elektrostatischen Influenz bei dieser Versuchsanordnung so, als ob sie eine unendliche große D.E. hätte und schlecht leitende Substanzen liefern zwar endliche, aber viel zu große Werte. Diese Abänderung bringt also prinzipielle Fehler in die obigen an sich brauchbaren Methoden hinein und es ist daher in allen Fällen vorzuziehen, die Kondensatorplatten in leitende Berührung mit dem dielektrischen Medium zu bringen.

Ein einfacher Kunstgriff erlaubt es nun nach obigen Methoden auch mit leitenden Substanzen richtige und genaue Zahlen zu erhalten. Denken wir nämlich, daß etwa in Fig. 1 der Kondensator c_1 schlecht isoliere, dann ist es, wie erwähnt, nicht möglich, ein brauchbares Minimum zu erhalten, wohl aber gelingt dies, wenn wir dem zweiten Kondensator ebenfalls eine geeignete Leitfähigkeit durch Nebenschluß künstlich erteilen. Wählen wir den einfachsten Fall, der auch für die praktische Anwendung am vortheilhaftesten ist, nämlich, daß

$$w_1 = w_2$$

ist; der Widerstand des schlecht isolierenden Kondensators c_1 sei w_3 und derjenige des am Kondensator c_2 gelegten Nebenschlusses sei w_4, dann kann das Telephon nur zum Schweigen kommen, wie aus einfachen Symmetriegründen ersichtlich ist, wenn sowohl

$$c_1 = c_2,$$

als auch

$$w_3 = w_4$$

ist. In der That beobachtete ich, daß sowohl bei der Veränderung von c_2 wie von w_4 ein Minimum auftritt, von denen das erstere als Kapacitäts-, das letztere als Widerstandsminimum bezeichnet sei. Man erhält also durch direkte Messung

sowohl Leitfähigkeit, wie Kapacität des mit der dielektrischen Substanz beschickten Kondensators c_1, indem man diese Größen ja nur an der Kapacität des Meßkondensators c_2 und dem Widerstande des Nebenschlusses w_4 abzulesen braucht. Natürlich muß der Nebenschluß w_4 kapacitätsfrei sein.

Beschreibung der Apparate.

Die Apparate sind demgemäß: 1) Induktionsapparat mit Batterie, 2) Verzweigungswiderstände w_1 und w_2, 3) Meßkondensator (entsprechend c_2), 4) Nebenschluß w_4, 5) dielektrischer Trog (entsprechend c_1), 6) Telephon.

1) Induktionsapparat und Batterie. Es ist vorteilhaft, besonders bei Untersuchung verhältnismäßig schlecht isolierender Substanzen, mit hoher Unterbrechungszahl des inducierenden Stromes zu arbeiten. Die Induktionsapparate gewöhnlicher Form erfüllen diesen Zweck nur mangelhaft und machen nebenbei unnötigen störenden Lärm. Ich habe daher den Neef'schen Hammer durch eine Stahlsaite ersetzt, die ein Mittelstück aus Platindraht besitzt, welch letzterer an einer verstellbaren Platinkante im Ruhezustande anliegt. Der Apparat regt sich durch ein einziges Flaschen- oder Trockenelement kleinsten Formats getrieben, selbstthätig an und arbeitet gänzlich geräuschlos. Die Saite kann durch Schrauben beliebig gespannt werden, sodaß die Unterbrechungszahl einer einfachen Regulierung fähig ist. Der Widerstand der primären Rolle mag circa ein Ohm betragen; derjenige der secundären Rolle muß groß sein (200—1000 Ohm), um hinreichende Spannung zu erzielen. Es ist am vortheilhaftesten, die Saite möglichst schwach zu spannen, so daß ein in nächster Nähe befindliches Ohr ein leises Rasseln (kein Summen oder Singen) vernimmt.

2) Verzweigungswiderstände w_1 und w_2. Für die Untersuchung schlecht leitender Substanzen, für die der Apparat in der beschriebenen Form zunächst eingerichtet ist, empfiehlt es sich w_1 und w_2 groß zu wählen. Am zweckmäßigsten fand ich elektrolytische Widerstände, die man leicht in beliebiger Größe und bequem variabel sich herstellen kann. Ich habe dieselben direkt mit dem Induktionsapparate verbunden, was für die Aufstellung des ganzen Apparates sehr bequem ist. Neben der Induktionsspule erheben sich nämlich zwei Glasröhren mit unten eingeschmolzenen Platindrähten, die mit dem einen Pole des Induktoriums verbunden sind. Ueber ihr oberes offenes Ende kommt eine Messingfassung, durch die eine Messingschiene mit angelötheter

Platinelektrode bequem verschiebbar hindurchgeht. Das obere Ende der Schienen ist mit Klemmschrauben und einem isolierenden Ebonitknopfe versehen. Während der Messung müssen diese Widerstände natürlich unverändert bleiben und bei Anwendung gewöhnlicher Elektrolyte stören daher sehr geringe Temperaturschwankungen, die ihren Widerstand verändern. Ein Elektrolyt mit sehr kleinem Temperaturkoefficient war somit wünschenswert, und in der That glückte es, gestützt auf die Erfahrungen von Magnanini[1]), einen solchen durchaus brauchbaren aufzufinden. Wenn man ein Mol. Manit [= 181 gr] und ein Mol. Borsäure [= 62 gr] in einem Liter löst, so entsteht eine Lösung, wie Magnanini entdeckt hat und wie ich vollständig bestätigt fand, von einem Leitungsvermögen gleich $1{,}18 \cdot 10^{-7}$ bei 25^0, das mit der Temperatur um etwa $\frac{1}{1000}$ pro Grad abnimmt. Diese Lösung habe ich benutzt; natürlich wäre es leicht durch geeignete Zuschläge gewöhnlicher Elektrolyte den Temperaturkoefficienten ganz zum Verschwinden zu bringen. Verdünnt man übrigens die obige Lösung auf $\frac{1}{10}$, so ist der Temperaturkoefficient noch sehr viel kleiner. Es genügt, sich etwa 100 ccm der obigen Lösung herzustellen.

3) Meßkondensator. Den Meßkondensator ließ ich aus zwei starken Messingplatten herstellen, die durch Glasplättchen geschieden und durch Ebonitverschraubungen in konstantem Abstande gehalten werden. Dieselben sind auf einem Brette montiert und mit Klemmschrauben leitend verbunden. Die Kapacität dieses Kondensators wird durch Einschieben einer Glasplatte vergrößert. Wenn die Messingplatten genau parallel sind und die Glasplatte überall gleiche Dicke besitzt, so sind die an einem Maaßstabe mittels Nonius abgelesenen Verschiebungen der Glasplatte den Aenderungen der Kapacität proportional. Da diese Bedingungen natürlich nie ganz erfüllt sind, wird der Kondensator ein für alle Mal kalibriert (s. w. u.). Die Höhe der Messingplatten beträgt etwa 8, die Verschiebbarkeit der Glasplatte etwa 12 cm.

4) Nebenschluß. Da die meisten bekannten Flüssigkeiten im reinen Zustande sehr gut isolieren, so wurde die Methode zunächst nur für Flüssigkeiten ausgearbeitet, die schlechter leiten, wie etwa destillirtes Wasser. Dementsprechend ist der Nebenschluß w_4 ein sehr großer Widerstand. Ich verwende eine geteilte Kapillare von etwa 1 mm Lumen und ca. 10 cm Länge, in deren unteres Ende ein dünner Platindraht eingeschmolzen ist. Mittels eines übergreifenden Messingrohres kann ein Platindraht von oben

1) Zeitschr. physikal. Chem. V 6 58 (1890).

hinein gesenkt und gehoben werden. Da es auf eine sehr genaue Einstellung ankommt, so können dem Drahte durch eine kleine Kurbel mit Schraubengang beliebig kleine Verschiebungen gegeben werden. Die Griffe sowohl für die grobe Verschiebung des ganzen Messingrohres, wie für die feine Verschiebung der Kurbel sind sorgfältig isoliert. Zur bequemen Füllung und Reinigung der Kapillare ist seitlich ein weiteres Rohr angesetzt; sie ist, leicht abschraubbar, auf dem gleichen Ball wie der Meßkondensator montiert (*d* Fig. 2).

5) Der dielektrische Trog (*C* in Fig. 2) ist aus Nickel gefertigt und mit einem gut eingepaßten Ebonitdeckel versehen. Durch letzteren geht ein Rohr, an das die Kondensatorplatte befestigt ist. Durch ein in der Mitte befindliches kleines Glasstückchen wird der Abstand zwischen Platte und Trog konstant erhalten. Die Beschickung mit Flüssigkeit erfolgt leicht und sicher durch ein kleines im Deckel seitlich angebrachtes Loch mittels einer Kapillarpipette, während man dem Trog eine kleine Neigung giebt; die Gefahr, daß Luftblasen zwischen Platte und Trog verbleiben, ist dann nicht vorhanden. Trog und Deckel sind sorgfältig geschliffen; bei Untersuchung ätzender Flüssigkeiten wird eine innere Vergoldung nützlich sein. Der Kondensator läßt sich bequem reinigen und füllen und behält bei sorgfältigem Einsetzen der Platte und des Deckels seine Kapacität völlig unverändert. Durch Anwendung von Glasplättchen verschiedener Dicke kann man leicht der letzteren für die Messung passende Werte erteilen. Man kittet zweckmäßig das Glasplättchen mittels einer Spur Syndetikon an der Kondensatorplatte fest. Zur Temperaturmessung dient ein kleines in das Rohr der Kondensatorplatte eingestecktes Thermometer. Der Durchmesser des Troges beträgt etwa 3, seine Höhe ca. 2,5 cm.

6) Telephon. Da die Widerstände sehr groß sind, so ist die Empfindlichkeit des Telephons ceteris paribus seiner Windungszahl proportional; es sind daher mit äußerst dünnem Drahte bewickelte Telephone am zweckmäßigsten. Ich fand brauchbar die von Ostwald empfohlenen Erikson'schen Telephone (Widerstand ca. 100 Ohm), noch besser aber sind die von Mix und Genest fabricierten kleinen Dosentelephone (Widerstand ca. 130 Ohm), bei denen ich nach Durchprobieren der verschiedensten Telephonsorten stehen geblieben bin. Es ist nützlich, dieselben mit einer isolierenden Handhabe zu versehen, weil die direkte Berührung der metallenen Kapsel leicht ein zwar äußerst schwaches aber doch störendes Nebengeräusch giebt.

Versuchsanordnung.

Die Anordnung der Apparate zeigt Fig. 2; *J* ist das Induktorium mit den beiden aufrechtstehenden Flüssigkeitswiderständen *a a* (letztere sind der Deutlichkeit halber liegend gezeichnet); sie

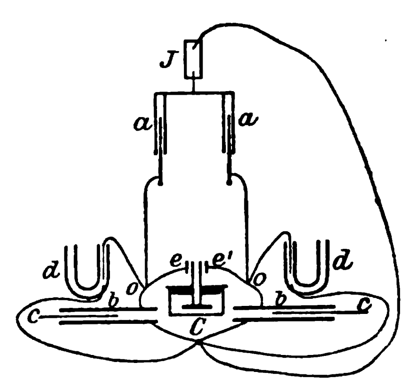


Fig. 2.

sind mit den Punkten *o o* verbunden, die durch mit Klemmschrauben versehene und neben den Meßkondensatoren auf gemeinschaftlicher Unterlage montierte Glassäulen gebildet werden. Zwei weitere Drähte führen von *o o* zu den inneren Platten *b b* der Meßkondensatoren, zwischen denen die Glasplatten *c c* verschiebbar sind. Die äußeren (dem Beobachter zugewandten Platten) sind untereinander und mit den unteren Enden der (liegend statt aufrecht gezeichneten) Kompensationswiderstände *d d* verbunden, während ihre oberen Enden mit den entsprechenden Punkten *o o* in leitender Verbindung stehen. Die Leitungsdrähte des Telephons (in der Zeichnung weggelassen) sind an *o o* geschraubt. Die beiden äußeren Platten der Meßkondensatoren sind mit dem andern Pole der sekundären Induktionsrolle sowie mit dem Kondensatortrog *C* leitend verbunden.

Die Widerstäude *a a* werden gleichgemacht; ein zwischen *a a* und *o o* geschalteter Kommutator darf beim Umlegen eine merkliche Verschiebung weder des Kapacitäts- noch des Widerstandsminimums veranlassen. Bei sehr genauen Messungen wird man einfach die Beobachtung bei beiden Lagen des Kommutators machen, um so auch die letzten kleinen Ungleichheiten zu eliminieren; für gewöhnlich ist dies jedoch nicht nöthig. Die Messung besteht einfach darin, daß man die Platte des mit der zu untersuchenden Flüssigkeit beschickten Trogs *C* (in der Fig. 2 liegend gezeichnet) einmal mit *e*, ein zweites Mal mit *e'* durch Verschiebung in Verbindung bringt; dadurch wird seine Kapacität einmal zu dem links,

ein zweites Mal zu dem rechts befindlichen Kondensator addiert. In beiden Fällen ertönt das Telephon; durch Verschieben der Glasplatte des rechts befindlichen Kondensators wird das Minimum in beiden Fällen wieder hergestellt. Falls die im Trog befindliche Substanz ein auch nur spurenweises Leitungsvermögen besitzt, bleibt das Minimum verwaschen oder wird sogar ganz undeutlich; dann kann man, vorausgesetzt, daß die Substanz nicht zu gut leitet, durch passende Veränderung der Kompensationswiderstände *d d* das Minimum wieder so scharf erhalten, daß eine Einstellung bis auf 0,1 mm möglich ist.

Die Kapacität des Troges wird (ähnlich wie bei Widerstandsbestimmungen) durch einmalige Messung einer Flüssigkeit von bekannter D.E. bestimmt; als solche empfiehlt sich das bereits von Landolt und Jahn angewandte, von Kahlbaum zu beziehende *m*-Xylol, Aethyläther oder sonst eine leicht rein zu erhaltende und bereits untersuchte Substanz. Im folgenden Abschnitt findet man einige Zahlenangaben für derartige Stoffe. Zur größeren Sicherheit wird man die Aichung von Zeit zu Zeit wiederholen.

Die Berechnung der Versuche geschieht nach folgender Formel: wenn D_0 die D.E. für die Aichungsflüssigkeit bedeutet und die Verschiebung des Meßkondensators s für den leeren, s_0 für den mit der Aichungsflüssigkeit gefüllten Trog betrug, so ergiebt sich für die D.E. einer anderen Substanz[1]), die eine Verschiebung S liefert:

$$D = (D_0 - 1)\frac{S-s}{s_0-s} + 1.$$

Die Kalibrierung des Meßkondensators geschieht sehr genau und verhältnismäßig schnell nach folgender Methode. Der leere dielektrische Trog wird durch Anwendung eines Glasplättchens von geeigneter Dicke und durch Unterlegen von Glimmerblättchen auf solche Kapacität gebracht, daß sein Hinzufügen an e' (Fig. 2) ein Herausziehen der Glasplatte des rechten Konden-

1) Mit der Verschiebung der Kompensationswiderstände erhält man gleichzeitig das Leitungsvermögen der untersuchten Substanz. Vor dem Einschalten des Troges von $w_3 = w_4$; nach dem Einschalten des Troges neben w_4 sei w_4 in w_4' (abzulesen an der Theilung der Kapillare, deren Skalenwert auszuwerten ist) verwandelt. Dann ergiebt sich der Widerstand der untersuchten Flüssigkeit w aus der Gleichung

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{w_4'} = \frac{1}{w_4};$$

aus w und der durch Aichung zu bestimmenden Widerstandskapacität des Troges berechnet sich in bekannter Weise die Leitfähigkeit der Substanz.

sators um nahe 1 cm veranlaßt. Man verstellt den linken Kondensator bis zur Minimumstellung, während der rechte auf 0 steht; schiebt hierauf den Trog an e' und mißt die entsprechende Verschiebung des rechten Kondensators genau. Sodann wird der Trog in die Mitte zwischen e und e' geschoben, der linke Kondensator eingestellt, während der rechte auf 1 steht, der Trog wieder addiert u. s. f. Würde der rechte Kondensator ohne Kaliberfehler sein, so müßte der Addition des Troges stets die gleiche Verschiebung (nämlich nahe 1 cm) entsprechen; aus den Abweichungen ergeben sich sofort die Korrektionen für den Skalenwert. Der Skalenwert des linken Meßkondensators ist natürlich hiernach sehr leicht durch Vergleich mit dem rechten zu ermitteln.

Man kann übrigens auf den linken Meßkondensator ganz verzichten und ihn durch eine leicht zu improvisierende Vorrichtung (Glasplatte zwischen zwei Metallplatten) ersetzen; ebenso kann anstatt des linken Kompensationswiderstandes eine passend gebogene und mit zwei Platindrähten versehene Kapillare Verwendung finden, ohne daß die Genauigkeit der Messung merkliche Einbuße erleidet. Allein der linke Meßkondensator erleichtert nicht nur die Kalibrirung sehr, sondern leistet auch häufig zur Aushülfe, wenn die Skala des rechten sich zu klein erweist, wichtige Dienste, so daß ich das Arbeiten in der soeben beschriebenen Anordnung doch sehr viel angenehmer gefunden habe[1]).

Messungen.

Bei den nachfolgenden Messungen waren sowohl die Verzweigungs- wie die Kompensationswiderstände mit der S. 768 beschriebenen Lösung beschickt. Die Buchstaben haben die S. 771 mitgetheilte Bedeutung. Der Temperaturkoefficient wurde sehr einfach in der Weise bestimmt, daß der Trog um etwa 10 Grade erwärmt, hierauf um etwa 20° abgekühlt und schließlich wieder auf die ursprüngliche Temperatur gebracht wurde.

Zu verschiedenen Zeiten angestellte Messungen stimmten bis auf wenige Tausendstel überein; insbesondere gab die Aichung des Kondensators mit Metaxylol absolut konstante Zahlen. Die Dielektricitätskonstante dieses Stoffes (bezogen von Kahlbaum) wurde nach den Bestimmungen von Tereschin sowie von Landolt und Jahn (l. c.) zu 2,343 bei 18° angenommen. Vorläufige

1) Die beschriebenen Apparate liefert der hiesige Universitätsmechanikus Herr Apel, der mir bei ihrer Konstruktion häufig seinen erfahrenen Rath lieh, zum Preise von ca. 95 Mk.; durch Weglassung des linken Kondensators ermäßigt sich der Preis auf ca. 65 Mk.

Bestimmungen mit einem zu absoluten Messungen geeigneten, d. h. von Nebenkapacitäten, wie Zuleitungsdrähten, Zwischenstücken von Glas u. dgl. möglichst befreiten Kondensator ergaben mir bei der gleichen Temperatur den nahe gleichen Wert 2,332. Näheres hierüber sowie über anderweitige zur Aichung von Kondensatoren geeignete Flüssigkeiten soll später mitgetheilt werden. Den Temperaturkoefficienten des Metaxylols ermittelte ich zu − 0,09 %.

Die Kapacität des leeren Kondensators s_0 betrug 2,57, die des mit 1 ccm Metaxylol von 18° beschickten S_0 betrug 5,30 Skalentheile. Bei flüchtigen Substanzen zog ich es vor, 3 ccm anzuwenden, weil bei einer zu geringen Menge Verdunstung während des Versuchs kleine Fehler veranlassen kann; für 3 ccm betrug S_0 5,61 [1]).

Toluol (käuflich). Es war für 21,5° und 1 ccm Substanz $S = 5{,}35$; somit folgt $D = 2{,}366$.

Benzol. Ich reinigte käufliches Benzol durch zweimaliges Ausfrieren, erhielt jedoch vor und nach der Reinigung fast genau (bis auf 0,5 %) die gleichen Werte. Es war für 20° und 1 ccm. Substanz $S = 5{,}13$; somit folgt $D = 2{,}258$. Der Temperaturkoefficient betrug −0,1 %.

Aether. Ich untersuchte durch Natriumdraht getrockneten sowie auch mit Wasser und Quecksilber ausgeschüttelten und hiernach über Natrium destillierten Aether. Beide Proben gaben bis auf ein Tausendstel stimmende Zahlen. Es war für 21° und 3 ccm $S = 94{,}9$; somit folgt $D = 4{,}057$. Der Temperaturkoefficient betrug −0,3 %.

Chloroform. Es war für 22° und 3 ccm $S = 112{,}0$; somit folgt $D = 4{,}814$.

Die bisherigen Substanzen besaßen mit Ausnahme der letzten ein nicht meßbares Leitungsvermögen; trotzdem war es fast stets nöthig, durch kleine Drehungen an der Kurbel der Widerstandskompensatoren das Tonminimum zu klären. Das Chloroform hingegen leitete so merklich, daß ohne Widerstandskompensation nur eine ganz rohe Messung möglich gewesen wäre. In noch viel höherem Grade gilt dies vom

Anilin (käuflich). Es war für $t = 20°$ und 1 ccm $S = 14{,}56$; somit folgt $D = 6{,}90$.

Ich habe schließlich noch Amylalkohol, Aethylalkohol und Wasser, also Stoffe von einem sehr viel größeren Leitungsvermögen untersucht. Es wurde hierbei ein Kondensator ver-

1) Für 2 ccm beträgt S_0 5,51; es kommt also auf eine genaue Pipettirung wenig an.

wandt, der aus zwei parallel geführten und durch einige Tropfen von Schmelzglas in konstantem Abstande erhaltenen Platindrähten gebildet war, weil der oben beschriebene Trog für Flüssigkeiten von sehr großer D.E. eine zu große Kapacität besitzt. Ich erhielt mit den nach der elektrometrischen Methode erhaltenen gut stimmende Zahlen, nämlich für Amylalkohol 16,6 bei 11°, für Aethylalkohol 25,7 bei 19° und für Wasser 79,3 bei 18°. Infolge der Freundlichkeit der Herren Landolt und Jahn war es mir möglich, die gleiche Probe Amylalkohol zu untersuchen, die sie bei ihren mehrfach erwähnten Messungen verwandt hatten; der obige Wert stimmt völlig mit dem ihrigen (16,7 bei 13°). Für Aethylalkohol fanden Landolt und Jahn 26,3 bei 13,2°, für Wasser lieferten neuere Messungen nach der gleichen Methode bei 18° 81 bis 82 (Franke, Heerwagen), also ist auch hier befriedigende Uebereinstimmung zwischen den nach der alten und den nach der neuen Methode gewonnenen Zahlen zu konstatieren. Freilich bedarf es bei relativ gut leitenden Flüssigkeiten gewisser noch näher zu untersuchender Vorsichtsmaßregeln, um einen störenden Einfluß der galvanischen Polarisation zu vermeiden; doch dürfte es keine besonderen Schwierigkeiten bieten, auch Salzlösungen in den Kreis der Untersuchung zu ziehen.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

September 1893.

(Fortsetzung.)

(Italien.)

Atti d. r. Accad. d. scienze di Torino. Vol. XXVIII. Disp. 9–15. 1892–93. Torino. 8°.

G. B. Rizzo, Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1892 all' osservatorio d. r. Università de Torino. Torino 1893. 8°. (R. Accad. d. scienze di Torino.)

Pubblicazione del r. Istituto di studi superiori e di performazione in Firenze:

Tocco, Le opere latine di Giordano Bruno. Firenze 1889. 8°.

Fasola, Il triennio 1883—85 nella clinica ostetricia e ginaecologica di Firenze. Pt. I. Firenze 1888. 8°.

Roster, L'acido carbonies dell'aria e del suolo di Firenze. Firenze 1889. 8°.

Luciani, Fisiologia del digiuno. Firenze 1889. 8°.

De Stefani, Le pieghe delle Alpi Apuane. Firenze 1889. 8°.

(Griechenland.)

ΑΘΗΝΑ. Τ. 5. Τευχ. 3. Ἀθήνησιν 1883. 8°.

(Belgien.)

Academie roy. des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique.

Memoires. T. XLVIII. Bruxelles 1892. T. XLIX. 1890—1893. 4°.
Memoires couronnés et mém. des savants étrangers. T. LII. Bruxelles 1890—1893.
Collection de chroniques belges inédits. Correspondance du cardinal de Granvelle T. IX. Cartulaire des comtes de Hainaut. T. V. Cartulaire de l'église St. Lambert de Liège. T. I. 4°.
Table chronologique des chartes et diplômes imprimés conc. l'histoire de la Belgique. T. VIII. Bruxelles 1892. 4°.
Introduction du t. X des rélations politiques des Pays-bas et de l'Angleterre sous le règne de Philippe II. Bruxelles 1892. 4°.
Homère. Choix de Rhapsodies par Ch. Potvin. Memoires t. L. 1te part. Brux. 1891. 4°.
Mémoires couronnés et autres mémoires. Collection in-8°. T. XLVI. Brux. 1892. 8°.
Bulletin de l'Académie roy. d. sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 3 Ser. 63e année, t. 26. No. 8. 1893.

(Holland.)
Flora batava. Aflever. 301. 302. Leiden. 4°.

(Russland.)
Finlands geologiska Undersökning. Kartblad. No. 22. 23. 24.
Observations publiées par l'Institut météorologique central. Vol. 3. 4. 5 prem. Livraisons. Helsingf. 1892. Vol. IX. Livr. 1. Helsingf. 1891. Vol. 10. Livr. 1. Helsingf. 1892. Fol.

(Nord-Amerika U. St.)
Bulletin of the Museum of comparative Zoology. Vol. XVI. No. 13. Vol. XXIV. No. 6. 7.
Bulletin of the U. St. geological survey. No. 82—86. 90—96. Washington 1891. 1892. 8°.
Mineral resources of the U. St. Year 1891. Washington 1893. 8°.
Monographs of the U. St. geological survey. Washington. Vol. XVII. XVIII. XX mit Atlas. 1892. 4°.
Transactions and Proceedings of the geographical Society of the Pacific. Vol. III. 1892. 8°.

(Chile.)
Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago (Chile). Bd. II. H. 5 u. 6. Santiago de Chile. 1893. 8°.

(Argentinien.)
Resultados del Observatorio nacional argentino. Vol. XVI. Catalogo de los zonas de exploracion. Entrega 1. — 22° a 32°. Buenos-Aires. 1892. 4°.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XXXV. Entreg. IV—V. Abril-Mayo. 1893. Buenos-Aires. 8°.

(Guatemala.)
Memoria que la seccion de estadistica presenta à la Secretaria de fomento compreniendo los trabajos relativos al año de 1892. Guatemala. 1893. 8°.

(Japan.)
The Journal of the college of science, imperial University, Japan. Vol. VI. Pt. II. Tokio 1893. 8°.

October 1893.

(Deutschland.)
Leopoldina. XXIX No. 15. 16.
XXIII. Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. Dresden 1893. 8°.
Abhandlung d. naturhistor. Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. X. H. 1. Nürnberg 1893.
Neues lausitzisches Magazin. Bd. 69. H. 1. Görlitz 1893. 8°.
W. Pertsch, Die orientalischen Handschriften d. herzgl. Bibliothek zu Gotha. Gotha 1893. 8°.
Mittheilungen d. Geschichts- u. Alterthums-Vereins zu Leisnig. Leisnig 1893. 8°.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes, herausg. v. d. deutsch. morgenländ. Gesellschaft. Bd. X. No. 1. Leipzig 1893. 8°.

Abhandlungen d. math. physik. Classe d. kgl. bayer. Akademie d. Wissensch. Bd. 18. Abth. 1. München 1893. 4°.
R. Goebel, Gedächtnisrede auf Karl von Nägeli. München 1893. 4°.
M. Carriere, Erkennen, Erleben, Erschließen. Festrede. München 1893. 4°.
Jahresbericht des physicalischen Vereins zu Frankfurt a./M. für d. Rechnungsjahr 1891—1892. Frankfurt a./M. 1893. 8°.
7. Jahresbericht des Vereins f. Naturwissenschaft zu Braunschweig für d. Vereinsjahr 1889/90 u. 1890/91. Braunschweig 1893. 8°.
F. Beilstein, Handbuch der organischen Chemie. Aufl. 3. 26. Lief. Hamburg und Leipzig 1893. 8°.
Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 46. Wiesbaden 1893. 8°.
Sitzungsberichte d. philos.-philolog. und d. histor. Classe d. k. b. Akademie d. Wissensch. zu München. 1893. H. 3. 8°.

(Oesterreich-Ungarn.)

Mittheilungen d. österr. Gradmessungs-Commission. Protokoll über die am 6. April 1893 abgehaltene Sitzung. Wien 1893. 8°.
Rerzprawy Akademii Umiejętności. Wydziat matem.-przy r. Ser. II. T. V. W. Krakowie 1893. 8°.
Földtani közlöny, redig. von M. Staub u. K. Zimányi. XXII, 11—12. Budapest 1892. XXIII, 1-8 1893. 8°.
Mittheilungen a. d. Jahrbuche d. k. ungar. geolog. Anstalt. Bd. X. H. 8. Budapest 1892. 8°.
Jahresbericht d. kgl. ung. geolog. Anstalt für 1891. Budapest 1893. 8°.
Meteorologische Zeitschrift. 1893. Hft. 10. Wien 1893. 4°.

(Schweiz.)

Der Geschichtsfreund. Bd. XLVIII. Einsiedeln Waldshut 1893. 8°.
Mémoires et documents publ. par la société d'histoire et d'archéologie de Genève. Nouv. Ser. T. 3. Livr. 3. 1893. T. V. Livr. 1. 1893. Genève. 8°.
Bulletin de la société d'histoire et d'archéologie de Genève. T. 1. Livr. 2. Genève 1892. 8°.
Compte rendu des travaux présentés à la 75. Session de la Soc. helvétique des sciences naturelles réunie à Bâle les 5—7. Septbr. 1892. Genève 1892. 8°.
Verhandlungen d. schweizer. naturforsch. Gesellschaft bei ihrer Versammlung zu Basel den 5., 6. u. 7. September 1892. 75. Jahresversamml. Basel 1892. 8°.
Mittheilungen d. naturf. Gesellschaft in Bern aus d. Jahre 1892. No. 1279—1304. Bern 1893. 8°.

(England.)

Nature. No. 1249. 1250. 1251. 1252.
Proceedings of the royal Society. Vol. LIV No. 326. 1893 Septbr. 30. 8°.
Records of the geological Survey of India. Vol. XXVI. Pt. 3. 1893.
Proceedings and transactions of the Liverpool biological Society. Vol. VII. Liverp. 1893. 8°.
Journal of the royal microscopical Society. 1893. Pt. 5. 1893. 8°.
Monthly notices of the astronomical Society. Vol. LIII. No. 9. Supplem. Number. 8°.

(Scandinavien.)

On occulting micrometers and their value . , by O. A. L. Pihl. Christiania 1893. 4.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 20.

A. Brill, über symmetrische Functionen von Variabelnpaaren. — *W. Nernst*, Methode zur Bestimmung von Dielektricitätskonstanten. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

27. December. № 21. 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 16. Dezember.

Schering legt vor: Robert Haussner in Würzburg, Zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Von

Robert Haussner in Würzburg.

Vorgelegt von E. Schering.

Die vielen Recursionsformeln, welche bis 1877 für die Bernoulli'schen Zahlen aufgestellt waren, haben alle das Gemeinsame, daß sie zur Berechnung der k^{ten} Bernoulli'schen Zahl B_k die Kenntniß aller vorhergehenden $k-1$ Zahlen erfordern. Die Herren Seidel[1]) und Stern[2]) haben zuerst Recursionsformeln aufgestellt,

---

1) Seidel, Ueber eine einfache Entstehungsweise der B. Z. und einiger verwandter Reihen. Sitz.-Ber. d. Königl. Bayr. Akademie d. Wissensch. zu München, Bd. 7. (1877) p. 157.

2) Stern, Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen u. Euler'schen Zahlen. Abhandlungen der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, Bd. 23. (1878).

welche zur Berechnung von B_k nur noch die Hälfte der Bernoulli'schen Zahlen, welche der gesuchten Zahl unmittelbar vorangehn, enthalten. Diese Formeln sind von den Verfassern mit Hilfe der Gleichungen, welche für die höheren Differenzen gegebener Größen gelten, abgeleitet worden. Formeln gleichen Charakters hat dann Herr Saalschütz[1]) durch Anwendung der Mac-Laurin'schen Summenformel gewonnen. Ich werde, dem Vorgange des Herrn Saalschütz[2]) folgend, derartige Recursionsformeln als verkürzte Recursionsformeln bezeichnen. Für die Secantencoefficienten oder Euler'schen Zahlen und für die Summen der p^{ten} Potenzen (p eine positive ganze Zahl) aller ganzen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl x sind verkürzte Recursionsformeln von Herrn Radicke[3]) gegeben worden.

Neuerdings ist von Herrn Saalschütz[4]) für die Bernoulli'schen Zahlen eine verkürzte Recursionsformel andrer Art aufgestellt worden; in dieser fehlen eine Anzahl Bernoulli'scher Zahlen mit mittleren Werten des Index. Die Formel ist abgeleitet mittelst der Näherungswerte der für $\frac{1}{x}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ gültigen Kettenbruchentwicklung; sie enthält eine willkürlich wählbare Constante, durch deren passende Wahl man erreichen kann, daß eine Anzahl aufeinanderfolgender Mittelglieder nicht vorkommen. Die größte Zahl der auf diese Weise zu eliminirenden Mittelglieder ist bei günstigster Wahl der Constanten höchstens die Hälfte aller Glieder.

Es bietet sich nun die Frage dar, ob es nicht möglich ist, Recursionsformeln aufzustellen, in denen zur Bestimmung von B_k nicht noch die Hälfte, sondern eine beliebig kleinere Zahl aller vorhergehenden Bernoulli'schen Zahlen vorkommen. Diese Frage scheint mir besonders deshalb von Interesse zu sein, weil, wenn es gelingt beliebig stark verkürzte Recursionsformeln zu erhalten, die independente Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen aus diesen Recursionsformeln unmittelbar folgen muß.

Mit Benutzung von $2q^{ten}$ Einheitswurzeln (wo q eine beliebige

---

1) Saalschütz, Verkürzte Recursionsformeln für die B. Z. Zeitschrift für Math. u. Physik, Jahrgang 37. (1892) p. 374. Vorlesungen üb. d. B. Z. (1893) p. 185.

2) Saalschütz, Vorlesungen üb. die B. Z. (Berlin, Springer, 1893.) p. 30.

3) Radicke, Zur Theorie der Euler'schen Zahlen. Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 89. (1880) p. 257.

4) Saalschütz, Zwei Abhandlungen aus dem Gebiete der B. Z. Physikalisch-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., Sitzung vom 8. Nov. 1892.

positive Zahl bedeutet) ist es mir gelungen, beliebig verkürzte Recursionsformeln aufzustellen. Da die fehlenden Glieder nicht unmittelbar auf einander folgen, so bilden diese zugleich eine neue Art verkürzter Recursionsformeln. Stelle ich z. B. die betreffende Formel für $B_{kq+\mu}$ (wo k eine positive ganze Zahl und μ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, q-1$ ist) auf, so enthält dieselbe nur die Bernoulli'schen Zahlen mit den Indices $\nu q+\mu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, k-1$); zwischen je zwei in einer Formel vorkommenden Bernoulli'schen Zahlen fehlen also immer die $q-1$ dazwischen liegenden. Wird dann speciell $k = 1$, $\mu = 0$, bez. $k = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, q-1$ gewählt, so liefert die Recursionsformel unmittelbar die independente Darstellung von B_q, bez. B_μ, und damit ist der Zusammenhang zwischen der recurrirenden und der independenten Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen hergestellt. Auch für die Euler'schen Zahlen lassen sich derartige verkürzte Recursionsformeln ableiten, welche als speciellen Fall die independente Darstellung in sich enthalten. Damit ist gezeigt, daß auch die Euler'schen Zahlen mit den Einheitswurzeln eng zusammenhängen, was für die Bernoulli'schen Zahlen schon von Kronecker[1]) nachgewiesen ist. Weiter gelingt es aber auch den unmittelbaren Zusammenhang zwischen der q^{ten} Euler'schen und der q^{ten} oder auch der $q+1^{\text{ten}}$ Bernoulli'schen Zahl aufzufinden.

Die Formeln, welche zur Ableitung der in Art. II und III gefundenen Resultate dienen, finden sich am Schlusse des Art. I. Diese Formeln lassen sich leicht direct verificiren, sie ergeben sich aber auch durch Anwendung eines Satzes, welcher den speciellen Fall eines mir von Herrn Prym mitgeteilten allgemeineren, auf n Veränderliche sich beziehenden, Satzes bildet. Da dieser Satz nicht veröffentlicht ist, so habe ich den Beweis für den Fall einer Variabele in Art. I durchgeführt. In Art. II untersuche ich dann gewisse symmetrische Functionen von $2q^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln, welche zur Ableitung der in Art. III aufgestellten beliebig verkürzten Recursionsformeln dienen. Für $q = 1$ ergeben sich aus den letzteren die gewöhnlichen Recursionsformeln[2]), in welchen alle der gesuchten vorhergehenden Bernoulli'schen oder Euler'schen Zahlen vorkommen.

Ich behalte mir vor, in einer späteren Arbeit diese verkürzten Recursionsformeln zu weiteren Untersuchungen zu verwenden.

---

1) Kronecker, Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli. Journal de Math. de Liouville. II. Série, t. I. (1856) p. 385.

2) cf. Saalschütz, Vorlesungen über die B. Z. Erster Abschnitt.

I.

Der in der Einleitung erwähnte Satz läßt sich wie folgt aussprechen:

Genügt eine Function $F(z)$ der unbeschränkt veränderlichen Größe z der Gleichung:

$$F(k^p z) = F(z), \tag{1}$$

wobei k eine von Null verschiedene reelle oder complexe Constante, p eine positive ganze Zahl bezeichnet, so läßt sich, wenn man unter α eine primitive p^{te} Einheitswurzel versteht, $F(z)$ immer und nur auf eine Weise der Gleichung:

$$F(z) = F_0(z) + F_1(z) + F_2(z) + \cdots + F_{p-1}(z) \tag{2}$$

entsprechend darstellen, wobei $F_\lambda(z)$ für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ eine Function bezeichnet, welche der Gleichung:

$$F_\lambda(kz) = \alpha^\lambda F_\lambda(z) \tag{3}$$

genügt.

Zum Beweise dieses Satzes nehme man an, daß für die Function $F(z)$ eine den Gleichungen (2) und (3) entsprechende Zerlegung existire. Versteht man dann unter ν eine ganze Zahl, so folgt auf Grund der Gleichungen (2) und (3) die Gleichung:

$$\begin{aligned} F(k^\nu z) &= F_0(k^\nu z) + F_1(k^\nu z) + F_2(k^\nu z) + \cdots + F_{p-1}(k^\nu z) \\ &= F_0(z) + \alpha^\nu F_1(z) + \alpha^{2\nu} F_2(z) + \cdots + \alpha^{(p-1)\nu} F_{p-1}(z) \end{aligned}$$

und weiter, indem man, unter λ eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p-1$ verstehend, linke und rechte Seite der letzten Gleichung mit $\alpha^{-\lambda\nu}$ multiplicirt und dann nach ν von 0 bis $p-1$ summirt, die Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \alpha^{-\lambda\nu} F(k^\nu z) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=p-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \alpha^{(\sigma-\lambda)\nu} \right) F_\sigma(z).$$

Beachtet man nun noch, daß die auf der rechten Seite in der Klammer stehende Summe, während σ von 0 bis $p-1$ geht, nur dann einen von Null verschiedenen Wert, und zwar den Wert p erhält, wenn $\sigma = \lambda$ wird, so folgt schließlich:

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \alpha^{-\lambda\nu} F(k^\nu z). \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \tag{4}$$

Da aber auch umgekehrt das Gleichungensystem (4) zu jeder gegebenen Function $F(z)$ ein System von p den Gleichungen (2) und (3) genügenden Functionen $F_0(z), F_1(z), \ldots, F_{p-1}(z)$ bestimmt, so ist damit der obige Satz bewiesen.

Aus diesem Satze folgt nun, wenn man $k = \alpha$ und entsprechend $k^p = 1$ setzt, daß sich jede Function $F(z)$ immer und nur auf eine Weise der Gleichung:

$$F(z) = F_0(z) + F_1(z) + F_2(z) + \ldots + F_{p-1}(z)$$

gemäß darstellen läßt, wobei die Function $F_\lambda(z)$ für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ jetzt der Bedingung:

$$F_\lambda(\alpha z) = \alpha^\lambda F_\lambda(z)$$

unterworfen ist. Der Formel (4) zufolge ist hier:

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \alpha^{-\lambda\nu} F(\alpha^\nu z). \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

Dieser letzte Satz wird nun im Folgenden ausschließlich auf Functionen angewendet, welche sich nach den ganzen geraden Potenzen der Variabele entwickeln lassen, und zudem wird für p stets eine gerade Zahl gewählt. Ist aber $F(z)$ eine Function dieser Art, also

$$F(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^{2n}$$

und

$$p = 2q,$$

so ergeben sich für die bei der Zerlegung von $F(z)$ auftretenden Functionen $F_0(z), F_1(z), \ldots, F_{p-1}(z)$ die Ausdrücke:

$$2q F_{2\mu+1}(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=2q-1} \alpha^{-(2\mu+1)\nu} F(\alpha^\nu z) = 0,$$

$$2q F_{2\mu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=2q-1} \alpha^{-2\mu\nu} F(\alpha^\nu z) = 2 \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu\nu} F(\alpha^\nu z)$$

$$= 2q \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_{qn+\mu} z^{2qn+2\mu}. \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

II.

Die Ergebnisse des vorigen Artikels sollen jetzt auf eine Anzahl von Functionen, welche in $2q^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln symmetrisch sind, angewendet werden. Dabei bezeichnet, wie im ganzen weiteren Verlaufe der Arbeit, α eine primitive $2q^{\text{te}}$ Einheitswurzel und ist $i = \underset{+}{\sqrt{-1}}$.

A. Es sei zunächst das folgende Product gegeben:

$$\Phi(x) = \prod_{\varrho=0}^{\varrho=q-1}\left(e^{\alpha^\varrho xi} + e^{-\alpha^\varrho xi}\right).$$

Dann ist auch:

$$\Phi(x) = \sum_p \left(e^{pxi} + e^{-pxi}\right),$$

wo die Summe in der Weise zu bilden ist, daß man an Stelle von p alle möglichen Terme $\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm .. \pm \alpha^{q-1}$ setzt, welche man erhält, indem man alle möglichen Combinationen der vor $\alpha^1, \alpha^2, .., \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen bildet. Entwickelt man jetzt $\Phi(x)$ in eine unendliche Reihe, so erhält man:

$$\Phi(x) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n P_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

wobei

$$P_0 = 2^{q-1},\ P_{2n} = \Sigma(\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \ldots \pm \alpha^{q-1})^{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist; hierbei sind wieder alle möglichen Combinationen der vor $\alpha^1, .., \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen zu nehmen und die $2n^{\text{ten}}$ Potenzen dieser Ausdrücke zu addiren. Wie aus der Definitionsgleichung von $\Phi(x)$ sich ergibt, ändert dasselbe seinen Wert nicht, wenn x durch $\alpha^\nu x$ ersetzt wird. Nimmt man noch die letzte Formel des vorigen Artikels zu Hilfe, so erhält man:

$$q\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1}\Phi(\alpha^\nu x) = 2q\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{qn}P_{2qn}\frac{x^{2qn}}{(2qn)!}.$$

Es sind also sämmtliche Größen P_{2m} deren Index m nicht gleich einem ganzzahligen Vielfachen von q ist, gleich Null, und es ist:

$$\Phi(x) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{qn}P_{2qn}\frac{x^{2qn}}{(2qn)!}.$$

B. Man entwickele weiter das folgende Product:

$$\Phi_\lambda(x) = \alpha^\lambda xi\,\frac{e^{\alpha^\lambda xi} - e^{-\alpha^\lambda xi}}{e^{\alpha^\lambda xi} + e^{-\alpha^\lambda xi}}\,\Phi(x) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

in der obigen Weise in eine unendliche Reihe; man erhält dann:

$$\Phi_\lambda(x) = -2\alpha^\lambda\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n P^{(\lambda)}_{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

$$P^{(\lambda)}_1 = 2^{q-1}\alpha^\lambda,\ P^{(\lambda)}_{2n+1} = \sum \pm(\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{2n+1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

wobei alle möglichen Combinationen der vor $\alpha^1, \ldots, \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen zu bilden und die $(2n+1)^{\text{ten}}$ Potenzen dieser Klammern, mit demselben Vorzeichen wie α^λ versehen, zu addiren sind. Für diese Function $\Phi_\lambda(x)$ besteht die Gleichung:

$$\Phi_\lambda(\alpha^\nu x) = \Phi_{\lambda+\nu}(x) = \Phi_\varrho(x),$$

wobei

$$\lambda + \nu \equiv \varrho \pmod q. \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

Man bilde nun die symmetrische Function:

$$\varphi_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(\lambda+\nu)} \Phi_\lambda(\alpha^\nu x), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

von welcher sofort zu erkennen ist, daß ihr Wert von der speciellen Wahl des λ unabhängig ist. Wendet man andrerseits auf $\Phi_\lambda(\alpha^\nu x)$ die zuletzt gefundene Beziehung an, so ist auch:

$$\varphi_\mu(x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{-2\mu\varrho} \Phi_\varrho(x).$$

Indem man jetzt die rechten Seiten der beiden für $\varphi_\mu(x)$ aufgestellten Ausdrücke nach Potenzen von x entwickelt, erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x) &= 2q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn+\mu} \frac{x^{2qn+2\mu}}{(2qn+2\mu-1)!} \alpha^{\lambda(1-2\mu)} P^{(\lambda)}_{2qn+2\mu-1} \\ &= -2 \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+2}}{(2m+1)!} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} P^{(\varrho)}_{2m+1}. \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

Hieraus folgen aber, da λ willkürlich gewählt werden kann, die folgenden G l e i c h u n g e n:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} P^{(\varrho)}_{2m+1} = 0,$$

w e n n m n i c h t v o n d e r F o r m $nq+\mu-1 \binom{n = 0, 1, 2, \ldots}{\mu = 1, 2, \ldots, q}$ i s t;

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} P^{(\varrho)}_{2qn+2\mu-1} = q\, \alpha^{\lambda(1-2\mu)} P^{(\lambda)}_{2qn+2\mu-1};$$

u n d, d a $P^{(0)}_k = P_k$ i s t:

$$\begin{aligned} P_{2qn+2\mu-1} = P^{(0)}_{2qn+2\mu-1} &= \alpha^{1-2\mu} P^{(1)}_{2qn+2\mu-1} = \ldots = \alpha^{\lambda(1-2\mu)} P^{(\lambda)}_{2qn+2\mu-1} \\ &= \ldots = \alpha^{(q-1)(1-2\mu)} P^{(q-1)}_{2qn+2\mu-1}. \end{aligned}$$

Differentiirt man $\Phi(x)$ logarithmisch nach x und multiplicirt dann beide Seiten der erhaltenen Gleichung mit $\Phi(x)$, so erhält man:

$$\Phi'(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho} i \frac{e^{\alpha^{\varrho}xi} - e^{-\alpha^{\varrho}xi}}{e^{\alpha^{\varrho}xi} + e^{-\alpha^{\varrho}xi}} \Phi(x)$$

oder

$$x\Phi'(x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \Phi_{\varrho}(x) = \varphi_q(x).$$

Vergleicht man nun die Coefficienten der Entwicklung von $x\Phi'(x)$:

$$x\Phi'(x) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n P_{2qn} \frac{x^{2qn}}{(2qn-1)!}$$

mit den Coefficienten der gleich hohen Potenzen von $\varphi_q(x)$, so ergibt sich auch:

$$P_{2qn} = qP_{2qn-1} = q\alpha^1 P^{(1)}_{2qn-1} = \cdots = q\alpha^{q-1} P^{(q-1)}_{2qn-1}. \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

C. Als dritte symmetrische Function betrachte man das Product:

$$\Psi(x) = \frac{\prod\limits_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} (e^{\alpha^{\varrho}xi} - e^{-\alpha^{\varrho}xi})}{x^q}.$$

Da nun:

$$e^{\alpha^{\varrho}xi} - e^{-\alpha^{\varrho}xi} = 2i\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(\alpha^{\varrho}x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ist, so ist die niedrigste Potenz von x, welche in $\Psi(x)$ vorkommt, x^0 und ihr Coefficient ist $(2i)^q \cdot \alpha^0 \cdot \alpha^1 \ldots \alpha^{q-1}$. Entwickelt man nun $\Psi(x)$ nach Potenzen von x, so folgt:

$$\Psi(x) = 2i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n R_{q+2n} \frac{x^{2n}}{(q+2n)!}.$$

Hierbei ist:

$$R_{q+2n} = \sum \pm (\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{q+2n}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und es ist die Summation in der Weise auszuführen, daß alle möglichen Combinationen der vor $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen zu nehmen und die $(q+2n)^{\text{ten}}$ Potenzen der einzelnen so gebildeten Klammerausdrücke dann mit dem Vorzeichen versehen zu addiren sind, welches gleich dem Producte der in der betreffenden Klammer stehenden Zeichen ist. Für $n = 0$ ergibt sich aus dem Obigen, wenn $\alpha = e^{\frac{i\pi}{q}}$ genommen wird:

$$R_q = (2i)^{q-1} q!$$

Ersetzt man in $\Psi(x)$ die Variabele x durch $\alpha^{\nu}x$, so bleibt

$\Psi(x)$ ungeändert; folglich ist, mit Benutzung der Ergebnisse des Artikels I:

$$q\,\Psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \Psi(\alpha^\nu x) = 2q i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn} R_{q(2n+1)} \frac{x^{2qn}}{(2qn+q)!},$$

und es resultirt der Satz:

Sämmtliche Größen R_{q+2m}, für die m nicht gleich einem ganzzahligen Vielfachen von q ist, sind gleich Null, und es ist:

$$\Psi(x) = 2 i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn} R_{q(2n+1)} \frac{x^{2qn}}{(2qn+q)!}.$$

D. Das Product:

$$\Psi_\lambda(x) = \alpha^\lambda x i \frac{e^{\alpha^\lambda xi} + e^{-\alpha^\lambda xi}}{e^{\alpha^\lambda xi} - e^{-\alpha^\lambda xi}} \Psi(x) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, .., q-1)$$

läßt sich in die folgende unendliche Reihe entwickeln:

$$\Psi_\lambda(x) = 2 i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \alpha^\lambda R^{(\lambda)}_{q+2n-1} \frac{x^{2n}}{(q+2n-1)!}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

$$R^{(\lambda)}_{q+2n-1} = \sum \pm (\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{q+2n-1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wobei sämmtliche Combinationen der vor $\alpha^1, \alpha^2, .., \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen zu bilden und die $(q+2n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der so erhaltenen Ausdrücke mit dem Vorzeichen, welches gleich dem Producte der vor $\alpha^1, \alpha^2, .., \alpha^{\lambda-1}, \alpha^{\lambda+1}, .., \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen ist, versehen zu addiren sind. Für dieses Product $\Psi_\lambda(x)$ besteht die Gleichung:

$$\Psi_\lambda(\alpha^\nu x) = \Psi_{\lambda+\nu}(x) = \Psi_\varrho(x)$$

wenn $\lambda + \nu \equiv \varrho \pmod q$ $\qquad (\varrho = 0, 1, 2, .., q-1)$

ist. Es läßt sich nun von der symmetrischen Function:

$$\psi_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(\lambda+\nu)} \Psi_\lambda(\alpha^\nu x) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

unschwer erkennen, daß dieselbe von λ ganz unabhängig ist. Mittelst der soeben für $\Psi_\lambda(\alpha^\nu x)$ aufgestellten Relation kann man $\psi_\mu(x)$ auch in der Form schreiben:

$$\psi_\mu(x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{-2\mu\varrho} \Psi_\varrho(x),$$

und man erhält nunmehr für $\psi_\mu(x)$ die beiden Reihenentwicklungen:

$$\psi_\mu(x) = 2qi^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn+\mu} \frac{x^{2qn+2\mu}}{(2qn+q+2\mu-1)!} \alpha^{\lambda(1-2\mu)} R^{(\lambda)}_{2nq+q+2\mu-1}$$
$$= 2i^q \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+q-1)!} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} R^{(\varrho)}_{2m+q-1}.$$

Beachtet man noch, daß $R^{(0)}_k = R_k$ ist, so folgen die nachstehenden Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} R^{(\varrho)}_{2m+1} = 0,$$

wenn m nicht von der Form $nq+\mu$ $\begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1 \end{pmatrix}$ ist;

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} R^{(\varrho)}_{2nq+q+2\mu-1} = q \cdot \alpha^{\lambda(1-2\mu)} R^{(\lambda)}_{2nq+q+2\mu-1};$$

$$R_{2nq+q+2\mu-1} = R^{(0)}_{2nq+q+2\mu-1} = \alpha^{1-2\mu} R^{(1)}_{2nq+q+2\mu-1} = \cdots =$$
$$= \alpha^{\lambda(1-2\mu)} R^{(\lambda)}_{2nq+q+2\mu-1} = \cdots = \alpha^{(q-1)(1-2\mu)} R^{(q-1)}_{2nq+q+2\mu-1}.$$

Differentiirt man $ln\, \Psi(x)$ nach x und multiplicirt man dann beide Seiten der erhaltenen Gleichung mit $\Psi(x)$, so ist:

$$\Psi'(x) = \frac{d\,\Psi(x)}{dx} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^\varrho i \frac{e^{\alpha^\varrho xi} + e^{-\alpha^\varrho xi}}{e^{\alpha^\varrho xi} - e^{-\alpha^\varrho xi}} \Psi(x) - \frac{q\,\Psi(x)}{x}$$

oder

$$q\,\Psi(x) + x\,\Psi'(x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \Psi_\varrho(x) = \psi_0(x).$$

Entwickelt man aber die linke Seite nach Potenzen von x, so erhält man:

$$q\,\Psi(x) + x\,\Psi'(x) = 2i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn} R_{q(2n+1)} \frac{x^{2qn}}{(2qn+q-1)!};$$

vergleicht man die Coefficienten dieser Entwicklung mit denen der für $\psi_0(x)$ gültigen Reihenentwicklung, so folgt:

$$R_{q(2n+1)} = q\,R_{q(2n+1)-1} = q\alpha^1 R^{(1)}_{q(2n+1)-1} = \cdots = q\alpha^{q-1} R^{(q-1)}_{q(2n+1)-1}.$$

Für $q = 1, 2, \ldots, 6$ finden sich die Größen $P_{2\sigma+1}$ und $R_{2\sigma+q-1}$ in Art. III (A.) und (B.) berechnet.

E. Es sei weiter gegeben:

$$X_\lambda(x) = \frac{\alpha^\lambda x i^q \prod_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \left(e^{\alpha^\varrho xi} - e^{-\alpha^\varrho xi}\right)}{x^q \left(e^{\alpha^\lambda xi} - e^{-\alpha^\lambda xi}\right)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$
$$= 2i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \alpha^\lambda S^{(\lambda)}_{q+2n-1} \frac{x^{2n}}{(q+2n-1)!},$$

wobei

$$S^{(0)}_{q+2n-1} = \sum \pm (\alpha^1 \pm \alpha^2 \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{q+2n-1},$$

$$S^{(\lambda)}_{q+2n-1} = \sum \pm (\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \cdots \pm \alpha^{\lambda-1} \pm \alpha^{\lambda+1} \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{q+2n-1}, \quad (\lambda = 1, 2, .., q-1)$$

und die Summation in gleicher Weise auszuführen ist, wie es unter (*C*) für die *R* definirende Summe angegeben ist; zu beachten ist, daß α^λ in $S^{(\lambda)}$ nicht vorkommt. Auch für $X_\lambda(x)$ besteht die Relation:

$$X_\lambda(\alpha^\nu x) = X_{\lambda+\nu}(x) = X_\varrho(x),$$

wenn

$$\lambda + \nu \equiv \varrho \pmod{q} \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

ist. Man kann dann die von λ unabhängige symmetrische Function:

$$\chi_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(\lambda+\nu)} X_\lambda(\alpha^\nu x) \qquad (\mu = 0, 1, 2, .., q-1)$$

auch in der Form schreiben:

$$\chi_\mu(x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{-2\mu\varrho} X_\varrho(x)$$

und erhält durch Vergleichung der beiden für $\chi_\mu(x)$ sich ergebenden Reihenentwicklungen:

$$\chi_\mu(x) = 2qi^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn+\mu} \frac{x^{2qn+2\mu}}{(2qn+q+2\mu-1)!} \alpha^{\lambda(1-2\mu)} S^{(\lambda)}_{2qn+q+2\mu-1}$$

$$= 2i^q \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(q+2m-1)!} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} S^{(\varrho)}_{q+2m-1}$$

die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} S^{(\varrho)}_{q+2m-1} = 0,$$

wenn m nicht von der Form $qn+\mu$ $\begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1 \end{pmatrix}$ ist;

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} \alpha^{\varrho(1-2\mu)} S^{(\varrho)}_{(2n+1)q+2\mu-1} = q\alpha^{\lambda(1-2\mu)} S^{(\lambda)}_{(2n+1)q+2\mu-1};$$

$$S^{(0)}_{(2n+1)q+2\mu-1} = \alpha^{1-2\mu} S^{(1)}_{(2n+1)q+2\mu-1} = \ldots = \alpha^{\lambda(1-2\mu)} S^{(\lambda)}_{(2n+1)q+2\mu-1} = \ldots \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$= \alpha^{(q-1)(1-2\mu)} S^{(q-1)}_{(2n+1)q+2\mu-1}.$$

F.) $$\mathfrak{L}_\lambda(x) = \frac{\prod_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} (e^{\alpha^\varrho xi} + e^{-\alpha^\varrho xi})}{e^{\alpha^\lambda xi} + e^{-\alpha^\lambda xi}} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, .., q-1)$$

liefert die Reihenentwicklung:

$$\mathfrak{L}_\lambda(x) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n T_{2n}^{(\lambda)}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\begin{aligned}&T_0^{(0)} = 2^{q-2},\ T_{2n}^{(0)} = \sum(\alpha^1 \pm \alpha^2 \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{2n},\\ &T_0^{(\lambda)} = 2^{q-2},\ T_{2n}^{(\lambda)} = \sum(\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \cdots \pm \alpha^{\lambda-1} \pm \alpha^{\lambda+1} \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{2n};\end{aligned}\quad (n = 1, 2, \ldots)$$

hierbei sind die Summen in analoger Weise zu bilden, wie die P definirende Summe unter (A). Da wieder die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{L}_\lambda(\alpha^\nu x) = \mathfrak{L}_{\lambda+\nu}(x) = \mathfrak{L}_\varrho(x)$$

wenn

$$\lambda + \nu \equiv \varrho \ (\text{mod. } q) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

ist, so ergibt sich

$$\omega_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1}\alpha^{-2\mu(\lambda+\nu)}\mathfrak{L}_\lambda(\alpha^\nu x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1}\alpha^{-2\mu\varrho}\mathfrak{L}_\varrho(x). \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1).$$

Durch Vergleichung der beiden für $\omega_\mu(x)$ sich ergebenden Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned}\omega_\mu(x) &= 2q\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{qn+\mu}\frac{x^{2qn+2\mu}}{(2qn+2\mu)!}\alpha^{-2\mu\lambda}T_{2qn+2\mu}^{(\lambda)}\\ &= 2\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1}\alpha^{-2\mu\varrho}T_{2m}^{(\varrho)}\end{aligned}$$

erhält man, indem man noch beachtet, daß $\omega_\mu(x)$ von λ unabhängig ist, die folgenden G l e i c h u n g e n:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1}\alpha^{-2\mu\varrho}T_{2m}^{(\varrho)} = 0,$$

w e n n $m \neq qn + \mu$, $\begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1\end{pmatrix}$ i s t;

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1}\alpha^{-2\mu\varrho}T_{2qn+2\mu}^{(\varrho)} = q\alpha^{-2\mu\lambda}T_{2qn+2\mu}^{(\lambda)}; \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$T_{2qn+2\mu}^{(0)} = \alpha^{-2\mu}T_{2qn+2\mu}^{(1)} = \cdots = \alpha^{-2\mu\lambda}T_{2qn+2\mu}^{(\lambda)} = \cdots = \alpha^{-2\mu(q-1)}T_{2qn+2\mu}^{(q-1)}.$$

G.) Man entwickele das Product:

$$\mathfrak{L}_{\varkappa\lambda}(x) = \frac{\prod_{\varrho=0}^{\varrho=q-1}(e^{\alpha^\varrho xi} + e^{-\alpha^\varrho xi})}{(e^{\alpha^\varkappa xi} + e^{-\alpha^\varkappa xi})(e^{\alpha^\lambda xi} + e^{-\alpha^\lambda xi})} \quad \begin{pmatrix}\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, q-2 \\ \lambda = \quad 1, 2, \ldots, q-1 \\ \varkappa < \lambda\end{pmatrix}$$

in die unendliche Reihe:

$$\mathfrak{L}_{\varkappa,\lambda}(x) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}T_{2n}^{(\varkappa,\lambda)},$$

wo

$$T_0^{(0,1)} = 2^{q-2},\quad T_{2n}^{(0,1)} = \sum (\alpha^2 \pm \alpha^3 \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{2n}, \qquad (n = 1, 2, ..)$$

$$T_0^{(\varkappa,\lambda)} = 2^{q-2},\quad T_{2n}^{(\varkappa,\lambda)} = \sum (\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \cdots \pm \alpha^{\varkappa-1} \pm \alpha^{\varkappa+1} \pm \cdots \pm \alpha^{\lambda-1} \pm \alpha^{\lambda+1} \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^{2n}$$

ist und die Summen in diesen Ausdrücken in analoger Weise auszuführen sind, wie die P definirende Summe unter (A). Wie aus der Definitionsgleichung von $\mathfrak{L}_{\varkappa,\lambda}(x)$ folgt, besteht die Beziehung:

$$\mathfrak{L}_{\varkappa,\lambda}(\alpha^\nu x) = \mathfrak{L}_{\varkappa+\nu,\,\lambda+\nu}(x) = \mathfrak{L}_{\varrho,\sigma}(x) = \mathfrak{L}_{\sigma,\varrho}(x),$$

wenn

$$\varkappa + \nu \equiv \varrho,\quad \lambda + \nu \equiv \sigma \pmod{q} \qquad (\varrho, \sigma = 0, 1, \ldots q-1, \varrho \neq \sigma)$$

ist. Man bilde nun, indem man $\lambda - \varkappa = \delta$ $(\delta = 1, 2, .., q-1)$ setzt:

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{(\delta)}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(\varkappa+\lambda+2\nu)} \mathfrak{L}_{\varkappa,\lambda}(\alpha^\nu x) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(2\nu+\delta)} \mathfrak{L}_{\nu,\delta+\nu}(x) \end{aligned} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, q-1)$$

und entwickele die beiden Summen in unendliche Reihen:

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{(\delta)}(x) &= 2q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn+\mu} \frac{x^{2qn+4\mu}}{(2qn+4\mu)!} \alpha^{-2\mu(\varkappa+\lambda)} T_{2qn+4\mu}^{(\varkappa,\lambda)} \\ &= 2 \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(2\nu+\delta)} T_{2m}^{(\nu,\delta+\nu)} \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-4\mu\nu} T_{2m}^{(\nu,\delta+\nu)} = 0, \quad \text{wenn } m \neq qn + 2\mu \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1 \end{pmatrix}$$

ist, und

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-4\mu\nu} T_{2qn+4\mu}^{(\nu,\delta+\nu)} = q\,\alpha^{-4\mu\varkappa} T_{2qn+4\mu}^{(\varkappa,\varkappa+\delta)};$$

da ferner $\omega_\mu^{(\delta)}(x)$ von der Wahl des $\varkappa$ unabhängig ist, so folgt auch:

$$T_{2qn+4\mu}^{(0,\delta)} = \alpha^{-4\mu} T_{2qn+4\mu}^{(1,1+\delta)} = \cdots = \alpha^{-4\mu\varkappa} T_{2qn+4\mu}^{(\varkappa,\varkappa+\delta)} = \cdots = \alpha^{-4\mu(q-1)} T_{2qn+4\mu}^{(q-1,q-1+\delta)}.$$

Damit sind aber die $\frac{q(q-1)}{2}$ Größen $T^{(\varkappa,\lambda)} \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, q-2 \\ \lambda = \varkappa+1, \varkappa+2, .., q-1 \end{pmatrix}$ reducirt auf die $q-1$ Größen $T^{(0,\delta)}$ $(\delta = 1, 2, \ldots, q-1)$ und es ist:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-2} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=q-1} \alpha^{-2\mu(\varkappa+\lambda)} T_{2qn+4\mu}^{(\varkappa,\lambda)} = \frac{q}{2} \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{-2\mu\delta} T_{2qn+4\mu}^{(0,\delta)}. \quad (\mu = 0, 1, 2, .., q-1).$$

Würde man die Function

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(\varkappa+\nu)-2\varrho(\lambda+\nu)}\,\Omega_{\varkappa,\lambda}(\alpha^\nu x) \qquad (\mu,\varrho=0,1,2,..,q-1$$

in gleicher Weise behandeln, so würde sich ergeben:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-2}\sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=q-1} \alpha^{-2\mu\varkappa-2\varrho\lambda}\,T^{(\varkappa,\lambda)}_{2qn+2\mu+2\varrho} = \frac{q}{2}\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{-2\varrho\delta}\,T^{(0,\delta)}_{2qn+2\mu+2\varrho}.$$

H.) In gleicher Weise werde auch das Product:

$$X_{\varkappa,\lambda}(x) = \frac{-\alpha^{\varkappa+\lambda}x^2\prod\limits_{\varrho=0}^{\varrho=q-1}(e^{\alpha^\varrho xi}-e^{-\alpha^\varrho xi})}{x^q(e^{\alpha^\varkappa xi}-e^{-\alpha^\varkappa xi})(e^{\alpha^\lambda xi}-e^{-\alpha^\lambda xi})} \qquad \begin{pmatrix}\varkappa=0,1,2,..,q-2\\ \lambda=\;\;1,2,..,q-1\\ \varkappa<\lambda\end{pmatrix}$$

$$= 2i^q\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(q+2n-2)!}\,\alpha^{\varkappa+\lambda}S^{(\varkappa,\lambda)}_{q+2n-2},$$

behandelt, wo

$$S^{(0,1)}_{q+2n-2} = \sum\pm(\alpha^2\pm\alpha^3\pm\cdots\pm\alpha^{q-1})^{q+2n-2}$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

$$S^{(\varkappa,\lambda)}_{q+2n-2} = \sum\pm(\alpha^0\pm\alpha^1\pm\cdots\pm\alpha^{\varkappa-1}\pm\alpha^{\varkappa+1}\pm\cdots\pm\alpha^{\lambda-1}\pm\alpha^{\lambda+1}\pm\cdots\pm\alpha^{q-1})^{q+2n-2}$$

ist; die Summen in den Definitionsgleichungen für $S^{(0,1)}$ und $S^{(\varkappa,\lambda)}$ sind in derselben Weise auszuführen, wie dies unter (*C*) für die *R* definirende Summe angegeben ist. Auch für dieses Product besteht die Beziehung:

$$X_{\varkappa,\lambda}(\alpha^\nu x) = X_{\varkappa+\nu,\lambda+\nu}(x) = X_{\varrho,\sigma}(x) = X_{\sigma,\varrho}(x)$$

wenn

$$\varkappa+\nu\equiv\varrho,\quad \lambda+\nu\equiv\sigma\ (\text{mod. } q) \qquad (\varrho,\sigma=0,1,\ldots,q-1,\ \varrho\neq\sigma)$$

ist. Es sei nun $\lambda-\varkappa=\delta\ (\delta=1,2,\ldots,q-1)$ und

$$\chi^{(\delta)}_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1}\alpha^{-2\mu(\varkappa+\lambda+2\nu)}X_{\varkappa,\lambda}(\alpha^\nu x)$$

$$(\mu=0,1,\ldots,q-1)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1}\alpha^{-2\mu(2\nu+\delta)}X_{\nu,\delta+\nu}(x)$$

Diese beiden Summen liefern die Reihenentwicklungen:

$$\chi^{(\delta)}_\mu(x) = 2qi^q\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{qn}\frac{x^{2qn+4\mu}}{(2qn+q+4\mu-2)!}\,\alpha^{(1-2\mu)(\varkappa+\lambda)}S^{(\varkappa,\lambda)}_{2qn+q+4\mu-2}$$

$$= 2i^q\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(q+2m-2)!}\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1}\alpha^{(1-2\mu)(2\nu+\delta)}S^{(\nu,\delta+\nu)}_{q+2m-2}.$$

Mithin ist:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{2\nu(1-2\mu)} S^{(\nu,\,\delta+\nu)}_{q+2m-2} = 0, \text{ wenn } m \neq q\,n+2\mu \begin{pmatrix} n=0,1,2,\ldots \\ \mu=0,1,2,\ldots,q-1 \end{pmatrix} \text{ ist;}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{2\nu(1-2\mu)} S^{(\nu,\,\delta+\nu)}_{2qn+q+4\mu-2} = q\,\alpha^{2\varkappa(1-2\mu)} S^{(\varkappa,\,\varkappa+\delta)}_{2qn+q+4\mu-2};$$

und da $\chi_{\mu}^{(\delta)}(x)$ von $\varkappa$ unabhängig ist:

$$S^{(0,\,\delta)}_{2qn+q+4\mu-2} = \alpha^{2(1-2\mu)} S^{(1,\,1+\delta)}_{2qn+q+4\mu-2} = \cdots = \alpha^{2\varkappa(1-2\mu)} S^{(\varkappa,\,\varkappa+\delta)}_{2qn+q+4\mu-2} = \cdots$$
$$\cdots = \alpha^{2(q-1)(1-2\mu)} S^{(q-1,\,q-1+\delta)}_{2qn+q+4\mu-2}.$$

Hiermit sind die $\frac{q(q-1)}{2}$ Größen $S^{(\varkappa,\lambda)} \begin{pmatrix} \varkappa = 0,1,2,\ldots,q-2 \\ \lambda = \varkappa+1,\varkappa+2,\ldots,q-1 \end{pmatrix}$ reducirt auf die $q-1$ Größen $S^{(0,\delta)}$ $(\delta = 1,2,\ldots,q-1)$, und es ist:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-2}\sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=q-1} \alpha^{(1-2\mu)(\varkappa+\lambda)} S^{(\varkappa,\lambda)}_{2qn+q+4\mu-2} = \frac{q}{2}\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{(1-2\mu)\delta} S^{(0,\,\delta)}_{2qn+q+4\mu-2}.$$

Auf gleiche Weise läßt sich die allgemeinere Beziehung beweisen:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-2}\sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=q-1} \alpha^{(1-2\mu)\varkappa+(1-2\varrho)\lambda} S^{(\varkappa,\lambda)}_{2qn+q+2\mu+2\varrho-2} = \frac{q}{2}\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{(1-2\varrho)\delta} S^{(0,\,\delta)}_{2qn+q+2\mu+2\varrho-2}.$$

$$\begin{pmatrix} \mu = 0,1,2,\ldots,q-1 \\ \varrho = 0,1,2,\ldots,q-1 \end{pmatrix}$$

J.) Das letzte Product sei:

$$\Psi_{\varkappa,\lambda}(x) = -\alpha^{\varkappa+\lambda}x^2 \frac{e^{\alpha^{\varkappa}xi}+e^{-\alpha^{\varkappa}xi}}{e^{\alpha^{\varkappa}xi}-e^{-\alpha^{\varkappa}xi}} \frac{e^{\alpha^{\lambda}xi}+e^{-\alpha^{\lambda}xi}}{e^{\alpha^{\lambda}xi}-e^{-\alpha^{\lambda}xi}}\,\Psi(x) \begin{pmatrix} \varkappa=0,1,2,\ldots,q-2, \\ \lambda=\ \ 1,2,\ldots,q-1 \\ \varkappa<\lambda \end{pmatrix}$$
$$= 2i^{q}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(q+2n-2)!}\,\alpha^{\varkappa+\lambda} R^{(\varkappa,\lambda)}_{q+2n-2}.$$

Hierbei ist:

$$R^{(\varkappa,\lambda)}_{q+2n-2} = \sum \pm(\alpha^{0}\pm\alpha^{1}\pm\cdots\pm\alpha^{q-1})^{q+2n-2}, \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

wo sämmtliche Combinationen der vor $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen zu bilden und die $(q+2n-2)^{\text{ten}}$ Potenzen der so erhaltenen Ausdrücke mit dem Vorzeichen, welches gleich dem Producte der vor $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{\varkappa-1}, \alpha^{\varkappa+1}, \ldots \alpha^{\lambda-1}, \alpha^{\lambda+1}, \ldots, \alpha^{q-1}$ stehenden Zeichen ist, versehen zu addiren sind. Es besteht nun die Gleichung:

$$\Psi_{\varkappa,}{}^{\lambda}(\alpha^{\nu}x) = \Psi_{\varkappa+\nu,\,\lambda+\nu}(x) = \Psi_{\varrho,\,\sigma}(x) = \Psi_{\sigma,\,\varrho}(x),$$

wenn

$$\varkappa + \nu \equiv \varrho, \quad \lambda + \nu \equiv \sigma \pmod{q} \qquad (\varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots, q-1, \varrho \neq \sigma)$$

ist. Es sei jetzt:

$$\lambda - \varkappa = \delta \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, q-1)$$

und

$$\psi_\mu^{(\delta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(\varkappa+\lambda+2\nu)} \Psi_{\varkappa,\lambda}(\alpha^\nu x) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{-2\mu(2\nu+\delta)} \Psi_{\nu,\delta+\nu}(x)$$

Durch Coefficientenvergleichung der beiden für diese Summen sich ergebenden Reihenentwicklungen, welche sich von den unter (H) für $\chi_\mu^{(\delta)}(x)$ gegebenen nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle von $S^{(\varkappa,\lambda)}$ hier $R^{(\varkappa,\lambda)}$ getreten ist, erhält man für die $R^{(\varkappa,\lambda)}$ dieselben Gleichungen, welche unter (H) für die $S^{(\varkappa,\lambda)}$ aufgestellt sind. Es lassen sich also auch die $\frac{q(q-1)}{2}$ Größen $R^{(\varkappa,\lambda)}$ $\left(\begin{smallmatrix}\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, q-2 \\ \lambda = \varkappa+1, \varkappa+2, \ldots, q-1\end{smallmatrix}\right)$ reduciren auf die $q-1$ Größen $R^{(0,\delta)}$ $(\delta = 1, 2, \ldots, q-1)$ und es ist:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-2} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=q-1} \alpha^{(1-2\mu)(\varkappa+\lambda)} R^{(\varkappa,\lambda)}_{2qn+q+4\mu-2} = \frac{q}{2} \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{(1-2\mu)\delta} R^{(0,\delta)}_{2qn+q+4\mu-2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Auch die am Schlusse von (H) gegebene allgemeinere Gleichung gilt für die $R^{(\varkappa,\lambda)}$ in gleicher Weise.

Man differentiire jetzt $ln\, \Psi_\varkappa(x)$ und multiplicire beide Seiten der so erhaltenen Gleichung mit $x\, \Psi_\varkappa(x)$; dann ist:

$$x\, \Psi'_\varkappa(x) = \frac{x\, d\, \Psi_\varkappa(x)}{dx} = -(q-1)\Psi_\varkappa(x) + \sum_{\substack{\lambda=0,\ldots,\varkappa-1,\\ \varkappa+1,\ldots,q-1}} \Psi_{\varkappa,\lambda}(x) - \alpha^{2\varkappa} x^2 \Psi \ldots$$

Summirt man jetzt noch inbezug auf $\varkappa$ von 0 bis $q-1$, so erhält man:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-1} x\, \Psi'_\varkappa(x) + (q-1)\psi_0(x) = \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \psi_0^{(\delta)}(x) - x\, \Psi(x) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-1} \alpha^{2\varkappa} \ldots$$

$$= \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \psi_0^{(\delta)}(x).$$

Indem man nun die früher für $\Psi_\varkappa(x)$ gegebene Entwicklung ei…

x differentiirt und für ψ_0 und $\psi_0^{(\delta)}$ die unendlichen Reihen einsetzt, wird aus der vorstehenden Gleichung die folgende:

$$2i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn} R_{2qn+q} \frac{x^{2qn}}{(2qn+q-2)!}$$

$$= 2i^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{qn} \frac{x^{2qn} q}{(2qn+q-2)!} \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{\delta} R^{(0,\delta)}_{2qn+q-2},$$

folglich ist:

$$q \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{\delta} R^{(0,\delta)}_{2qn+q-2} = R_{2qn+q}. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Größen

$$S^{(0)}, \quad T^{(0)}, \quad \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{(1-2\mu)\delta} S^{(0,\delta)}, \quad \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{(1-2\mu)\delta} R^{(0,\delta)}, \quad \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{-2\mu\delta} T^{(0,\delta)}$$

finden sich für $q = 1, 2, 3, 4$ in Art. III (D.) und (F.) berechnet.

III.

Mit Hilfe der in Art. I und II gefundenen Resultate sollen jetzt beliebig stark verkürzte Recursionsformeln für die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen aufgestellt werden. Bezeichnet, wie bisher, α eine primitive Einheitswurzel der Gleichung $z^{2q}-1=0$, und ist μ eine bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, q-1$, so sind die Recursionsformeln in der Art verkürzt, daß sie nur noch Bernoulli'sche oder Euler'sche Zahlen enthalten, deren Indices die Form $\sigma q + \mu$ ($\sigma = 0, 1, 2 \ldots, k$, wo k eine beliebige positive ganze Zahl ist) haben.

A.) Es sei β_m der m^{te} Tangentencoefficient, welcher mit der m^{ten} Bernoulli'schen Zahl B_m bekanntlich durch die einfache Beziehung:

$$\beta_m = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_m$$

verbunden ist; dann ist

$$x\,tg\,x = -ix \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{e^{xi}+e^{-xi}} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \beta_m \frac{x^{2m}}{(2m-1)!}$$

Indem man in der letzten Formel des Art. I an Stelle von $F(x)$ diese Function $x\,tg\,x$ setzt, erhält man:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{(1-2\mu)\nu}\, ix \frac{e^{\alpha^\nu xi}-e^{-\alpha^\nu xi}}{e^{\alpha^\nu xi}+e^{-\alpha^\nu xi}} = -q \sum_{m=0}^{m=\infty} \beta_{qm+\mu} \frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu-1)!}.$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, q).$$

Durch beiderseitige Multiplication mit der Function $\Phi(x)$ [cf. Art. II (A, B)] geht diese Gleichung über in:

$$\varphi_\mu(x) = -q \sum_{m=0}^{m=\infty} \beta_{qm+\mu} \frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu-1)} \Phi(x).$$

Entwickelt man nun $\Phi(x)$ und $\varphi_\mu(x)$ in unendliche Reihen und beachtet dabei die in den Abschnitten (A) und (B) des vorigen Artikels gefundenen Resultate, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen schließlich folgende Recursionsformeln für die Tangentencoefficienten $\beta_{qk+\mu}$:

$$(1)\quad P_{2qk+2\mu-1} = \sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{qm+\mu+1} \binom{2qk+2\mu-1}{2qm+2\mu-1} P_{2q(k-m)} \beta_{qm+\mu},$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots q-1)$$

wo

$$\beta_0 = 0,\ P_0 = 2^{q-1},\quad P_\varrho = \sum (\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \cdots \pm \alpha^{q-1})^\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

ist, und $\binom{h}{g}$ den g^{ten} Binomialcoefficienten von h bezeichnet. Für $k = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, q-1$ und für $k = 1$, $\mu = 0$ folgen hieraus die independenten Darstellungen der Tangentencoefficienten β_σ ($\sigma = 1, 2, \ldots, q$):

$$(1^*)\qquad \beta_\sigma = (-1)^{\sigma+1} \frac{P_{2\sigma-1}}{2^{q-1}}.$$

Ist $\mu = 0$, so kann man die Recursionsformel für die Tangentencoefficienten β_{qm} noch auf verschiedene andere Weisen ableiten, z. B.: Es ist auch:

$$ln\left(\frac{\Phi(x)}{2^q}\right) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} ln \cos(\alpha^\nu x).$$

Man setze nun für $\Phi(x)$ die im vorigen Artikel gegebene Reihenentwicklung ein, beachte, daß:

$$ln \cos(\alpha^\nu x) = -\sum_{m=1}^{m=\infty} \beta_m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

ist und benutze die bekannte Recursionsformel:

$$kA_k = \sum_{m=0}^{m=k} (k-m) a_{k-m} A_m,\quad A_0 = 1,$$

welche die Größen A und a mit einander verbindet, wenn

$$ln(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ist. Diese Methode hat aber den Nachteil, daß sie nur für $\mu = 0$ brauchbar ist, nicht aber für die anderen Werte von μ ($\mu = 1, 2, \ldots, q-1$). Dasselbe gilt von den anderen mir bekannten Verfahren

zur Herleitung dieser so verkürzten Recursionsformeln, weshalb diese anderen Methoden unerwähnt bleiben mögen.

Wählt man in der Formel für die independente Darstellung von β_σ den Index $\sigma = q$, so erhält man:

$$\beta_q = (-1)^{q+1} \frac{P_{2q-1}}{2^{q-1}} = (-1)^{q+1} \frac{P_{2q}}{q\, 2^{q-1}},$$

welche Formel der von Kronecker[1]) gegebenen ähnlich ist.

Es ist vielleicht die Bemerkung nicht ohne Interesse, daß, wenn q eine ungerade Zahl ist, β_q auch durch die sämmtlichen q^{ten} Einheitswurzeln dargestellt werden kann. Ist $\hat{\alpha}$ eine primitive q^{te} Einheitswurzel, und bildet man:

$$\hat{P}_\varrho = \sum (\hat{\alpha}^0 \pm \hat{\alpha}^1 \pm \cdots \pm \hat{\alpha}^{q-1})^\varrho,$$

wo die Summation in derselben Weise auszuführen ist, wie bei den Größen P, so ist leicht zu erkennen, daß

$$\hat{P}_\varrho = P_\varrho$$

ist. Folglich ergeben sich auch, wenn man von den $\hat{\alpha}$ und $\hat{P}$ ausgeht, dieselben recurrirenden und independenten Formeln, welche oben, von den α und P ausgehend, gefunden sind.

Im Folgenden seien noch die Werte der P für $q = 1, 2, \ldots, 6$ zusammengestellt, welche sich ergeben, wenn $\alpha = e^{+\frac{\pi i}{q}}$ gewählt

---

1) Kronecker gibt (a. a. O. p. 391) für die q^{te} Bernoulli'sche Zahl die Formel:

$$B_q = \frac{(-1)^{q+1}}{2^{4q}(2^{4q}-1)} \mathfrak{P}_{2q},$$

also:

$$\beta_q = \frac{(-1)^{q+1}}{2^{2q}\, 2q} \mathfrak{P}_{2q},$$

wo

$$\mathfrak{P}_{2q} = \sum (\pm \alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \ldots \pm \alpha^{2q-1})^{2q}$$

ist. Für die wirkliche Berechnung sind die P viel geeigneter als die $\mathfrak{P}$, da die ersteren nur aus 2^{q-1}, die letzteren aber aus 2^{2q} Snmmanden sich zusammensetzen. Während aber für beliebige positive ganze Zahlen $\varkappa$ die Gleichung:

$$\mathfrak{P}_{2\varkappa+1} = 0$$

gilt, sind die $P_{2\varkappa+1}$ von Null verschieden. Durch Vergleich ergibt sich zwischen P_{2q} und $\mathfrak{P}_{2q}$ die Beziehung:

$$\mathfrak{P}_{2q} = 2^{+q} P_{2q}.$$

wird[1]). Dabei bezeichnet $F(a, b, c, x)$ die Gaußische hypergeometrische Reihe. k ist eine positive ganze Zahl größer als Null. Wie früher angegeben, ist für beliebig große Werte von q:

$$P_0 = 2^{q-1}.$$

$q = 1.$

$$\mu = 0: \quad P_{2k} = P_{2k-1} = 1;$$

$q = 2.$

$$\mu = 0: \tfrac{1}{2} P_{4k} = P_{4k-1} = (-1)^k 2^{2k},$$
$$\mu = 1: \qquad P_{4k+1} = (-1)^k 2^{2k+1};$$

$q = 3.$

$$\mu = 0: \tfrac{1}{3} P_{6k} = P_{6k-1} = 2^{6k},$$
$$\mu = 1: \qquad P_{6k+1} = 2^{6k+2},$$
$$\mu = 2: \qquad P_{6k+2} = -2^{6k+3};$$

$q = 4.$

$$\mu = 0:$$
$$\tfrac{1}{4} P_{8k} = P_{8k-1} = (-1)^k 2^{6k+1} F(-2k, 2k, \tfrac{1}{2}, -1),$$
$$\mu = 1:$$
$$P_{8k+1} = (-1)^k 2^{6k+3} F(-2k, 2k+1, \tfrac{1}{2}, -1),$$
$$\mu = 2:$$
$$P_{8k+2} = (-1)^{k+1} (4k+1) 2^{6k+4} F(-2k, 2k+1, \tfrac{3}{2}, -1),$$
$$\mu = 3:$$
$$P_{8k+3} = (-1)^k (4k+2) 2^{6k+6} F(-2k, 2k+2, \tfrac{3}{2}, -1);$$

$q = 5.$

$$\mu = 0:$$
$$\tfrac{1}{5} P_{10k} = P_{10k-1} = 2^{10k} [2 F(-5k, 5k, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) + 1],$$
$$\mu = 1:$$
$$P_{10k+1} = 2^{10k+2} [2 F(-5k-1, 5k+1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) + 1],$$

---

1) Betreffs der Berechnung der Größen P für $q = 4, 5, 6$ sei bemerkt, daß von den folgenden Formeln, welche Gauß in seiner Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. (Werke, Bd. III p. 123 und 207) gegeben hat, Gebrauch gemacht worden ist:

$$(t+u)^n + (t-u)^n = 2t^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{uu}{tt}\right) \quad \text{[l. c. p. 127 Formel II.]}$$

$$(t+u)^n - (t-u)^n = 2nt^{n-1} u F\left(\frac{-n+1}{2}, \frac{-n+2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{uu}{tt}\right) \quad \text{[„ „ „ IV.]}$$

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{-a} F\left(a, c-b, c, -\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{[„ p. 218 Formel 91.}$$

$$= (1-x)^{-b} F\left(b, c-a, c, -\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{[„ „ „ 92.]}$$

$\mu = 2:$

$$P_{10k+3} = -2^{10k+4}\left[2\,F(-5k-1, 5k+1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) - 1\right],$$

$\mu = 3:$

$$P_{10k+5} = 2^{10k+6}\left[(10k+5)\,F(-5k-2, 5k+3, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) - 3\right],$$

$\mu = 4:$

$$P_{10k+7} = -2^{10k+8}\left[2\,F(-5k-3, 5k+3, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) - 1\right];$$

$q = 6.$

$\mu = 0:$

$$\tfrac{1}{6}P_{12k} = P_{12k-1} = 2^{12k+1}\left\{(-1)^k\left[F(-6k, 6k, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + 2^{6k-1}\right] + 1\right\},$$

$\mu = 1:$

$$P_{12k+1} = 2^{12k+3}\left\{(-1)^k\left[F(-6k-1, 6k+1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + 2^{6k}\right] + 1\right\},$$

$\mu = 2:$

$$P_{12k+3} = 2^{12k+4}\left\{(-1)^{k+1}\left[(12k+3)F(-6k-1, 6k+2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+1}\right] - 1\right\},$$

$\mu = 3:$

$$P_{12k+5} = 2^{12k+7}\left\{(-1)^k\left[F(-6k-2, 6k+2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+2}\right] + 1\right\},$$

$\mu = 4:$

$$P_{12k+7} = 2^{12k+9}\left\{(-1)^{k+1}\left[F(-6k-3, 6k+3, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+3}\right] + 1\right\},$$

$\mu = 5:$

$$P_{12k+9} = 2^{12k+10}\left\{(-1)^k\left[(12k+9)F(-6k-4, 6k+5, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+4}\right] - 1\right\}.$$

B. Von der Gleichung:

$$x \cot x = xi\,\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{e^{xi} - e^{-xi}} = 1 - \sum_{m=1}^{m=\infty} 2^{2m} B_m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

ausgehend, erhält man zunächst:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^\nu xi\,\frac{e^{\alpha^\nu xi} + e^{-\alpha^\nu xi}}{e^{\alpha^\nu xi} - e^{-\alpha^\nu xi}} = q\left[1 - \sum_{m=1}^{m=\infty} 2^{2qm} B_{qm} \frac{x^{2qm}}{(2qm)!}\right],$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \alpha^{\nu(1-2\mu)} xi\,\frac{e^{\alpha^\nu xi} + e^{-\alpha^\nu xi}}{e^{\alpha^\nu xi} - e^{-\alpha^\nu xi}} = -q\sum_{m=0}^{m=\infty} 2^{2qm+2\mu} B_{qm+\mu} \frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu)!} \quad (\mu = 1, 2, .., q-1)$$

und hieraus durch beiderseitige Multiplication mit $\Psi(x)$ [cf. Art. II (C, D)]:

$$\psi_0(x) = q\left[1 - \sum_{m=1}^{m=\infty} 2^{2qm} B_{qm} \frac{x^{2qm}}{(2qm)!}\right]\Psi(x),$$

$$\psi_\mu(x) = -q\sum_{m=0}^{m=\infty} 2^{2qm+2\mu} B_{qm+\mu} \frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu)!}\,\Psi(x).$$

Unter Beachtung der in den Abschnitten (C) und (D) des vorigen Artikels gefundenen Resultate folgen dann durch Coefficientenvergleichung der für die vorstehenden Ausdrücke gültigen Reihen-

entwicklungen die folgenden Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen:

$$(2a.)\qquad 2k\,R_{q(2k+1)} = 2q\,k\,R_{q(2k+1)-1} = \sum_{m=1}^{m=k}(-1)^{qm+1}\binom{q(2k+1)}{2qm}2^{2qm}R_{q(2k+1-2m)}B_{qm},$$

$$(2b.)\qquad [q(2k+1)+2\mu]\,R_{q(2k+1)+2\mu-1} = \sum_{m=0}^{m=k}(-1)^{qm+\mu+1}\binom{q(2k+1)+2\mu}{2qm+2\mu}2^{2qm+2\mu}R_{q(2k+1-2m)}B_{qm+\mu}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, q-1)$$

wo

$$R_\sigma = \sum \pm(\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \ldots \pm \alpha^{q-1})^\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

und für $\alpha = e^{\frac{\pi i}{q}}$: $R_q = (2i)^{q-1}q!$ ist.

Indem man in (2a) $k = 1$ und in (2b) $k = 0$ setzt, erhält man die folgenden independenten Darstellungen[1]) der Bernoulli'schen Zahlen:

$$(2a^*.)\qquad B_q = i^{q-1}\frac{q(2q)!}{(3q)!}\frac{R_{3q-1}}{2^{3q-2}} = i^{q-1}\frac{(2q)!}{(3q)!}\frac{R_{3q}}{2^{3q-2}},$$

$$(2b^*.)\qquad B_\mu = i^{2\mu-q-1}\frac{(2\mu)!}{(q+2\mu-1)!}\frac{R_{q+2\mu-1}}{2^{q+2\mu-1}}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q-1).$$

Auch in diesem Falle kann, wenn q eine ungerade Zahl ist, B_q durch die sämmtlichen q^{ten} Einheitswurzeln dargestellt werden. Ist nämlich:

$$\hat{R}_\varrho = \sum \pm(\hat{\alpha}^0 \pm \hat{\alpha}^1 \pm \ldots \pm \hat{\alpha}^{q-1})^\varrho,$$

so ist:

$$\hat{R}_\varrho = R_\varrho.$$

Es mögen noch die Werte der R für $q = 1, 2, \ldots, 6$ und $\alpha = e^{+\frac{\pi i}{q}}$ folgen; F bezeichnet wieder die Gaußische hypergeometrische Reihe und k irgend eine ganze positive Zahl, die Null eingeschlossen.

---

1) Kronecker gibt (a. a. O. p. 391) für B_q die Gleichung:

$$B_q = \frac{(-1)^q}{2^{4q}(2q+1)(2q+2)\ldots 4q}\,\mathfrak{R}_{4q},$$

wo

$$\mathfrak{R}_{4q} = \sum \pm(\pm\alpha^0 \pm \alpha^1 \pm \ldots \pm \alpha^{2q-1})^{4q}$$

ist. Betreffs des Verhältnisses der Kronecker'schen Größen $\mathfrak{R}$ zu den oben gebrauchten R gilt das für die $\mathfrak{P}$ und P Gesagte. Speciell ist

$$\mathfrak{R}_{4q} = -(-i)^{q-1}\frac{2^{q+2}(4q)!}{(3q)!}R_{3q}.$$

$q = 1.$

$$\mu = 0: \quad R_{2k+1} = R_{2k} = 1;$$

$q = 2.$

$$\mu = 0: \tfrac{1}{2} R_{4k+2} = R_{4k+1} = i(-1)^k 2^{2k+1},$$
$$\mu = 1: \qquad = R_{4k+3} = i(-1)^k 2^{2k+2};$$

$q = 3.$

$$\mu = 0: \tfrac{1}{3} R_{6k+3} = R_{6k+2} = -2^{6k+3},$$
$$\mu = 1: \qquad R_{6k+4} = -2^{6k+5},$$
$$\mu = 2: \qquad R_{6k+6} = 2^{6k+6};$$

$q = 4.$

$\mu = 0:$
$$\tfrac{1}{4} R_{8k+4} = R_{8k+3} = i(-1)^{k+1} 2^{6k+4} F(-2k-1, 2k+1, \tfrac{1}{2}, -1),$$
$\mu = 1:$
$$R_{8k+5} = i(-1)^{k+1} 2^{6k+6} F(-2k-1, 2k+2, \tfrac{1}{2}, -1),$$
$\mu = 2:$
$$R_{8k+7} = i(-1)^k \; 2^{6k+7} (4k+3) F(-2k-1, 2k+2, \tfrac{3}{2}, -1),$$
$\mu = 3:$
$$R_{8k+9} = i(-1)^{k+1} 2^{6k+9} (4k+4) F(-2k-1, 2k+3, \tfrac{3}{2}, -1);$$

$q = 5.$

$\mu = 0:$
$$\tfrac{1}{5} R_{10k+5} = R_{10k+4} = 2^{10k+5} [(10k+5) F(-5k-2, 5k+3, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{4}) + 1],$$
$\mu = 1:$
$$R_{10k+6} = 2^{10k+7} [(10k+7) F(-5k-3, 5k+4, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{4}) + 1],$$
$\mu = 2:$
$$R_{10k+8} = -2^{10k+9} [(10k+7) F(-5k-3, 5k+4, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{4}) - 1],$$
$\mu = 3:$
$$R_{10k+10} = 2^{10k+10} [2F(-5k-5, 5k+5, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) - 3],$$
$\mu = 4:$
$$R_{10k+12} = -2^{10k+13} [(10k+11) F(-5k-5, 5k+6, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{4}) - 1],$$

$q = 6.$

$\mu = 0:$
$$\tfrac{1}{6} R_{12k+6} = R_{12k+5} = i(-1)^k 2^{12k+7} [F(-6k-3, 6k+3, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + 2^{6k+2}],$$
$\mu = 1:$
$$R_{12k+7} = i(-1)^k 2^{12k+9} [F(-6k-4, 6k+4, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + 2^{6k+3}],$$
$\mu = 2:$
$$R_{12k+9} = i 2^{12k+10} \{(-1)^{k+1} [(12k+9) F(-6k-4, 6k+5, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+4}] - 3\},$$
$\mu = 3:$
$$R_{12k+11} = i(-1)^k 2^{12k+13} [F(-6k-5, 6k+5, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+5}],$$
$\mu = 4:$
$$R_{12k+13} = i(-1)^{k+1} 2^{12k+15} [F(-6k-6, 6k+6, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+6}];$$

$$\mu = 5:$$
$$R_{12k+15} = i\,2^{12k+16}\{(-1)^k[(12k+15)F(-6k-7, 6k+8, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}) - 2^{6k+7}] + 3\}.$$

C. Andere Formeln für die Bernoulli'schen Zahlen erhält man, wenn man von der Gleichung:

$$\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{xi}{2}\,\frac{2+e^{xi}+e^{-xi}}{e^{xi}-e^{-xi}} = 1 - \sum_{m=1}^{m=\infty} B_m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

ausgeht. Es folgen dann aus den Gleichungen:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \frac{\alpha^\nu xi}{2}\,\frac{2+e^{\alpha^\nu xi}+e^{-\alpha^\nu xi}}{e^{\alpha^\nu xi}-e^{-\alpha^\nu xi}} = q\left[1-\sum_{m=1}^{m=\infty} B_{qm}\frac{x^{2qm}}{(2qm)!}\right],$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \frac{\alpha^{\nu(1-2\mu)} xi}{2}\,\frac{2+e^{\alpha^\nu xi}+e^{-\alpha^\nu xi}}{e^{\alpha^\nu xi}-e^{-\alpha^\nu xi}} = -q\sum_{m=0}^{m=\infty} B_{qm+\mu}\frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu)!}$$
$$(\mu = 1, 2, .., q-1)$$

durch beiderseitige Multiplication mit $\Psi(x)$ die weiteren Gleichungen [cf. Art. II (D) und (E)]:

$$\chi_0(x) + \tfrac{1}{2}\psi_0(x) = q\left[1-\sum_{m=1}^{m=\infty} B_{qm}\frac{x^{2qm}}{(2qm)!}\right]\Psi(x),$$

$$\chi_\mu(x) + \tfrac{1}{2}\psi_\mu(x) = -q\sum_{m=0}^{m=\infty} B_{qm+\mu}\frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu)!}\Psi(x).$$

Indem man nun für $\Psi(x)$, $\psi(x)$ und $\chi(x)$ die im vorhergehenden Abschnitte gefundenen Reihenentwicklungen einsetzt, findet man durch Coefficientenvergleichung die folgenden **Recursionsformeln**:

(3a.)
$$(2k+1)\,q\,S^{(0)}_{q(2k+1)-1} + \frac{2k-1}{2}\,q\,R_{q(2k+1)-1}$$
$$= -\sum_{m=1}^{m=k}(-1)^{qm}\binom{q(2k+1)}{2qm} R_{q(2k+1-2m)}\,B_{qm},$$

(3b.)
$$[(2k+1)\,q + 2\mu]\,[S^{(0)}_{q(2k+1)+2\mu-1} + \tfrac{1}{2}R_{q(2k+1)+2\mu-1}]$$
$$= -\sum_{m=0}^{m=k}(-1)^{qm+\mu}\binom{q(2k+1)+2\mu}{2qm+2\mu} R_{q(2k+1-2m)}\,B_{qm+\mu}, \quad (\mu = 1, 2, .., q-1)$$

aus welchen für $k = 1$, resp. $k = 0$ die **independenten Darstellungen** sich ergeben:

(3a*.)
$$B_q = i^{q-1}\frac{q\,(2q)!}{(3q)!\,2^q}[6\,S^{(0)}_{3q-1} + R_{3q-1}],$$

(3b*.)
$$B_\mu = i^{2\mu-q-1}\frac{(2\mu)!}{(q+2\mu-1)!\,2^q}[2\,S^{(0)}_{q+2\mu-1} + R_{q+2\mu-1}].$$
$$(\mu = 1, 2, .., q-1).$$

Aus den Formeln (2.) und (3.) lassen sich durch verschiedene Combination derselben neue Formeln gewinnen, von denen hier nur zwei angeführt werden mögen.

Bildet man (3)−(2), so erhält man für die Tangentencoefficienten die Recursionsformeln ($\beta_0 = 0$ gesetzt):

(4.)
$$S^{(0)}_{q(2k+1)+2\mu-1} - \tfrac{1}{2} R_{q(2k+1)+2\mu-1}$$
$$= \sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{qm+\mu} \binom{q(2k+1)+2\mu-1}{2qm+2\mu-1} 2^{-2qm-2\mu} R_{q(2k+1-2m)} \beta_{qm+\mu}$$
$$(\mu = 0, 1, 2, .., q-1)$$

und die independenten Formeln:

(4*.)
$$\beta_\mu = (2i)^{2\mu-q} \frac{(2\mu-1)!}{(q+2\mu-1)!} \left\{ R^0_{q+2\mu-1} - 2 S^0_{q+2\mu-1} \right\} \quad (\mu = 1, 2, .., q)$$

Diese Formeln würden sich auch ergeben haben, wenn man von der Gleichung:

$$\frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{xi}{2} \frac{2 - e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = \sum_{m=1}^{m=\infty} 2^{-2m} \beta_m \frac{x^{2m}}{(2m-1)!}$$

ausgegangen wäre. Der Ausgangsgleichung

$$x \operatorname{cosec} x = \frac{-2xi}{e^{xi} - e^{-xi}} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (2^{2m-1} - 1) B_m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

entsprechen die Combinationen: $2k$ (3a) $- \frac{2k-1}{2}$ (2a) und 2 (3b)−(2b), welche die Recursionsformeln liefern:

(5a.)
$$k(2k+1) q S^{(0)}_{q(2k+1)-1}$$
$$= \sum_{m=1}^{m=k} (-1)^{qm} \binom{q(2k+1)}{2qm} [2^{2qm-2}(2k-1)-k] R_{q(2k+1-2m)} B_{qm},$$

(5b.)
$$[q(2k+1)+2\mu] S^{(0)}_{q(2k+1)+2\mu-1}$$
$$= \sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{qm+\mu} \binom{q(2k+1)+2\mu}{2qm+2\mu} [2^{2qm+2\mu-1}-1] R_{q(2k+1-2m)} B_{qm+\mu},$$
$$(\mu = 1, 2, .., q-1).$$

Geht man zur independenten Darstellung über, so erhält man die B durch $S^{(0)}$ allein dargestellt:

(5a*.)
$$B_q = i^{q+1} \frac{6q(2q)!}{2^q (3q)!} \frac{S^{(0)}_{3q-1}}{2^{2q-2}-1},$$

(5b*.)
$$B_\mu = i^{2\mu-q+1} \frac{2(2\mu)!}{2^q (q+2\mu-1)!} \frac{S^{(0)}_{q+2\mu-1}}{2^{2\mu-1}-1} \quad (\mu = 1, 2, .., q-1).$$

D. Um eine weitere Gruppe von Recursionsformeln zu erhalten, benutze man die Gleichung:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-1} x\alpha^{\varkappa(1-2\mu)} \operatorname{tg}(\alpha^{\varkappa}x) \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=q-1} x\alpha^{\lambda(1-2\mu)} \cot(\alpha^{\lambda}x)$$
$$= 2\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-2}\sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=q-1} x^2\alpha^{(1-2\mu)(\varkappa+\lambda)} \frac{\left(e^{2\alpha^{\varkappa}xi}+e^{-2\alpha^{\varkappa}xi}\right)\left(e^{2\alpha^{\lambda}xi}+e^{-2\alpha^{\lambda}xi}\right)-4}{\left(e^{2\alpha^{\varkappa}xi}-e^{-2\alpha^{\varkappa}xi}\right)\left(e^{2\alpha^{\lambda}xi}-e^{-2\alpha^{\lambda}xi}\right)}$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

als Ausgangsgleichung. Man multiplicire dann beide Seiten dieser Gleichung mit $2^{-q+2}\Phi(x)\Psi(x)$ und beachte, daß $2^{-q}\Phi(x)\Psi(x) = \Psi(2x)$ ist; dann erhält man [cf. Art. II (H) und (J)]:

$$2\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-1} x\alpha^{\varkappa(1-2\mu)} \operatorname{tg}(\alpha^{\varkappa}x) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=q-1} x\alpha^{\varkappa(1-2\mu)} \cot(\alpha^{\varkappa}x)\Psi(2x)$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=q-2}\sum_{\lambda=\varkappa+1}^{\lambda=q-1} \alpha^{-2\mu(\varkappa+\lambda)}\left\{4X_{\varkappa,\lambda}(x) - \Psi_{\varkappa,\lambda}(x)\right\}.$$

Für die beiden Summen sowohl als für die Functionen Ψ, $\Psi_{\varkappa,\lambda}$ und $X_{\varkappa,\lambda}$ setze man dann die Reihenentwicklungen ein und beachte dabei die in den früheren Artikeln gefundenen Resultate. Durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x ergeben sich zunächst die Gleichungen:

$$4q\sum_{m=1}^{m=k}(-1)^{m} B_{m}\binom{\mathfrak{k}}{2\mathfrak{m}}\left[2^{2\mathfrak{m}}-1\right]\left\{R_{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}} - \sum_{n=1}^{n=k-m}(-1)^{n}\binom{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}}{2\mathfrak{n}} R_{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}-2\mathfrak{n}} B_{n}\right\}$$
$$= (\mathfrak{k}-1)\mathfrak{k}\left\{4\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{\delta} S_{\mathfrak{k}-2}^{(0,\delta)} - R_{\mathfrak{k}-1}\right\},$$

wo $2qk+q=\mathfrak{k}$, $qm=\mathfrak{m}$, $qn=\mathfrak{n}$ gesetzt ist, und

$$-4q\sum_{m=0}^{m=k}(-1)^{m} B_{m}\binom{\mathfrak{k}}{2\mathfrak{m}}\left[2^{2\mathfrak{m}}-1\right]\sum_{n=0}^{n=k-m}(-1)^{n}\binom{\mathfrak{k}-\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} R_{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}-2\mathfrak{n}} B_{n}$$
$$= (\mathfrak{k}-1)\mathfrak{k}\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{(1-2\varrho)\delta}\left\{4 S_{\mathfrak{k}-2}^{(0,\delta)} - R_{\mathfrak{k}-2}^{(0,\delta)}\right\},$$

wo $2qk+q+4\mu=\mathfrak{k}$, $qm+\mu=\mathfrak{m}$, $qn+\mu=\mathfrak{n}$ gesetzt ist und μ die Werte $1, 2, \ldots, q-1$ durchläuft. Die Summation nach n läßt sich mit Hilfe der Formeln (3a.) und (3b.) ausführen, und es ergeben sich nach einigen Umformungen schließlich die nachstehenden Recursionsformeln, in die der einfacheren Bezeichnungsweise wegen die Tangentencoefficienten statt der Bernoulli'schen Zahlen eingeführt sind:

$$\text{(6a.)}\quad 2q\sum_{m=1}^{m=k}(-1)^m\beta_m\binom{\mathfrak{k}-2}{2\mathfrak{m}-1}2^{-2\mathfrak{m}}\{2S^{(0)}_{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}-1}+R_{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}-1}\}$$

$$=4\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{\delta}S^{(0,\delta)}_{\mathfrak{k}-2}-R_{\mathfrak{k}-1},\qquad (\mathfrak{k}=2qk+q,\ \mathfrak{m}=qm)$$

$$\text{(6b)}\quad 2q\sum_{m=0}^{m=k}(-1)^m\beta_m\binom{\mathfrak{k}-2}{2\mathfrak{m}-1}2^{-2\mathfrak{m}}\{2S^{(0)}_{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}-1}+R_{\mathfrak{k}-2\mathfrak{m}-1}\}$$

$$=\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{(1-2\varrho)\delta}\{4S^{(0,\delta)}_{\mathfrak{k}-2}-R^{(0,\delta)}_{\mathfrak{k}-2}\}\quad(\mathfrak{k}=2qk+q+4\mu,\ \mathfrak{m}=qm+\mu,\ \mu=1,2,..q-1).$$

Aus der Gleichung (6a) folgt für $k=1$ ($\mathfrak{k}=3q$) die independente Darstellung von β_q und aus der Gleichung (6b) für $k=0$ ($\mathfrak{k}=q+4\mu$) diejenige von β_μ ($\mu=1,2,\ldots,q-1$).

Weitere Recursionsformeln ergeben sich, wenn man das Product:

$$\sum_{x=0}^{x=q-1}x\alpha^{x(1-2\mu)}\operatorname{tg}(\alpha^x x)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=q-1}x\alpha^{\lambda(1-2\varrho)}\cot(\alpha^\lambda x),\quad\begin{pmatrix}\mu,\varrho=0,1,2,\ldots,q-1\\ \mu\neq\varrho\end{pmatrix}$$

welches für $\varrho=\mu$ in das obige übergeht, in analoger Weise behandelt und dabei die unter (H) und (J) gewonnenen allgemeineren Relationen benutzt. Die Formeln werden aber bedeutend complicirter, sodaß die Aufstellung derselben unterbleiben möge, zumal sie nichts wesentlich Neues bieten.

Bedeutet k irgend eine ganze positive Zahl, einschließlich der Null, so sind die Werte von

$$S^{(0)}_k,\quad s_k=\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{(1-2\mu)\delta}S^{(0,\delta)}_k\ \text{ und }\ r_k=\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{(1-2\mu)\delta}R^{(0,\delta)}_k,$$

welche in den Gleichungen (3) bis (6) gebraucht werden, für $q=1,2,3,4$ und für $\alpha=e^{\frac{+i\pi}{q}}$ die folgenden [1]) Ausdrücke:

---

1) Die in P_k und R_k auftretenden Ausdrücke $(\alpha^0\pm\alpha^1\pm\ldots\pm\alpha^{q-1})$ lassen sich sämmtlich, wie auch die Vorzeichencombination sein mag, auf die Form $fe^{\pm\frac{\varrho\pi}{2q}}$, wo f ein Zahlenfactor und ϱ eine der Zahlen 0 bis q ist, bringen, solange q nicht größer als 6 ist; darauf beruht es, dass sich P_k und R_k für $q=1,2,..,6$ und beliebige Werte von k in der früher gegeben relativ einfachen Form darstellen ließen. Die Summen $(\alpha^1\pm\alpha^2\pm..\pm\alpha^{q-1})$, resp. $(\alpha^1\pm\alpha^2\pm..\pm\alpha^{\delta-1}\pm\alpha^{\delta+1}\pm..\pm\alpha^{q-1})$ dagegen lassen sich nur für $q=1,2,3$, resp. $q=1,2,3,4$ auf die obengenannte Form bringen. Da nun die r_k, welche sich für $q=1,2,..,6$ einfach darstellen lassen, nur mit den s_k zusammen vorkommen, so sind auch die r_k nur für

$q = 1.$

$$\mu = 0:\ S_0^{(0)} = \tfrac{1}{2},\ S_{2k+2}^{(0)} = 0,\quad s_{2k+1} = 0;$$

$q = 2.$

$$\mu = 0:\ S_{4k+1}^{(0)} = i,\quad s_{4k} = 0,$$
$$\mu = 1:\ S_{4k+3}^{(0)} = -i, s_{4k+4} = 0,\ r_{4k+4} = i(-1)^k 2^{2k+3};$$

$q = 3.$

$$\mu = 0:\ S_{6k+2}^{(0)} = -1-(-1)^k 3^{3k+1},\ s_{6k+1} = -2,$$
$$\mu = 1:\ S_{6k+4}^{(0)} = -1+(-1)^k 3^{3k+2},\ s_{6k+5} = -2,\ r_{6k+5} = -2^{6k+7},$$
$$\mu = 2:\ S_{6k+6}^{(0)} = -1-(-1)^k 3^{3k+3},\ s_{6k+9} = -2,\ r_{6k+9} = -2^{6k+9};$$

$q = 4.$

$$\mu = 0, 1, 2, 3:\ S_{8k+3+2\mu}^{(0)} = i\,(8k+3+2\mu)\, 2^{4k+2+\mu} \times$$
$$\times \left\{(-1)^{\mu+1} F(-4k-1-\mu,\ -4k-\tfrac{1}{2}-\mu,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2})\right.$$
$$\left. - F(-4k-1-\mu,\ -4k-\tfrac{1}{2}-\mu,\ \tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{2})\right\},$$
$$s_{8k+2+4\mu} = -i\left\{(-1)^k 2^{2k+3+\mu} F(-2k-\mu,\ 2k+1+\mu,\ \tfrac{1}{2},\ -1)\right.$$
$$\left. + (-1)^\mu 2^{4k+2+6\mu}\right\},$$
$$\mu = 1:\ r_{8k+6} = i(-1)^{k+1} 2^{6k+7}\ F(-2k-2,\ 2k+2,\ \tfrac{1}{2},\ -1),$$
$$\mu = 2:\ r_{8k+10} = i(-1)^{k+1} 2^{6k+10} F(-2k-2,\ 2k+2,\ \tfrac{1}{2},\ -1),$$
$$\mu = 3:\ r_{8k+14} = i(-1)^{k+1} 2^{6k+13} F(-2k-3,\ 2k+3,\ \tfrac{1}{2},\ -1).$$

E.) Um für die Euler'schen Zahlen verkürzte Recursionsformeln zu gewinnen, gehe man von der Gleichung aus:

$$\sec x = \frac{2}{e^{xi}+e^{-xi}} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sigma_m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

wo σ_m die m^{te} Euler'sche Zahl bedeutet und $\sigma_0 = 1$ ist. Man ersetze in dieser Gleichung x durch $\alpha^\nu x$, multiplicire beide Seiten derselben mit $\alpha^{-2\mu\nu}$ $(\mu = 0, 1, 2, .., q-1)$ und summire über ν von 0 bis $q-1$. Multiplicirt man noch beide Seiten der jetzt erhaltenen Gleichung mit $\Phi\,(x)$, so wird, mit Hilfe von Art. II (F):

$$2\omega_\mu\,(x) = q \sum_{m=0}^{m=\infty} \sigma_{qm+\mu} \frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu)!}\,\Phi\,(x). \qquad (\mu = 0, 1, 2, .. q-1)$$

Entwickelt man nun sowohl $\omega_\mu\,(x)$ als $\Phi\,(x)$ in unendliche Reihen und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x mit einander,

---

$q = 1, 2, 3, 4$ berechnet. Das Gleiche gilt für die Grössen $T_k^{(0)}$ und t_k, welche später vorkommen.

Betreffs der Berechnung der r_k für $q = 4$ sind die folgenden Formeln verwendet (cf. Gauss, l. c. p. 130 und p. 133):

$0 = c\,(1-x)\,F(a, b, c, x) - c\,F(a-1, b, c, x) + (c-b)x\,F(a, b, c+1, x)$, (p. 130 No. 8).

$F(a-1, b+1, c, x) - F(a, b, c, x) = \frac{(a-b-1)x}{c}\,F(a, b+1, c+1, x)$. (p. 133 No. 21).

so folgen die nachstehenden Recursionsformeln für die Euler'schen Zahlen:

$$(7.)\qquad 2\,T^{(0)}_{2qk+2\mu} = \sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{qm+\mu} \binom{2qk+2\mu}{2qm+2\mu} P_{2q(k-m)}\,\sigma_{qm+\mu}.$$

Hieraus erhält man für $k = 1$, $\mu = 0$ und für $k = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, q-1$ die independenten Darstellungen der Euler-schen Zahlen:

$$(7a.^*)\qquad \sigma_q = (-1)^q \frac{2T^{(0)}_{2q} - P_{2q}}{2^{q-1}},$$

$$(7b.^*)\qquad \sigma_\mu = (-1)^\mu \frac{T^{(0)}_{2\mu}}{2^{q-2}}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q-1).$$

Bestimmt man nun aus der Gleichung:

$$\beta_q = (-1)^{q+1} \frac{P_{2q-1}}{2^{q-1}} = (-1)^{q+1} \frac{P_{2q}}{q2^{q-1}}$$

P_{2q} und setzt den erhaltenen Wert in den Ausdruck für σ_q ein, so erhält man die q^{te} Euler'sche Zahl durch die q^{te} Bernoulli'sche Zahl dargestellt:

$$\sigma_q = q\beta_q + (-1)^q \frac{T^{(0)}_{2q}}{2^{q-2}} = 2^{2q-1}(2^{2q}-1)\,B_q + (-1)^q \frac{T^{(0)}_{2q}}{2^{q-2}}.$$

Auch hier gilt die früher gemachte Bemerkung, daß, wenn q eine ungerade Zahl ist, σ_q durch q^{te} Einheitswurzeln dargestellt werden kann. Ist $\hat{\alpha}$ eine primitive q^{te} Einheitswurzel und

$$\hat{\mathrm{T}}_{2k} = \sum (\hat{\alpha}^1 \pm \hat{\alpha}^2 \cdots \pm \hat{\alpha}^{q-1}),$$

so ist leicht zu sehn, daß

$$\hat{\mathrm{T}}_{2k} = T_{2k}$$

ist.

F.) Schließlich werde noch eine Recursionsformel zwischen den σ und den β aufgestellt, von welcher die bekannte Formel[1]):

$$\beta_{k+1} = \sum_{m=0}^{m=k} \sigma_{k-m}\,\sigma_m \binom{2k}{2m}$$

ein specieller Fall ist.

Es besteht die Gleichung:

---

1) cf. Saalschütz, Vorlesungen über B. Z. p. 30 Formel XXIII.

$$\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=q-1}\alpha^{-2\mu\nu}\sec(\alpha^\nu x)\right]^2=\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\alpha^{-4\mu\nu}\frac{dtg(\alpha^\nu x)}{d(\alpha^\nu x)}$$
$$+2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=q-2}\sum_{\nu=\lambda+1}^{\nu=q-1}\frac{\alpha^{-2\mu(\lambda+\nu)}}{\cos(\alpha^\lambda x)\cos(\alpha^\nu x)},\qquad (\mu=0,1,2,..,q-1)$$

welche, wenn man beide Seiten mit $\Phi(x)$ multiplicirt und für $\sec(\alpha^\nu x)$ und $\frac{dtg(\alpha^\nu x)}{d(\alpha^\nu x)}$ die Reihen einsetzt, übergeht in die folgende [(cf. Art. II (G)]:

$$q^2\left[\sum_{m=0}^{m=\infty}\sigma_{qm+\mu}\frac{x^{2qm+2\mu}}{(2qm+2\mu)!}\right]^2\Phi(x)=q\sum_{m=-1}^{m=\infty}\beta_{qm+2\mu+1}\frac{x^{2qm+4\mu}}{(2qm+4\mu)!}\Phi(x)$$
$$+2^2\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\omega_\mu^{(\delta)}(x),\quad \text{wo } \beta_{-k}=0 \text{ ist.}$$

Setzt man noch für $\Phi(x)$ die Reihenentwicklung ein und vergleicht die Coefficienten von $x^{2qk+4\mu}$ rechts und links mit einander, so resultirt die Gleichung:

$$(8.)\qquad \sum_{m=0}^{m=k}\sum_{n=0}^{n=m}(-1)^{qm}\binom{2qk+4\mu}{2qm+4\mu}\binom{2qm+4\mu}{2qn+2\mu}P_{2q(k-m)}\sigma_{q(m-n)+\mu}\sigma_{qn+\mu}$$
$$-\sum_{m=-1}^{m=k}(-1)^{qm}\binom{2qk+4\mu}{2qm+4\mu}P_{2q(k-m)}\beta_{qm+2\mu+1}$$
$$=2^2\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}\alpha^{-4\mu\delta}T^{(0,\delta)}_{2qk+4\mu}.\qquad (\mu=0,1,..,q-1).$$

Für $q=1$ folgt die erwähnte specielle Gleichung.

Setzt man in Gleichung (8) $k=1$, $\mu=0$, so ergiebt sich eine **Beziehung zwischen der q^{ten} Euler'schen Zahl und dem $q+1^{\text{ten}}$ Tangentencoefficienten:**

$$(q-1)P_{2q}-2^2\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}T^{(0,\delta)}_{2q}=(-1)^q2^{q-1}\{\beta_{q+1}-2q\sigma_q\},$$

und ersetzt man weiter β_{q+1} durch seinen aus Formel (1) sich ergebenden Wert, so folgt für σ_q **die independente Darstellung:**

$$(8.^*)\qquad \sigma_q=\frac{(-1)^q}{2^q q}\left\{2^2\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}T^{(0,\delta)}_{2q}+P_{2q+2}-3qP_{2q}\right\}.$$

Wird andrerseits in der zwischen β_{q+1} und σ_q bestehenden Relation σ_q durch β_q ausgedrückt, so besteht die folgende **Beziehung zwischen dem q^{ten} und dem $q+1^{\text{ten}}$ Tangentencoefficienten:**

$$(-1)^q2^{q-2}\{\beta_{q+1}-q(q+1)\beta_q\}=q\,T^{(0)}_{2q}-\sum_{\delta=1}^{\delta=q-1}T^{(0,\delta)}_{2q}.$$

Auch die Recursionsformel[1]:

$$\sigma_k = \sum_{m=0}^{m=k} \binom{2k-1}{2m} \sigma_m \beta_{k-m}$$

ist ein Specialfall einer allgemeineren Formel, welche man erhält, wenn man von der Gleichung:

$$ln \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \sec(\alpha^\nu x) \right\} = ln \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} 2\Omega_\nu(x) \right\} - ln\, \Phi(x).$$

$$= ln\, \omega_0(x) - \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} ln \cos(\alpha^\nu x) - (q-1)\, ln 2$$

ausgeht und in diese die Reihen für $\sec(\alpha^\nu x)$, $ln \cos(\alpha^\nu x)$ und $\omega_0(x)$ einsetzt:

$$ln \left\{ \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\sigma_{qm} x^{2qm}}{(2qm)!} \right\} - ln \left\{ \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{qm}\, T^{(0)}_{2qm} \frac{x^{2qm}}{2^{q-2}(2qm)!} \right\} = q \sum_{m=0}^{m=\infty} \beta_{qm} \frac{x^{2qm}}{(2qm)!}.$$

Ist nun:

$$ln \frac{\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m x^m}{\sum_{m=0}^{m=\infty} B_m x^m} = \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m x^m,$$

worin $A_0 = B_0 = 1$ ist, so gilt die Beziehung:

$$(k+1)\, a_{k+1} = \sum_{m=0}^{m=k} (m+1)\left[A_{m+1} B_{k-m} - A_{k-m} B_{m+1}\right] - \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{n=0}^{n=k} n a_n A_{k+1-m-n} B_n.$$

Wendet man diese Beziehung jetzt auf die obige Gleichung an, so folgt die Recursionsformel:

$$(9.)\quad 2^{q-2} qk\, \beta_{qk} = \sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{qm} \binom{2qk}{2qm} m \left[(-1)^{qk} \sigma_{qm} T^{(0)}_{2q(k-m)} - \sigma_{q(k-m)} T^{(0)}_{2qm}\right]$$
$$- \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{n=0}^{n=k} (-1)^{qn} qn \binom{2q(k-m)}{2qn} \binom{2qk}{2qm} \beta_{qn}\, \sigma_{q(k-m-n)}\, T^{(0)}_{2qn}.$$

Für $q = 1$ folgt die obenerwähnte specielle Recursionsformel; für $k = 1$ und beliebiges q ergiebt sich die früher aufgestellte Beziehung zwischen σ_q und β_q.

Die Werte von $T^{(0)}_{2qk+2\mu}$ und $t_{2qk+4\mu} = \sum_{\delta=1}^{\delta=q-1} \alpha^{-2\mu\delta}\, T^{(0,\delta)}_{2qk+4\mu}$ mögen hier noch für $\alpha = e^{\frac{\pi i}{q}}$ $q = 1, 2, 3, 4$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$ folgen[2]). Für alle Werte von q ist:

$$T^{(0)}_0 = 2^{q-2},\ t_0 = (q-1)\, 2^{q-3}.$$

1) cf. Saalschütz, a. a. O. pag. 27 Formel XXI.

2) cf. die Anmerkung zu (D.).

$q = 1.$

$$T_0^{(0)} = \tfrac{1}{2},\ T_{2k+2}^{(0)} = 0,\ t_{2k} = 0;$$

$q = 2.$

$$\mu = 0, 1: \quad T_{4k+2\mu}^{(0)} = (-1)^\mu,\ t_0 = \tfrac{1}{2},\ t_{2k+2} = 0;$$

$q = 3.$

$$\mu = 0, 1, 2: \ T_{6k+2\mu}^{(0)} = 1 + (-1)^{k+\mu}\, 3^{2k+\mu},\ t_{6k+4\mu} = 2;$$

$q = 4.$

$$\mu = 0, 1, 2, 3: \ T_{8k+2\mu}^{(0)} = 2^{4k+\mu+1}\Big\{(-1)^\mu F(-4k-\mu, -4k-\mu+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + F(-4k-\mu, -4k-\mu+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\Big\},$$

$$t_{8k+4\mu} = (-1)^k 2^{2k+\mu+2} F(-2k-\mu, 2k+\mu, \tfrac{1}{2}, -1) + (-1)^\mu 2^{4k+2\mu+1}$$

Die vorstehend gegebene Methode, verkürzte Recursionsformeln für die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen aufzustellen, läßt sich immer anwenden, welche goniometrische Formel für tg, cot, sec und cosec man auch als Ausgangsgleichung wählen möge. Die vorgegebenen Entwicklungen erschöpfen aber, wie es mir scheint, die Fälle, in denen die recurrirenden und independenten Formeln für beliebige Werte von q eine verhältnissmäßig einfache Gestalt erhalten. Für niedrige Werte von q ($q = 1, 2, 3$) liefert schließlich jede Ausgangsgleichung noch ziemlich bequeme Formeln, welche sich leicht aufstellen lassen. Für diese speciellen Werte von q lassen sich so verkürzte Recursionsformeln der mannigfachsten Art angeben, welche in besonderen Fällen von Bedeutung sein, ein allgemeineres theoretisches Interesse aber nicht beanspruchen können. Es seien deshalb nur zur Verdeutlichung des eben Gesagten zwei Beispiele hier angefügt. Für $q = 1$ ergeben sich die bekannten Recursionsformeln; ich beschränke mich auf den Fall $q = 2$.

Ausgehend von den Gleichungen:

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} + \frac{ix}{2}\,\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} = 2\left\{1 - \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m}\,\frac{x^{4m}}{(4m)!}\right\}$$

und

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} - \frac{ix}{2}\,\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} = 2\sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}\,\frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!}$$

erhält man durch beiderseitige Multiplication mit $(e^x-1)\,(e^{ix}-1)$, darauf folgende Reihenentwicklung und Coefficientenvergleichung folgende acht Recursionsformeln:

$$2\sum_{m=1}^{m=k-1} B_{2m} \binom{4k-1}{4m}[(-1)^{k-m}\; 2^{2k-2m-1}-1] = -[-(4k-3)+(-1)^k(4k-5)2^{2k-2}],$$

$$\sum_{m=1}^{m=k-1} B_{2m} \binom{4k+1}{4m}[(-1)^{k-m}\; 2^{2k-2m} \;-1] = -[1+(-1)^k(4k-3)2^{2k-2}],$$

$$\sum_{m=1}^{m=k-1} B_{2m} \binom{4k}{4m} \;[(-1)^{k-m}\; 2^{2k-2m-1}-1] = (k-1)[1+(-1)^{k-1}2^{2k-1}],$$

$$\sum_{m=1}^{m=k-1} B_{2m} \binom{4k-2}{4m} (-1)^{k-m}\; 2^{2k-2m} \qquad = 4k-2-(-1)^k(4k-6)2^{2k-2};$$

$$\sum_{m=1}^{m=k} B_{2m-1}\binom{4k+1}{4m-1}[(-1)^{k-m+1}2^{2k-2m+1}-1] = (-1)^k 2^{2k-2}(4k+1),$$

$$\sum_{m=1}^{m=k} B_{2m-1}\binom{4k-1}{4m-2}[(-1)^{k-m}\; 2^{2k-2m} \;-1] = (4k-1)[(-1)^{k-1}2^{2k-2}-1],$$

$$2\sum_{m=1}^{m=k} B_{2m-1}\binom{4k+2}{4m-2}[(-1)^{k-m+1}2^{2k-2m+2}-1] = (4k+2)[(-1)^k 2^{2k}-1],$$

$$\sum_{m=1}^{m=k} B_{2m-1}\binom{4k}{4m-2} (-1)^{k-m}\; 2^{2k-2m} \qquad = k[(-1)^{k+1}2^{2k-1}-1].$$

Von diesen Formeln sind nur die vierte und die letzte in den früheren Gleichungen enthalten; beide ergeben sich aus den Formeln (3), wenn in denselben $q = 2$ gesetzt wird.

Das zweite Beispiel werde geliefert von der Ausgangsgleichung:

$$x \operatorname{tg} x = \frac{x \sin 2x}{1+\cos 2x},$$

welche die Formeln liefert:

$$\sum_{m=1}^{m=k-1} B_{2m} \;(2^{4m}-1) \;\binom{4k}{4m}\; [(-1)^{k-m}2^{2k-2m-1}+1]+2(2^{4k}-1)B_{2k}$$
$$= k[(-1)^{k-1}2^{2k-1}-1],$$

$$2\sum_{m=1}^{m=k-1} B_{2m-1}(2^{4m-2}-1)\binom{4k-2}{4m-2}[(-1)^{k-m}2^{2k-2m-1}+1]+4(2^{4k-2}-1)B_{2k-1}$$
$$= (2k-1)[(-1)^{k-1}2^{2k-2}+1].$$

Würzburg, December 1893.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

October 1893.

(Fortsetzung.)

(Scandinavien.)

Hildebrandson et Hagström, Des principales méthodes employées pour observer et mesurer les nuages. 8°.

Projet de mesure d'un arc du méridien de 4° 20′ au Spitzberg par F. G. Rosen. Stockholm 1893. 8°.

(Holland.)

Tijdschrift voor nederlandsche Taal- en Letterkunde. 12 D. Afl. 4. Leiden 1893. 8°.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie. 4. Volgr. 8. D. 4. Afl. 'S Gravenhage 1893. 8°.

(Italien.)

Bolletino delle pubblicazioni italiane 1893. Num. 186. 187. Firenze 1893. 8°.

Rendiconti d. r. Accademia dei Lincei. Classe d. scienze moral. stor. e filol. Ser. V. Vol. II. Fasc. 7. Roma 1893. 8.

Atti d. r. Accademia dei Lincei. Anno CCXC 1893. Ser. V. Rendiconti. Classe di scienze fis. mat. e natural. Vol. II. Fasc. 6. 2 Sem. Fasc. 7. 2 Sem.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. T. VII. Fasc. III—IV. V. 1893. 8°.

Le opere di Galileo Galilei. Ediz. nazionale. Vol. III. Parte 1. Firenze 1892. 4°.

(Frankreich.)

Bulletin de la société mathematique de France. T. XXI. No. 6. Paris. 8°.

(Rußland.)

Annales de l'Université impériale de Kharkow. H. 3. 1893. 8°.

(Amerika U. S.)

Bulletin of the Museum of comparative Zoology at Havard College. Vol. XVI. No. 14. Vol. XXV. No. 1. Cambridge 1893. 8°.

Alumni Report. Vol. XXX. No. 1. 1893. 8°.

The Journal of comparative Neurology. Vol. III pages 107—162. Septbr. 1893. 8°.

(Canada.)

Catalogue of Section one of the Museum of the geological Survey . . by G. Chr. Hoffmann. Ottawa 1893. 8°.

November 1893.

(Deutschland.)

Sitzungsberichte d. kgl. preuss. Akad. d. W. zu Berlin XXXIX. 19. October. XL. XLI. 26. Octob. XLII 2. Novbr. XLIII. XLIV 9. Novbr. 8°. 1893.

Leopoldina. H. XXIX. No. 17—18.

F. Beilstein, Handbuch d. organischen Chemie. 3. Aufl. 27. 28. Lief. Hamburg und Leipzig. 1893.

Verhandlungen der physikal. medicinisch. Gesellsch. zu Würzburg. N. F. Bd. XXVI. H. 1—4. Würzburg 1893.

Sitzungsberichte d. physikal. medicin. Gesellsch. zu Würzburg. Jhrg. 1893. No. 1—6. 8°.

Zeitschrift f. Naturwissenschaften. Bd. 66. H. 3 u. 4. Leipzig 1893. 8°.

Berichte über die Verhandlungen d. kgl. sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig. Math. phys. Cl. 1893. IV. V. VI. Leipzig 1893. 8°.

Abhandlungen der historischen Classe d. kgl. bayerisch. Akademie d. Wissenschaften. Bd. 20. Abth. 3. München 1893. 4°.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. Jhrg. 28. H. 3. 1893. 8°.
Abhandlungen d. philolog. histor. Classe d. kgl. sächs. Ges. d. Wissenschaften. Bd. XIV. No. II. III. IV. 1893. 8°.
Jul. Bergbohm, Entwurf einer neuen Integralrechnung. H. 2. Leipzig 1893. 8°.
Sitzungsberichte d. histor. philolog. und der histor. Classe d. k. b. Akad. d. Wissensch. zu München. 1893. Bd. II. H. 1 u. 2. 8°.
Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 69. Hft. 2. Görlitz 1893.
Zeitschrift d. deutsch. morgenländ. Gesellschaft. Bd. 47. H. 3. Leipz. 1893. 8°.

(Oesterreich-Ungarn.)

Anzeiger d. Akademie d. Wissenschaften in Krakau. October 1893. 8°.
Meteorologische Zeitschrift. Bd. X. 1893. Heft 11. November. Wien. 8°.
Mittheilungen des historischen Vereines für Steiermark. H. XLI. Graz 1893. 8°.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 25. Jhrg. Graz 1893. 8°.
Magyar tud. Akademiae Almanach 1893. 8°.
Mathemat.-naturw. Berichte. Bd. X. 1. 2. 1892. 1893. 8°.
Halász, Sved-Lapp Nyelv III. IV. V. 1888. 1891. 1893. 8°.
Rapport sur les travaux de l'Académie des sciences de Hongrie en 1892. Buda-Pest 1893. 8°.
Mathemat. és természettud Közleményk. XXV 1—3. Budapest 1892. 1893. 8°.
Mathemat. és természettud Értesitö X 8. 9 1892. XI 1—5 1892. 1893. 8°.
Mathemat. Értekezések. XV 2. 3. 1893. 8.
Archaeologiai Értesitö. Uj folyam. XII 3—5 1892. XIII 1. 2 1893. 8°.
Török történetirók I. Budapest 1893. 8°.
Nyelotudom közlemények. XXII 5. 6 1891. 1892. XXIII 1. 2 1893. 8°.
Agyulafehéwári székesegy ház Résöbbi részei. Budapest 1893. fol.
Monumenta Hungariae historica. Scriptores XXX. 3 pótfüzet. 1892. 8°.
Monumenta comitialia regni Transsylonniae. T. XV. Budapest 1892. 8°.
Thaly Kálmán. A zsékesi Grof Berèsényi család. III. Budapest 1892.
Munkácsi B. Vogul népköltèsi gyüjtemény. III 1. Budapest 1893.
Munkácsi B. A votják nyelv szótára. II. Budapest 1892. 8°.
A magyar törvény hatóságok jogszabályainak gyüjteménye. III. Budapest 1892. 8°.
Ertekezesek a nylo-es széptudományor köreböl. XV. 11. 12 XVI 1—3. 8°.
Értekezések a történeti tudómányok Köreböl. XV 7—12. XVI 1.
Érteekezések a térmes zeltudományor Köreböl XXII 4—8. XXIII 1. 2.

(England.)

Proceedings of the royal Society. Vol. LIV No. 327. 8°.
Proceedings of the royal irish Academy. Ser. III. Vol. 2. No. 4 (May) No. 5 (August). 8°.
Proceedings of the zoological Society of London. 1893. Pt. II. III. 8°.
Transactions of the zoologic. Society of London. Vol. XIII. Pt. 7. 1893. 4°.
Nature. Vol. 49. No. 1253. 1254. 1255. 1256.
Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs No. IX. On the Flinders Petrie Papyri. Pt. II. Dublin 1893. 4°.
A. Cayley, The collected mathematical Papers. Vol. VI. Cambridge 1893. 4°.

(Holland.)

Archives néerlandaises d. sciences exactes et naturelles. T. XXVII. 3 Livr. Harlem 1893. 8°.

(Frankreich.)

Jules Oppert. Les inscriptions du Pseudo-Smerdis et de l'usurpateur Nidintabel fixant le calendrier perse. Leide 1893. 8°.
Jules Oppert. Adad-Nicar, roi d'Ellassar. 8°.

Inhalt von Nr. 21.

Robert Haussner, zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *E. Ehlers*, vorsitzender Sekretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

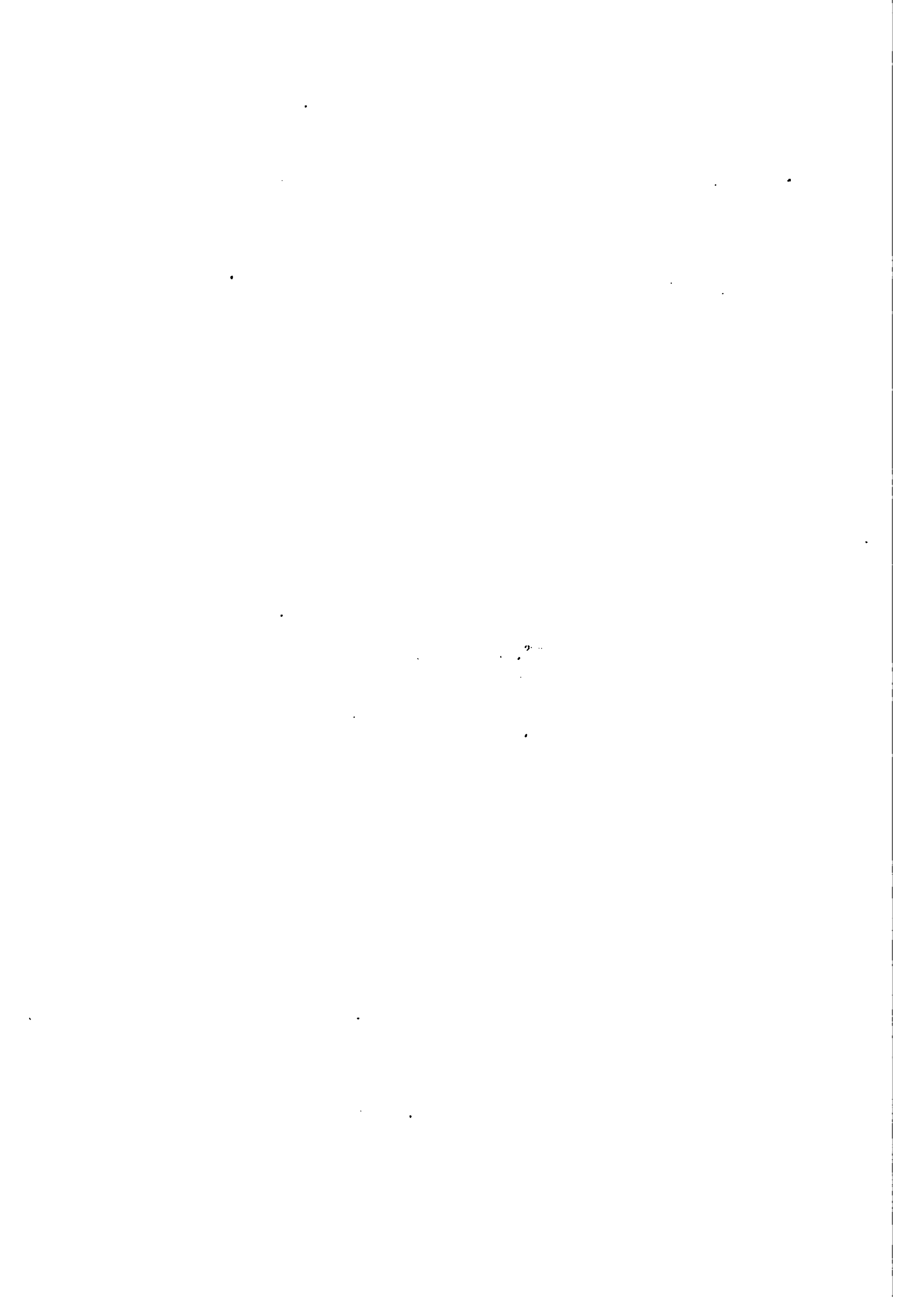
Anzeige.

Vom Jahre 1894 ab erscheint dieses Blatt in Format und Schrift unverändert und unter dem Titel „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ in drei von einander getrennten Abtheilungen, von denen die erste geschäftliche Mittheilungen, die zweite Nachrichten von der mathematisch-physicalischen und die dritte Nachrichten von der philologisch-historischen Klasse enthält.

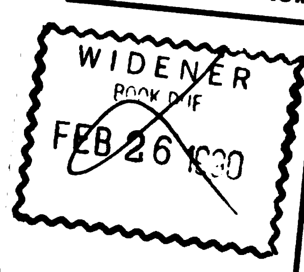
Die Ausgabe erfolgt in zwanglosen Heften, die sich zu einem Jahresbande vereinigen. Die Redaktion liegt in der Hand des vorsitzenden Sekretärs der Gesellschaft.

Der Preis des Jahrganges der „Nachrichten“ beträgt, falls sie mit den göttingischen gelehrten Anzeigen bezogen werden, sechs Mark, im anderen Falle acht Mark. Die Nachrichten der mathematisch-physicalischen und die der philologisch-historischen Klasse sind auch einzeln zu beziehen; der Preis einer Klassenausgabe ist fünf Mark. Den Abnehmern der Nachrichten einer der beiden Klassen werden die geschäftlichen Mittheilungen unentgeltlich geliefert.

Die monatlichen Uebersichten über die bei der Gesellschaft eingegangenen Druckschriften werden in der bisherigen Form nicht fortgesetzt; an ihre Stelle tritt ein jährlich einmal veröffentlichtes geordnetes Verzeichnis dieser Schriften.






WIDENER
BOOK DUE
FEB 26 1930

